ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 517.983

*Б.Ф. САМСОНОВ*

# О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ДАРБУ $N$-ГО ПОРЯДКА

1. В последнее время активно изучаются цепочки преобразований Дарбу [1]–[3] вплоть до бесконечного порядка [4]. Ясно, что результирующее действие цепочки $N$ преобразований Дарбу эквивалентно одному преобразованию $N$-го порядка. Вопрос же о том, всякое ли преобразование порядка $N$ можно представить в виде некоторой цепочки преобразований Дарбу первого порядка, на наш взгляд, требует дополнительного обсуждения. В работе [4] рассмотрено преобразование Дарбу второго порядка и установлено, что существуют два типа таких преобразований — приводимые и неприводимые. Оба типа сводятся к суперпозиции преобразований первого порядка, однако в первом случае промежуточный гамильтониан эрмитов, а во втором — нет. В [1] (теорема 5) для частного случая потенциалов, преобразование Дарбу которых приводит к новому потенциалу, отличающемуся от исходного на постоянное слагаемое, утверждается, что преобразование $N$-го порядка всегда можно представить в виде суперпозиции $N$ преобразований первого порядка. В [5] это утверждение обобщено на произвольные потенциалы без строгого доказательства. В данной работе сформулировано и доказано более точное утверждение. Уточнение связано с исключением из цепочки тех преобразований, композиция которых является оператором симметрии исходного уравнения Шредингера.

2. Рассмотрим уравнение Шредингера

$$h_0\psi(x) = E\psi(x), \quad h_0 = -D^2 + V_0(x), \quad D = d/dx, \quad x \in (a,b), \tag{1}$$

где $V_0(x)$ — некоторая достаточно гладкая на интервале $(a,b)$ (который может охватывать всю вещественную ось) вещественнозначная функция. Пусть $T_0$ — пространство решений уравнения (1).

**Определение.** Линейный дифференциальный порядка $N$ оператор $\widehat{L}^{(N)}$ с коэффициентом при $D^N$, равным единице, действующий из $T_0$ в $T_{N1} = \{\varphi : \varphi = \widehat{L}\psi,\ \psi \in T_0\}$, назовем оператором преобразования Дарбу порядка $N$, если

$$\widehat{L}^{(N)}h_0 - h_0\widehat{L}^{(N)} = A_N(x)\widehat{L}^{(N)}, \tag{2}$$

где $A_N(x)$ — некоторая достаточно гладкая функция. При $A_N(x) \equiv 0$ оператор $\widehat{L}^{(N)}$ назовем тривиальным.

Из этого определения непосредственно следует, что функция $\varphi = \widehat{L}^{(N)}\psi$ удовлетворяет уравнению Шредингера с потенциалом $V_N(x) = V_0(x) + A_N(x)$, а пространство $T_{N1} \subset T_N$, где $T_N$ — пространство решений уравнения Шредингера с потенциалом $V_N(x)$.

При $N = 1$ уравнение (2) определяет обычное преобразование Дарбу [6]

$$\widehat{L}^{(1)} = \widehat{L} = -u'_\alpha/u_\alpha + D, \quad A_1(x) = -2(\ln u_\alpha)'',$$

штрихом обозначаем производную по $x$. Функция $u_\alpha$, входящая в эти выражения, называется функцией преобразования и определяется исходным гамильтонианом $h_0$ : $h_0 u_\alpha = \alpha u_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} u_\alpha = 0$. Оператор $\widehat{L}$ имеет нетривиальное ядро $\ker \widehat{L} = \operatorname{span}\{u_\alpha\}$, где span означает линейную оболочку над полем $\mathbb{C}$.

