И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

УДК 514.16

Т.И. ГАЙСИН

О КОМПЛЕКСЕ БАЗОВЫХ ФОРМ СЛОЕНИЯ

В работе доказывается аналог теоремы Сарда для проектируемых отображений компактных многообразий со слоением. Данные отображения представляют интерес в теории многообразий над локальными алгебрами [1], поскольку если отображение многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ является $\mathbb{A}$-дифференцируемым, то его вещественная часть есть проектируемое относительно канонического слоения отображение [2].

Все многообразия и отображения принадлежат классу C^∞.

Вначале приведем необходимые в дальнейшем определения проектируемого отображения и базовой формы.

Пусть M — многообразие со структурой слоения произвольной коразмерности [3]. Отображение $g : M \to N$, где N — некоторое многообразие, называется проектируемым, если оно постоянно на слоях слоения.

Пусть (Ω, d) — комплекс дифференциальных форм на M. Форма $\omega \in \Omega$ называется базовой, если для любого слоя L слоения имеют место равенства

$$i_v\omega(x) = 0, \;\; i_v(d(\omega))(x) = 0 \;\; \forall v \in T_xL.$$

В карте, адаптированной к структуре слоения, базовая форма имеет вид

$$\omega_{i_1\dots i_k}(x^1, \dots, x^q)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

где q — коразмерность слоения, $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, q$, $x^{i_1}, \dots, x^{i_k}$ — базовые координаты.

Пусть $\Omega_B \subset \Omega$ — подкомплекс базовых форм [1]. Получаем следующую короткую точную последовательность комплексов:

$$0 \to \Omega_B \to \Omega \to \frac{\Omega}{\Omega_B} \to 0.$$

Перейдем к длинной точной последовательности групп когомологий

$$0 \to H^0_B \to H^0 \to H^0_{/B} \to H^1_B \xrightarrow{i} H^1 \to \cdots , \tag{1}$$

где H^* суть группы когомологий комплекса де Рама, H^*_B — группы когомологий комплекса (Ω_B, d), $H^*_{/B}$ — группы когомологий фактор-комплекса $(\frac{\Omega}{\Omega_B}, d)$.

Лемма 1. *В длинной точной последовательности* (1) $i : H^1_B \to H^1$ *есть мономорфизм.*

В следующей лемме мы в удобной для дальнейшего форме приводим известные факты [3].

Лемма 2. *Пусть M — произвольное многообразие со слоением, $p \in L$, и пусть в некоторой адаптированной к слоению карте (U, x^A), $p \in U$, найдется нестационарная последовательность локальных слоев $Q_i \subset L' \cap U$ слоя L', сходящаяся к некоторому локальному слою $Q_p \subset L \cap U$ слоя L, проходящему через точку p. Тогда для любой другой точки $\widetilde{p} \in L$ и адаптированной к слоению карты $(\widetilde{U}, \widetilde{x}^A), \widetilde{p} \in \widetilde{U}$, найдется нестационарная последовательность локальных слоев $\widetilde{Q}_i \subset L' \cap \widetilde{U}$ слоя L', сходящаяся к некоторому локальному слою $\widetilde{Q}_{\widetilde{p}} \subset L \cap \widetilde{U}$ слоя L, проходящему через точку $\widetilde{p}$.*

Если пара глобальных слоев $L', L \subset M$ удовлетворяет условиям леммы 2, будем говорить, что слой L' наматывается на слой L.

Лемма 3. *Пусть M — многообразие со структурой слоения произвольной коразмерности q, $g : M \to R^q$ — проектируемое отображение, т. е. g постоянно на слоях слоения. Если слой L' наматывается на слой L, то значение g на L' равно значению g на L, и дифференциал отображения g в точках слоя L удовлетворяет условию* $\operatorname{rank}\{d(g)\}|_L < q$.

В частности, если $q = 1$ и $g : M \to R$ есть базовая функция, то значение g на L' равно значению g на L и дифференциал функции g в точках слоя L равен нулю.

Для любой точки $p \in L$ из условия леммы следует, что существует последовательность точек a_i, лежащая в слое L' и сходящаяся к p. Поэтому в адаптированной к слоению карте локальные слои слоя $L' \supset Q_{a_i}$ сходятся к локальному слою L_p слоя L. Из непрерывности g следует, что $g(a_i) = g(p)$.

Пусть x_i^j — трансверсальные координаты точек a_i, x_0^j — трансверсальные координаты точки p, $j = 1, \ldots, q$, тогда $x_i^j \to x_0^j$. Если в точке x_0^j имеет место равенство $\operatorname{rank}\{d(g)\} = q$, то по теореме об обратной функции существует окрестность V точки x_0^j, на которой g является диффеоморфизмом на $g(V)$, что невозможно, ибо из $g(x_i^j) = g(x_0^j)$ следует, что не существует открытой окрестности точки x_0^j, на которой g инъективно.

