ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 10 (437)

УДК 517.988.8

С.Е. ЖЕЛЕЗОВСКИЙ

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ И О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА БУБНОВА–ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Введение

В данной статье рассматривается задача Коши для квазилинейного эволюционного уравнения второго порядка:

$$Q[u,t] \equiv u''(t) + K(t)u'(t) + A(t)u(t) + B(t,u(t)) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0^{(0)}, \quad u'(0) = u_1^{(0)}. \tag{1.2}$$

Здесь u — искомая функция, отображающая отрезок $[0,T]$ числовой оси $\mathbb{R}$ в вещественное сепарабельное гильбертово пространство H; $K(t)$, $A(t)$ $(t \in [0,T])$ — линейные операторы, действующие в H, причем все операторы $A(t)$ самосопряженные и положительно-определенные; B — нелинейный оператор; $u_0^{(0)}$, $u_1^{(0)}$ — заданные элементы пространства H. Условия на операторные коэффициенты и начальные данные задачи (1.1), (1.2) подробно сформулированы ниже в п. 2. В класс задач, для которых эти условия выполнены, входят, в частности, некоторые начально-краевые задачи математической физики, получаемые на основе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского.

Основной целью статьи является получение для задачи (1.1), (1.2) априорной оценки погрешности метода Бубнова–Галёркина (МБГ) при специальном выборе базиса (в качестве базисных элементов МБГ используются собственные элементы вспомогательного оператора, сходного ([1], с. 21) и образующего острый угол ([2]) с каждым из операторов $A(t)$). Оценки такого типа ранее были получены для эволюционных задач, содержащих вторую производную искомой функции по времени, в работах [3]–[5], для стационарных задач и эволюционных задач первого порядка по времени – в ряде работ, из которых отметим [6]–[9].

Наряду с оценкой погрешности МБГ для задачи (1.1), (1.2) устанавливается результат об однозначной разрешимости, необходимый для полноты и корректности изложения. В имеющейся литературе такие результаты для рассматриваемой задачи или для задач более общего вида отсутствуют. Для нелинейных задач в абстрактном гильбертовом пространстве, подобных рассматриваемой, результат о существовании обобщенного решения получен в [10] и результат об устойчивости, из которого следует единственность решения, — в [11].

Отметим, что метод доказательства существования решения, принятый в данной работе, отличается от известного метода компактности, обычно используемого совместно с МБГ при исследовании задач, подобных (1.1), (1.2) (см., напр., [10], а также [12], гл. I). Именно, в нашей работе устанавливается априорная оценка разности между любыми двумя приближенными решениями рассматриваемой задачи, построенными по МБГ, доставляющая результат о сильной сходимости последовательности приближенных решений и соответственно о существовании точного решения. Таким образом, доказательство существования решения совмещается с выводом оценки погрешности МБГ, которая в данном случае получается предельным переходом в оценке разности между двумя приближенными решениями. Напомним, что при использовании обычного метода компактности непосредственно устанавливается только слабая сходимость последовательности приближенных решений или некоторой ее подпоследовательности.

Пусть X и Y — вещественные банаховы пространства с нормами $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$ соответственно. В дальнейшем используются следующие обозначения: $\mathcal{L}(X,Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов $L : X \to Y$ с нормой $\|L \mid \mathcal{L}(X,Y)\| = \sup\limits_{u\in X\setminus\{0\}} |Lu|_Y |u|_X^{-1}$; $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$; $\mathcal{B}(X)$ — пространство симметричных билинейных форм $b : X^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\|b \mid \mathcal{B}(X)\| \equiv \sup\limits_{u,v\in X\setminus\{0\}} b(u,v)|u|_X^{-1}|v|_X^{-1} < \infty$; $L^p(0,T;X)$ $(1 \le p \le \infty,\ T > 0)$ — пространство сильно измеримых функций $u : [0,T] \to X$, удовлетворяющих условию

$$\|u \mid L^p(0,T;X)\| \equiv \left(\int_0^T |u(t)|_X^p\,dt\right)^{1/p} < \infty$$

