ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 517.956

А.Г. ЛОСЕВ

О ВЗАИМОСВЯЗИ НЕКОТОРЫХ ЛИУВИЛЛЕВЫХ ТЕОРЕМ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Классическая теорема Лиувилля утверждает, что всякое ограниченное решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

в R^n является тождественной постоянной. Заметим, что множество многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции, достаточно обширно. Кроме того, известно, что всякое ограниченное решение уравнения

$$\Delta u - \mu u = 0 \tag{2}$$

в R^n, где $\mu = \mathrm{const} > 0$, есть тождественный нуль.

В данной статье рассматриваются ограниченные решения уравнений (1) и (2) на некоторых римановых многообразиях; в этом случае Δ — оператор Лапласа-Бельтрами. А.А. Григорьян обратил внимание автора на следующий вопрос: на каких многообразиях выполнение теоремы Лиувилля для уравнения (1) влечет выполнение теоремы Лиувилля для уравнения (2). Заметим (см. [1]), что существование ненулевого ограниченного решения уравнения (2) эквивалентно стохастической неполноте рассматриваемого многообразия (многообразие стохастически полно, если винеровский процесс на нем единственен, что эквивалентно тому, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ единственно в классе ограниченных функций).

В данной статье изучается взаимосвязь лиувиллевых теорем для уравнений (1) и (2) на римановых многообразиях, устроенных некоторым специальным образом.

Пусть M — полное риманово многообразие без края, представимое в виде объединения $M = B \bigcup D$, где B — некоторый компакт, а D изометрично прямому произведению $\mathrm{R}_+ \times S$ (где $\mathrm{R}_+ = (0, \infty)$, а S — компактное риманово многообразие) с метрикой

$$ds^2 = h^2(r)dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$

Здесь $h(r)$ и $g(r)$ — положительные, гладкие на R_+ функции, а $d\theta^2$ — метрика на S. Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство ($h(r) = 1$, $g(r) = r$), пространство Лобачевского ($h(r) = 1$, $g(r) = \mathrm{sh}(r)$), поверхность, полученная вращением графика функции $f(r)$ вокруг луча Or в R^n ($h(r) = \sqrt{1 + |f'(r)|^2}$, $g(r) = f(r)$).

Замечание 1. В работе [2] показано, что следующие условия эквивалентны:

а) на M существует ограниченное нетривиальное решение уравнения (2), где $\mu \geq 0$;

б) на $M \setminus B$ существует ограниченное нетривиальное решение краевой задачи

$$\Delta u - \mu u = 0 \text{ в } M \setminus B \ (\mu \geq 0), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial B} = 0. \tag{3}$$

Найдем вначале условия выполнения теоремы Лиувилля для уравнения (2) на M.

Лемма 1. *Для того чтобы всякое ограниченное решение уравнения* (2) *на* M *являлось тождественным нулем, необходимо и достаточно, чтобы*

$$I=\int_{r_0}^{\infty}\frac{h(t)}{g^{n-1}(t)}\Bigl(\int_{r_0}^{t}h(z)g^{n-1}(z)dz\Bigr)dt=\infty.$$

Доказательство. Предположим вначале, что на M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения (2). Тогда, учитывая замечание 1, получаем, что на D существует нетривиальное ограниченное решение $u(r,\theta)$ уравнения (2), для которого выполнено условие (3).

Заметим (см., напр., [3]), что в координатах (r,θ) оператор Лапласа-Бельтрами на D имеет вид

$$\Delta=\frac{1}{h^2(r)}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{h^2(r)}\Bigl((n-1)\frac{g'(r)}{g(r)}-\frac{h'(r)}{h(r)}\Bigr)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{g^2(r)}\Delta_\theta, \tag{4}$$

где Δ_θ — внутренний лапласиан на S.