Если $\widetilde{u}_\alpha$ выбрано так, что вронскиан $W(u_\alpha,\widetilde{u}_\alpha)=1$, то $\widehat{L}\widetilde{u}_\alpha=u_\alpha^{-1}=v_\alpha$ и $h_1v_\alpha=\alpha v_\alpha$, $h_1=h_0+A_1(x)$. Кроме того, непосредственными вычислениями убеждаемся, что $\lim\limits_{E\to\alpha}R^{-1}(E)\widehat{L}\psi_E(x)=\widetilde{v}_\alpha(x)$, $R(E)=E-\alpha$ при условии, что $\psi_E(x)\to u_\alpha(x)$ при $E\to\alpha$. В этом случае $h_1\widetilde{v}_\alpha=\alpha\widetilde{v}_\alpha$ и $W(v_\alpha,\widetilde{v}_\alpha)=W(u_\alpha,\widetilde{u}_\alpha)=1$. Поэтому на пространстве $T_0$ всегда можно определить линейный оператор $L$, положив $\varphi_E=L\psi_E=R^{-1/2}(E)\widehat{L}\psi_E$ $\forall E\neq\alpha$, $L\widetilde{u}_\alpha=\widehat{L}\widetilde{u}_\alpha=v_\alpha=u_\alpha^{-1}$ и $Lu_\alpha=\widetilde{v}_\alpha$. Оператор $L$ каждому элементу $\psi\in T_0$ ставит в соответствие единственный элемент $\varphi\in T_1$, где $T_1$ — пространство решений уравнения Шредингера с гамильтонианом $h_1$, причем $W(\varphi_E,\widetilde{\varphi}_E)=W(\psi_E,\widetilde{\psi}_E)$ $\forall\psi_E,\widetilde{\psi}_E\in T_0$.

Из (2) следует, что если $A_N(x)$ — функция вещественнозначная, то $\widehat{L}^{(N)+}\widehat{L}^{(N)}$, где $\widehat{L}^{(N)+}$ — формально сопряженный к $\widehat{L}^{(N)}$ оператор, будет дифференциальным порядка $2N$ оператором симметрии уравнения (1) и, следовательно, будет многочленом порядка $N$ от $h_0$.

Прежде чем перейти к доказательству основной теоремы, докажем три леммы. Первая из них представляет собой основу метода факторизации в квантовой механике (напр., [7]).

**Лемма 1.** *Оператор $\widehat{L}\equiv\widehat{L}^{(1)}$ тогда и только тогда является оператором преобразования Дарбу, когда $\widehat{L}^+\widehat{L}=h_0-\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.*

Доказательство леммы производится путем непосредственных вычислений.

Поскольку $\ker\widehat{L}^+=\mathrm{span}\{v_\alpha=u_\alpha^{-1}\}$, то на пространстве $T_1$ можно определить оператор $L^+$, положив $L^+\varphi_E=R^{-1/2}(E)\widehat{L}^+\varphi_E$ $\forall E\neq\alpha$ и $L^+\widetilde{v}_\alpha=\widehat{L}^+\widetilde{v}_\alpha=u_\alpha=v_\alpha^{-1}$, $L^+v_\alpha=\widetilde{u}_\alpha$. Операторы $L$ и $L^+$ осуществляют взаимно однозначное отображение пространств $T_0$ и $T_1$. Кроме того, $T_0=T_{01}\cup\mathrm{span}\{\widetilde{u}_\alpha\}$, $T_1=T_{11}\cup\mathrm{span}\{\widetilde{v}_\alpha\}$, $T_{01}=\{\psi:\psi=\widehat{L}^+\varphi,\ \varphi\in T_1\}$.

**Лемма 2.** *Оператор $\widehat{L}\equiv\widehat{L}^{(2)}$ всегда можно представить в виде $\widehat{L}=\widehat{L}_2\widehat{L}_1$, где $\widehat{L}_1=-u_1'/u_1+D$, $\widehat{L}_2=-v'/v+D$ — операторы преобразования Дарбу первого порядка, $u_1$ — функция преобразования, удовлетворяющая уравнению (1) при некотором собственном значении $C_1$, $v$ — функция преобразования для повторного преобразования Дарбу первого порядка, удовлетворяющая уравнению Шредингера с промежуточным потенциалом $V_1$, полученным из $V_0$ в результате преобразования Дарбу с оператором $\widehat{L}_1$ и соответствующая собственному значению $C_2$. Если $C_1$ и $C_2\in\mathbb{R}$, то они произвольны, а функции $u_1$ и $v$ вещественнозначные. Если $C_1$ и $C_2\in\mathbb{C}$, то $C_2=C_1^*$ и $v=\widehat{L}_1u_1^*$. Разность потенциалов $A_2(x)$ является вещественнозначной функцией.*

**Доказательство.** Аналогичное утверждение содержится в [4], однако для дальнейшего будут полезны некоторые детали доказательства и мы приведем его полностью.