(при $p = \infty$ вместо этого требуется $\|u \mid L^\infty(0,T;X)\| \equiv \operatorname*{sup\,ess}\limits_{0\le t\le T} |u(t)|_X < \infty$); $L(0,T;X) = L^1(0,T;X)$; $L(0,T) = L(0,T;\mathbb{R})$; $C([0,T];X)$ — пространство функций $u : [0,T] \to X$, непрерывных на $[0,T]$, с нормой $\|u \mid C([0,T];X)\| = \max\limits_{0\le t\le T} |u(t)|_X$; $C([0,T]) = C([0,T];\mathbb{R})$; $C^k([0,T];X)$ $(k \in \mathbb{N})$ — пространство функций, отображающих $[0,T]$ в X и k раз непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$. Производные, не существующие в обычном смысле, понимаются в данной работе согласно следующему *определению*: функция $v : [0,T] \to X$ называется обобщенной производной функции $u : [0,T] \to X$ (т. е. $v = u'$), если она принадлежит $L(0,T;X)$ и $u(t) = u(0) + \int\limits_0^t v(\tau)d\tau$ для всех $t \in [0,T]$, $u \in C(0,T;H)$, где интеграл понимается в смысле Бохнера. Запись $u' \in L^p(0,T;X)$ всюду ниже означает, что обобщенная производная функции $u : [0,T] \to X$ существует и принадлежит $L^p(0,T;X)$ (в частности, запись $u' \in L(0,T;X)$ означает только то, что обобщенная производная u' существует). Через $\mathbb{R}_+$ будем обозначать множество всех неотрицательных действительных чисел.

2. Условия на операторные коэффициенты и данные рассматриваемой задачи

Для вещественного сепарабельного гильбертова пространства H, в котором рассматривается задача (1.1), (1.2), обозначим через $(\cdot,\cdot\cdot)_H$ и $|\cdot|_H$ скалярное произведение и норму этого пространства соответственно. Все операторы $K(t)$ $(t \in [0,T])$, участвующие в уравнении (1.1), принадлежат $\mathcal{L}(H)$ и удовлетворяют следующему условию.

Условие (K). Функция $t \to K(t)$ имеет на $[0,T]$ обобщенную производную $t \to K'(t)$ (из $L(0,T;\mathcal{L}(H))$).

В дальнейшем будет использоваться обозначение

$$k_0 = \max_{0\le t\le T} \|K(t) \mid \mathcal{L}(H)\|.$$

Все операторы $A(t)$ $(t \in [0,T])$, участвующие в (1.1), определены на одном и том же линейном множестве $D(A)$, плотном в H, и принимают значения в H. Все они неограниченные, самосопряженные и положительно-определенные. Обозначим через $a(t,\cdot,\cdot\cdot)$ скалярное произведение энергетического пространства ([1], с. 21), порожденного оператором $A(t)$. Далее предположим, что существует самосопряженный положительно-определенный оператор A_0, действующий в H, определенный на $D(A)$ (т. е. сходный с каждым из операторов $A(t)$)[1], имеющий вполне непрерывный в H обратный оператор A_0^{-1} и образующий с каждым из операторов $A(t)$ острый угол.

[1]Поскольку операторы A_0 и $A(t)$ сходные, все операторы $A(t)A_0^{-1}$, $A_0(A(t))^{-1}$, $(A(t))^{1/2}A_0^{-1/2}$, $A_0^{1/2}(A(t))^{-1/2}$ ограничены в H ([1], с. 22–23).

Энергетическое пространство, порожденное оператором A_0, его скалярное произведение и норму обозначим соответственно через H_0, $(\cdot,\cdot\cdot)_0$, $|\cdot|_0$. Предполагается, что операторы $A(t)$ ($t \in [0,T]$) и A_0 удовлетворяют следующим четырем условиям.

Условие (A1). Существует константа $a_0 > 0$ такая, что для всех $t \in [0,T]$

$$\|A(t)A_0^{-1} \mid \mathcal{L}(H)\| \leq a_0.$$

Условие (A2). Существует константа $a_1 > 0$ такая, что для всех $t \in [0,T]$

$$\|A_0^{1/2}(A(t))^{-1/2} \mid \mathcal{L}(H)\| \leq a_1.$$

Условие (A3). Существует константа $a_2 > 0$ такая, что для всех $t \in [0,T]$, $u \in D(A)$

$$(A(t)u, A_0 u)_H \geq a_2 |A_0 u|_H^2.$$

Условие (A4). Функция $t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$ принадлежит $C^1([0,T];\mathcal{B}(H_0))$ и имеет на $[0,T]$ обобщенную производную второго порядка (из $L(0,T;\mathcal{B}(H_0))$).