Пусть $\{w_i\}$ — ортонормированный базис в $L^2(S)$, состоящий из собственных функций оператора Лапласа Δ_θ, а λ_i — соответствующие собственные числа. Тогда для любого r имеет место разложение в ряд Фурье

$$u(r,\theta)=\sum_{i=0}^{\infty}v_i(r)w_i(\theta), \tag{5}$$

где

$$\Delta_\theta w_i(\theta)+\lambda_i w_i(\theta)=0$$

и

$$v_i(r)=\int_S u(r,\theta)w_i(\theta)d\theta. \tag{6}$$

С другой стороны, подставляя в (4) функцию $u_i(r,\theta)=v_i(r)w_i(\theta)$, получаем, что для любого номера i функция $v_i(r)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$v''(r)+\Bigl[(n-1)\frac{g'(r)}{g(r)}-\frac{h'(r)}{h(r)}\Bigr]v'(r)-\Bigl[\lambda\frac{h^2(r)}{g^2(r)}+\mu h^2(r)\Bigr]v(r)=0, \tag{7}$$

где $\lambda=\lambda_i$.

Докажем сначала, что в условиях леммы $v_i(r)\equiv 0$ для любого номера $i\ge 1$. Из ограниченности $u(r,\theta)$ и (6) следует ограниченность $v_i(r)$ для любого номера i. Дважды интегрируя уравнение (7), получаем равенство

$$\begin{aligned}v_i(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{h(t)}{g^{n-1}(t)}\Bigl(\int_{r_0}^{t}[\lambda_i+\mu g^2(z)]g^{n-3}(z)h(z)v_i(z)dz\Bigr)dt+\\ +\frac{v_i'(r_0)g^{n-1}(r_0)}{h(r_0)}\int_{r_0}^{r}\frac{h(t)}{g^{n-1}(t)}dt+v_i(r_0)\end{aligned} \tag{8}$$

для любых $r>r_0$.

Пусть $D\cap\overline{B}$ — сечение D гиперплоскостью $r=r_0$. Тогда, учитывая равенство (5) и геометрическое строение M, заключаем, что условие (3) эквивалентно условию $v_i'(r_0)=0$ для всех i, а уравнение (8) примет вид

$$v_i(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{h(t)}{g^{n-1}(t)}\Bigl(\int_{r_0}^{t}[\lambda_i+\mu g^2(z)]g^{n-3}(z)h(z)v_i(z)dz\Bigr)dt+v_i(r_0). \tag{9}$$

Заметим, что из расходимости интеграла I легко следует

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{h(t)}{g^{n-1}(t)}\Bigl(\int_{r_0}^{t}[\lambda_i+\mu g^2(z)]g^{n-3}(z)h(z)dz\Bigr)dt=\infty. \tag{10}$$

Учитывая условие (10), легко показать, что $|v_i(r)| \to \infty$ при $r \to \infty$, если $v_i(r_0) \neq 0$ (аналогичные рассуждения см. в [3]), что противоречит ограниченности $v_i(r)$. Таким образом, получаем $v_i(r_0) = 0$, $v_i'(r_0) = 0$. Тогда по теореме единственности $v_i(r) \equiv 0$. Учитывая равенство (5), получаем $u(r, \theta) \equiv 0$, что противоречит начальному предположению о существовании нетривиального решения.

Пусть теперь выполнено условие $I < \infty$. Тогда, интегрируя уравнение (8) с краевыми условиями $v_i(r_0) = 1$, $v_i'(r_0) = 0$, получаем

$$v_i'(r) = \frac{h(r)}{g^{n-1}(r)} \int_{r_0}^{r} [\lambda_i + \mu g^2(z)] g^{n-3}(z) h(z) v_i(z) dz.$$

Пусть $i = 0$. Учитывая, что при заданных граничных условиях функция $v_0(r)$ монотонно возрастает, получаем неравенство

$$v_0'(r) \leq \mu \frac{h(r) v_0(r)}{g^{n-1}(r)} \int_{r_0}^{r} g^{n-1}(z) h(z) dz.$$

Интегрируя последнее неравенство, имеем

$$v_0(r) \leq \exp\left\{ \mu \int_{r_0}^{r} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{r_0}^{t} g^{n-1}(z) h(z) dz \right) dt \right\}.$$

Если $I < \infty$, то получаем ограниченное на D нетривиальное решение уравнения (2) $u(r, \theta) = v_0(r)$ с условием (3). Учитывая замечание 1, заключаем, что на M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения (2). $\square$

Следующее утверждение устанавливает связь между лиувиллевыми теоремами для уравнений (1) и (2) на многообразии M.