Рассмотрим $\widehat{L}=a_0(x)+a_1(x)D+a_2(x)D^2$. Из (2) получаем систему уравнений для функций $a_i(x)$, $i=0,1,2$, и $A(x)\equiv A_2(x)$. Из этой системы следует, что $a_2=\mathrm{const}$, и без ущерба можно положить $a_2=1$. Кроме того, $A=2a_1'$. Исключив из системы $a_0$ и $A$, получим дифференциальное уравнение для функции $a_1$, которое без труда может быть дважды проинтегрировано с постоянными $2\alpha_1$ и $\alpha_2\in\mathbb{R}$. В результате получим дифференциальное уравнение

$$a_1^2V_0+a_1^2a_1'-\frac{1}{2}a_1a_1''+\frac{1}{4}a_1'^2-\frac{1}{4}a_1^4-\alpha_1a_1^2-\alpha_2=0. \tag{3}$$

Введем новую переменную $u_1$, положив

$$u_1'/u_1=\frac{1}{2}a_1'/a_1-\frac{1}{2}a_1-\sqrt{\alpha_2}/a_1. \tag{4}$$

Уравнение (3) при этом примет вид $-D^2u_1+(V_0-C_1)u_1=0$, где $C_1=\alpha_1-\sqrt{\alpha_2}$, т.е. функция $u_1$ является решением исходного уравнения Шредингера. Определив эту функцию, решаем уравнение (4). Введем новую функцию $v$, положив $a_1=-[\ln(vu_1)]'$. Из уравнения (4) получим уравнение для функции $v$

$$-D^2v+(V_1-C_2)v=0, \tag{5}$$

где $C_2 = \alpha_1 + \sqrt{\alpha_2}$, $V_1 = V_0 - 2(\ln u_1)_{xx}$. Отсюда ясно, что функция $v$ является решением уравнения Шредингера, полученного из уравнения (1) при помощи оператора преобразования $\widehat{L}_1$ с функцией преобразования $u_1$. Учитывая, что $a_1 = -[\ln(vu_1)]'$ и $a_0 = u_1'v'/(u_1v) - (\ln u_1)''$, получаем устанавливаемое леммой выражение для оператора $\widehat{L}$. Кроме того, при $C_2 \neq C_1$ имеем $v = \widehat{L}_1 u_2 = u_1^{-1} W(u_1, u_2)$, где $h_0 u_2 = C_2 u_2$. Для разности потенциалов получаем выражение

$$A = -2[\ln W(u_1, u_2)]''. \tag{6}$$

При $C_2 = C_1$ имеем $v = \beta_1 u_1^{-1} + \beta_2 \widetilde{v}$, где $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ и $u_1^{-1}$, $\widetilde{v}$ — линейно независимые решения уравнения (5). Вронскиан $W$ в формуле (6) необходимо заменить в этом случае на $\beta_1 + \beta_2 u_1 \widetilde{v}$. $\square$

Из лемм 1 и 2 сразу же получим

**Следствие.** $\widehat{L}^+\widehat{L} = (h_0 - C_1)(h_0 - C_2)$.

**Замечание 1.** При $C_1 = C_2 = C \in \mathbb{R}$ и $v = u_1^{-1}$ ($\beta_2 = 0$) оператор $\widehat{L} = -\widehat{L}_1^+\widehat{L}_1 = C - H_0$ — тривиальный оператор преобразования.