Теорема 1. *Пусть M — компактное связное многообразие со структурой слоения коразмерности q. Если проектируемое отображение $g : M \to R^q$ удовлетворяет условию* $\operatorname{rank}\{d(g)\}|_L < q$ *для любого компактного в индуцированной топологии слоя L, то образ g имеет меру нуль и* $\operatorname{rank}\{d(g)\} < q$ *в каждой точке из M.*

В частности, если $q = 1$, то любая базовая функция на M, дифференциал которой обращается в нуль на слоях, компактных в индуцированной топологии, постоянна.

Пусть $M_1 = \{p \in M \mid \operatorname{rank}\{d(g)\}|_p < q\}$. Для любого значения a функции g положим $K(a) = M_1 \cap g^{-1}(a)$. Покажем, что $K(a) \neq \emptyset$. Условия теоремы позволяют рассматривать только некомпактные слои слоения. Действительно, из некомпактности L следует, что существует последовательность $\{p_i \in L\}$ такая, что $p_i \to p \notin L$, $p \in L'$. Из леммы 3 следует, что $\operatorname{rank}\{d(g)|_p\} < q$, следовательно, $\operatorname{rank}\{d(g)|_{L'}\} < q$. Итак, все значения отображения g являются критическими. Из теоремы Сарда следует, что мера образа g равна нулю.

Если $q = 1$, то из линейной связности M следует, что образ линейно связен, а т. к. он имеет меру нуль, то не содержит интервалов. Поэтому образ состоит из одной точки, т. е. g — постоянная функция.

С помощью теоремы Уитни о вложении из данной теоремы получаем

Следствие 1. Пусть M — компактное связное многообразие со структурой слоения коразмерности q, N — компактное многообразие произвольной размерности. Если проектируемое отображение $g : M \to N$ удовлетворяет условию $\operatorname{rank}\{d(g)\}|_L < q$ для любого компактного в индуцированной топологии слоя L, то $\operatorname{rank}\{d(g)\} < q$ в каждой точке из M.

Далее полученные результаты применим в случае, когда множество слоев слоения, компактных в индуцированной топологии, не более чем счетно.

Теорема 2. *Пусть M — компактное многообразие со структурой слоения коразмерности q. Если множество компактных в индуцированной топологии слоев слоения не более чем счетно (в частности, компактных в индуцированной топологии слоев нет), то любое проектируемое отображение $g : M \to R^q$ имеет образ меры нуль и* $\operatorname{rank}\{d(g)\} < q$ *в каждой точке из M.*

В частности, если $q = 1$, то любая базовая функция на M постоянна.

Пусть M' — множество, состоящее из точек, содержащихся в компактных в индуцированной топологии слоях слоения. Множество слоев, содержащихся в M', не более чем счетно. Поскольку g постоянно на слоях слоения, множество $g(M')$ счетно и, значит, имеет меру нуль. Из доказательства теоремы 1 следует, что все остальные значения $g(M \setminus M')$ будут критическими. Из теоремы Сарда получаем, что множество $g(M) = g(M \setminus M_1) \cup g(M_1)$ имеет меру нуль.

Следствие 2. Пусть M — компактное многообразие со структурой слоения коразмерности q, N — компактное многообразие. Если множество компактных в индуцированной топологии слоев слоения на M не более чем счетно (в частности, компактных в индуцированной топологии слоев нет), то все проектируемые отображения $g : M \to N$ имеют $\operatorname{rank}\{d(g)\} < q$ в каждой точке из M.

Доказательство проводится с помощью теоремы Уитни о вложении.

Следствие 3. Пусть M — компактное связное многообразие со структурой слоения коразмерности 1. Если множество компактных в индуцированной топологии слоев слоения не более чем счетно (в частности, компактных в индуцированной топологии слоев нет), то $\dim \Omega^1_B \leq \dim H^1(M) < \infty$.

Так как в данном случае $\Omega^2_B = 0$, то для любой $\omega \in \Omega^1_B$ имеем $d\omega = 0$, поэтому определен класс когомологий $[\omega] \in H^1_B$. Но $\Omega^0_B \cong R$, значит, для любых $\omega_1, \omega_2 \in [\omega]$ имеем $\omega_1 = \omega_2$. Поэтому $H^1_B \cong \Omega_1(M)$, и в силу леммы 1 и конечномерности когомологий де Рама компактного многообразия имеем $\dim \Omega^1_B = \dim H^1_B \leq \dim H^1(M) < \infty$.

Следствие 4. Пусть M — компактное многообразие со структурой слоения коразмерности q, причем множество компактных в индуцированной топологии слоев слоения не более чем счетно (в частности, возможно пусто). Если $G : M \to N$ — погружение G многообразия M в произвольное расслоение $\pi : N \to B$, являющееся морфизмом слоений, то $\operatorname{rank}\{d(\pi \circ G)\} < q$ в каждой точке из M.

Литература

1. Вишневский В.В, Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 264 с.
2. Шурыгин В.В. *Расслоения струй как многообразия над алгебрами* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1987. –Т. 19. – С. 3–22.
3. Molino P. *Riemannian foliations.* – Boston–Basel: Birkhäuser, 1988. – Progress in Math. – V. 73. – 339 p.

Казанский государственный университет

Поступила
11.06.1999