Теорема 1. *Пусть на многообразии M любая ограниченная гармоническая функция является тождественной постоянной. Тогда всякое ограниченное решение уравнения (2) на M равно нулю.*

Доказательство теоремы. Известно (см. [2]), что всякая ограниченная гармоническая функция на M является тождественной постоянной тогда и только тогда, когда

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{r_0}^{t} h(z) g^{n-3}(z) dz \right) dt = \infty. \tag{11}$$

Учитывая это, докажем, что из (11) следуют условия леммы 1.

Случай, когда

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} dt = \infty,$$

очевиден.

Пусть на M выполнено условие

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} dt < \infty. \tag{12}$$

Пусть вначале $n \geq 3$. Предположим противное, т. е. выполнены условия (11) и (12), но

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{r_0}^{t} h(z) g^{n-1}(z) dz \right) dt < \infty. \tag{13}$$

Пусть $R^+(t) = \{r \in (r_0, t) : g(r) \geq 1\}$ и $R^-(t) = \{r \in (r_0, t) : 0 < g(r) < 1\}$. Ясно, что

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{R^+(t)} h(z) g^{n-3}(z) dz \right) dt < \int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{R^+(t)} h(z) g^{n-1}(z) dz \right) dt < \infty,$$

где последнее неравенство следует из (13). Тогда из условия (11) получаем

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \Big(\int_{R^-(t)} h(z) g^{n-3}(z) dz \Big) dt = \infty. \tag{14}$$

С другой стороны, для любого $A > r_0$ выполнено

$$\int_{r_0}^{A} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \Big(\int_{R^-(t)} h(z) g^{n-3}(z) dz \Big) dt =$$
$$= \int_{r_0}^{A} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \Big(\int_{R^-(t)} h^{\frac{1}{2}}(z) g^{\frac{1-n}{2}}(z) h^{\frac{1}{2}(z)} g^{\frac{3n-7}{2}}(z) dz \Big) dt \le$$
$$\le \frac{1}{2} \Big[\int_{r_0}^{A} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \Big(\int_{R^-(t)} \frac{h(z)}{g^{n-1}(z)} dz \Big) dt + \int_{r_0}^{A} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \Big(\int_{R^-(t)} h(z) g^{3n-7}(z) dz \Big) dt \Big].$$

Учитывая, что при $z \in R^-(t)$ $\ g^{3n-7}(z) \le g^{n-1}(z)$ $(n \ge 3)$, и переходя к пределу при $A \to \infty$, получаем

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \Big(\int_{R^-(t)} h(z) g^{n-3}(z) dz \Big) dt \le \frac{1}{2} \Big[\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \Big(\int_{r_0}^{t} \frac{h(z)}{g^{n-1}(z)} dz \Big) dt +$$
$$+ \int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \Big(\int_{r_0}^{t} h(z) g^{n-1}(z) dz \Big) dt \Big] < \infty,$$

что противоречит условию (14). В случае $n = 2$ условия (12) и (13) на M никогда одновременно не выполняются. □

Замечание 2. Из выполнения теоремы Лиувилля для уравнения (2) не следует справедливость аналогичного утверждения для уравнения (1). Примером такого многообразия может служить пространство Лобачевского, что легко доказать приведенным выше способом.