**Замечание 2.** В случае $C_2 \neq C_1$ промежуточную функцию $v$ можно исключить. При этом получим для $\widehat{L}$ известное [8] выражение, которое для цепочки $N$ преобразований имеет вид

$$\widehat{L}^{(N)} = \widehat{L}_N \widehat{L}_{N-1} \dots \widehat{L}_1 = W^{-1}(u_1, \dots, u_N) \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & 1 \\ u_1' & u_2' & \dots & D \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(N)} & u_2^{(N)} & \dots & D^N \end{vmatrix}.$$

Кроме того, $\widehat{L}^{(N)+}\widehat{L}^{(N)} = P(h_0) = \prod\limits_{i=1}^{N}(h_0 - C_i)$, где $h_0 u_i = C_i u_i$ и все $C_i$ различны. Если коэффициенты многочлена $P(x)$ принадлежат полю $\mathbb{R}$, то промежуточные потенциалы (при наличии комплексных нулей у $P(x)$) могут быть комплекснозначными, но результирующий потенциал (при соответствующем выборе функций преобразования) будет вещественнозначной функцией.

Пусть $A_1, \dots, A_N$ — нули многочлена $Q(h_0) = \widehat{L}^{(N)+}\widehat{L}^{(N)}$ степени $N$ с вещественными коэффициентами.

**Лемма 3.** *Если* $\widehat{L}^{(N)}$ *— оператор преобразования Дарбу* $N$*-го порядка, то* $\ker \widehat{L}^{(N)} \bigcap \bigcup\limits_{i=1}^{N} \ker(h_0 - A_i) \neq \emptyset$.

Если $\ker \widehat{L}^{(N)} \cap \ker(h_0 - A_1) \neq \emptyset$, то лемма доказана. Пусть

$$\ker \widehat{L}^{(N)} \cap \ker(h_0 - A_1) = \emptyset. \tag{7}$$

Обозначим $v_1 = \widehat{L}^{(N)} u_1$, $\widetilde{v}_1 = \widehat{L}^{(N)} \widetilde{u}_1$, где $u_1$, $\widetilde{u}_1$ — некоторый базис в пространстве $\ker(h_0 - A_1)$. В силу линейности оператора $\widehat{L}^{(N)}$ и предположения (7) $\operatorname{span}\{v_1, \widetilde{v}_1\}$ не может быть одномерным пространством. Тогда

$$\operatorname{span}\{v_1, \widetilde{v}_1\} = \ker(h_N - A_1) \subset \ker \widehat{L}^{(N)+}. \tag{8}$$

Используя предложение 2.1 из ([9], с. 39), представим оператор $\widehat{L}^{(N)+}$ в виде $\widehat{L}^{(N)+} = \widehat{L}^{(N-2)+}\widehat{L}_2^+\widehat{L}_1^+$, где $\widehat{L}_1^+ = \frac{d}{dx}\ln v_1 - D$, $\widehat{L}_2^+ = \frac{d}{dx}\ln\frac{W(v_1, \widetilde{v}_1)}{v_1} - D$. В силу условия (8) получаем $\widehat{L}^{(N)+} = -\widehat{L}^{(N-2)+}(h_N - A_1)$. Здесь $\widehat{L}^{(N-2)+}$ — оператор преобразования Дарбу $(N-2)$-го порядка от решений уравнения Шредингера с гамильтонианом $h_N$ к решениям этого же уравнения с гамильтонианом $h_0$. Но тогда $\widehat{L}^{(N)} = -\widehat{L}^{(N-2)}(h_0 - A_1^*)$, что при $A_1 \in \mathbb{R}$ противоречит (7), а при $A_1 \in \mathbb{C}$ приводит к утверждению леммы, поскольку в этом случае $A_1^*$ — также нуль многочлена $Q(x)$ $\square$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основную теорему.

**Теорема.** *Действие всякого нетривиального оператора $\widehat{L}^{(N)}$ эквивалентно результирующему действию некоторой цепочки $k$ $(\leq N)$ преобразований Дарбу первого порядка.*

Используя леммы 2 и 3 и соображения индукции, запишем представление $\widehat{L}^{(N)}=\widehat{L}_N\widehat{L}_{N-1}\ldots\widehat{L}_1$, что соответствует цепочке $N$ преобразований Дарбу первого порядка. Если мы находимся в условиях замечания 1, то какие-либо произведения двух рядом стоящих операторов цепочки дадут тривиальные операторы преобразования. В этом случае $\widehat{L}^{(N)} = \widehat{L}^{(k)}P(h_0)$, где $\widehat{L}^{(k)} = \widehat{L}_{t+k}\widehat{L}_{t+k-1}\ldots\widehat{L}_{t+1}$, $t$ — некоторое целое число и $P(x)$ — некоторый многочлен. Операторы преобразования $\widehat{L}^{(N)}$ и $\widehat{L}^{(k)}$ приводят к одной и той же разности потенциалов $A_N(x)$, что и доказывает теорему.

**Замечание 3.** Нами отмечена возможность появления цепочек из двух преобразований Дарбу первого порядка, приводящих к тривиальному оператору преобразования второго порядка (см. замечание 1 и лемму 3), которая может реализоваться для произвольного потенциала $V_0(x)$. Известны такие примеры потенциалов [1], для которых цепочки бо́льшей длины приводят к тривиальному оператору преобразования.

3. В заключение отметим, что оператор $\widehat{L}^{(k)^+}$, осуществляющий преобразование от решений уравнения Шредингера с потенциалом $V_N$ к решениям уравнения (1), может быть использован для конструирования оператора $\widehat{L}^{(k)^{-1}}$. Кроме того, если $A_1,\ldots,A_q$ — различные нули многочлена $P(h_0) = \widehat{L}^{(k)^+}\widehat{L}^{(k)}$, то для пространства $T_0$ выполняется разложение $T_0 = T_{01} \bigcup \bigcup\limits_{i=1}^{q} \operatorname{span}\{\widetilde{u}_i\}$, $\ker(h_0 - A_i) = \operatorname{span}\{u_i, \widetilde{u}_i\}$, $i = 1,\ldots,q$. Функции $u_i$ являются функциями преобразования для промежуточного оператора преобразования $\widehat{L}^{(q)} = \widehat{L}_q\widehat{L}_{q-1}\ldots\widehat{L}_1$. Аналогичное разложение можно записать для пространства $T_N$.

## Литература


1. Веселов А.П., Шабат А.Б. *Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера* // Функц. анализ и его прилож. – 1993. – Т. 27. – № 2. – С. 1–21.
2. Адлер В.Э. *О модификации метода Крама* // Теор. и матем. физика. – 1994. – Т. 101. – № 3. – С. 323–330.
3. Дегасперис А., Шабат А. *Построение безотражательных потенциалов с бесконечным дискретным спектром* // Теор. и матем. физика. – 1994. – Т. 100. – № 2. – С. 230–247.
4. Андрианов А.А., Иоффе М.В., Нишнианидзе Д.Н. *Полиномиальная суперсимметрия и динамические симметрии в квантовой механике* // Теор. и матем. физика. – 1995. – Т. 104. – С. 463–478.
5. Багров В.Г., Самсонов Б.Ф. *Преобразование Дарбу, факторизация, суперсимметрия в одномерной квантовой механике* // Теор. и матем. физика. – 1995. – Т. 104. – № 2 – С. 356–367.
6. Darboux G. *Sur une proposition relative aux équation linéaires* // Compt. Rend. Acad. Sci. – Paris, 1882. – V. 94. – P. 1456–1459.
7. Infeld T.E., Hull H. *The factorization method* // Rev. Mod. Phys. – 1951. – V. 53. – P. 21–68.
8. Крейн М.Г. *О континуальном аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов* // ДАН СССР. – 1957. – Т. 113. – № 5. – С. 970–973.
9. Беркович Л.М. *Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1989 – 192 с.



*Томский государственный университет*



*Поступили*
*первый вариант* 03.12.1996
*окончательный вариант* 01.03.1999