Замечание 3. Существуют многообразия, на которых не выполняется теорема Лиувилля ни для уравнения (1), ни для уравнения (2), например, описанное выше многообразие M с $h(r) = 1$, $g(r) = r^2 e^{r^3}$ (это легко показывается приведенным выше способом).

Рассмотрим теперь несколько иные многообразия. А именно, пусть риманово многообразие R представимо в виде прямого произведения $R = M \times K$, где K — компактное риманово многообразие, а M описано выше. Выясним условия справедливости теоремы Лиувилля для уравнений (1) и (2) на R. Докажем вначале более общее утверждение.

Лемма 2. *Пусть риманово многообразие R_1 представимо в виде прямого произведения $R_1 = H \times K$, где K — компактное риманово многообразие, и пусть H таково, что при $\lambda \ge 0$ всякое ограниченное решение уравнения*

$$\Delta v - \lambda v = 0 \tag{15}$$

равно константе. Тогда на многообразии R_1 всякое ограниченное решение уравнения

$$\Delta u - \mu u = 0, \tag{16}$$

где $\mu \ge 0$, равно константе.

Доказательство. Пусть $z \in R_1$. Тогда $z = (x, y)$, где $x \in H$, $y \in K$. Пусть $w_i(y)$ — собственная функция внутреннего оператора Лапласа Δ_y на K, соответствующая i-му собственному числу компакта K с условием нормировки

$$\int_K w_i^2(y) dy = 1.$$

Тогда для любого $x \in H$ имеет место разложение в ряд Фурье (в смысле $L^2(K)$)

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x) w_i(y),$$

где $c_i(x) = \int\limits_K u(x,y) w_i(y) dy$ и $\Delta_y w_i(y) + \lambda_i w_i(y) = 0$.

Пусть $u(x,y)$ — решение уравнения (16) на R_1. Тогда, учитывая $\Delta u = \Delta_x u + \Delta_y u$ (где Δ_x — внутренний лапласиан на H), получаем $\Delta_x u = \Delta u - \Delta_y u$, или $\Delta_x u = \mu u - \Delta_y u$. В таком случае справедливы равенства

$$\Delta_x c_i(x) = \int_K \Delta_x u(x,y) w_i(y) dy = \int_K (\mu u - \Delta_y u) w_i(y) dy =$$
$$= \mu \int_K u(x,y) w_i(y) dy - \int_K \Delta_y u(x,y) w_i(y) dy = \mu c_i(x) - \int_K u(x,y) \Delta_y w_i(y) dy =$$
$$= \mu c_i(x) + \lambda_i \int_K u(x,y) w_i(y) dy = (\mu + \lambda_i) c_i(x).$$

Таким образом, на H выполнено $\Delta_x c_i(x) - (\mu + \lambda_i) c_i(x) = 0$. Так как из ограниченности $u(x,y)$ следует ограниченность $c_i(x)$, то $c_1 = c_2 = \cdots = 0$. Если $\mu > 0$, то $c_0 = 0$, а если $\mu = 0$, то $c_0 \equiv \text{const}$. $\square$

Заметим, что идея данного доказательства содержится в работе [2].

Справедлива

Теорема 2. *Пусть для M выполняется условие* (11). *Тогда на $R = M \times K$ всякое ограниченное решение уравнения* (1) *равно константе, а всякое ограниченное решение уравнения* (2) *равно нулю.*

Доказательство следует из утверждения в начале доказательства теоремы 1 и леммы 2.

Замечание 4. Точно так же можно показать, что если на M выполнены условия леммы 1, то на R всякое ограниченное решение уравнения (1) равно константе, а всякое ограниченное решение уравнения (2) равно нулю.

Литература

1. Davies E.B. *L^1 properties of second order elliptic operators* // Bull. London Math. Soc. – 1985. – V. 17. – № 5. – P. 417–436.
2. Григорьян А.А., Надирашвили Н.С. *Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи* // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 5. – С. 25–33.
3. Лосев А.Г. *Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 12. – С. 15–24.

Волгоградский государственный университет

Поступила
03.05.1995