Ниже будут использоваться обозначения: $t \to a'(t,\cdot,\cdot\cdot)$ — производная первого порядка функции $t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$;

$$\alpha_0 = \max_{0 \leq t \leq T} \|a'(t,\cdot,\cdot\cdot) \mid \mathcal{B}(H_0)\|.$$

Нелинейный оператор B действует из $[0,T] \times H_0$ в H и удовлетворяет следующему условию.

Условие (B). В каждой точке $(t,u) \in [0,T] \times H_0$ существует производная Фреше $B'[t,u] \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \oplus H_0, H)$ оператора B, причем существуют функции $\beta_i : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ($i = 0,1$) такие, что для почти всех (п. в.) $t \in [0,T]$ функции $\beta_i(t,\cdot)$ ($i = 0,1$) неубывающие на $\mathbb{R}_+$, для любого $\xi \in \mathbb{R}_+$ $\beta_i(\cdot,\xi) \in L(0,T)$ ($i = 0,1$) и $|B'[t,u](\tau,v)|_H \leq \beta_0(t,|u|_0)|\tau| + \beta_1(t,|u|_0)|v|_0$ для всех $(t,u) \in [0,T] \times H_0$, $(\tau,v) \in \mathbb{R} \times H_0$.

Кроме того, предполагается, что существует некоторый функционал $\Phi : [0,T] \times D(A) \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющий следующим условиям.

Условие (Ф1). Существует неубывающая функция $\varphi_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $u \in D(A)$

$$\Phi(0,u) \leq \varphi_0(|A_0 u|_H).$$

Условие (Ф2). Существует неубывающая функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $(t,u) \in [0,T] \times D(A)$ $|u|_0 \leq \varphi(\Phi(t,u))$.

В условии (Ф3) подразумевается, что на $D(A)$ введено скалярное произведение $(\cdot,\cdot\cdot)_{D(A)} = (A_0\cdot, A_0\cdot\cdot)_H$.

Условие (Ф3). В каждой точке $(t,u) \in [0,T] \times D(A)$ существует производная Фреше $\Phi'[t,u] \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \oplus D(A), \mathbb{R})$ функционала Φ, причем существуют функции $\varphi_i : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ ($i = 1,2,3$), принадлежащие $L(0,T)$ и такие, что для всех $(t,u) \in [0,T] \times D(A)$, $v \in D(A)$

$$\Phi'[t,u](1,v) - a(t,u,v) - (B(t,u),v)_H \leq \varphi_1(t) + \varphi_2(t)|v|_H^2 + \varphi_3(t)\Phi(t,u).$$

На начальные данные (1.2) наложим условия $u_0^{(0)} \in D(A)$, $u_1^{(0)} \in H_0$. Все условия (K), (A1)–(A4), (B), (Ф1)–(Ф3) и последние условия на начальные данные считаются выполненными всюду на протяжении данной статьи.

Замечание. Важным для приложений частным случаем уравнения (1.1) является уравнение с нелинейностью вида $B(t,u(t)) = B_0(u(t)) + f(t)$, где $B_0 : H_0 \to H$ — потенциальный оператор, функция f принадлежит, например, $C^1([0,T];H)$. Для таких уравнений в качестве Φ в ряде случаев подходит функционал $(t,u) \to (1/2)a(t,u,u) + \Phi_0(u)$, где Φ_0 — потенциал оператора B_0. Задача (1.1), (1.2) с нелинейностью указанного вида и не зависящими от t операторами K, A может интерпретироваться как абстрактная формулировка начально-краевых задач математической физики, получаемых на основе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского (см. [10], с. 749–751). Задачи этого класса, к которым непосредственно применимы результаты данной работы, рассматривались в ([12], гл. I, § 1; [13]). Другим частным случаем уравнения (1.1) является линейное уравнение с $B(t,u(t)) = B_1(t)u(t) + f(t)$, где, например, $B_1 \in C^1([0,T];\mathcal{L}(H_0,H))$, $f \in C^1([0,T];H)$. В этом случае следует принять $\Phi(t,u) = (1/2)a(t,u,u)$.

Отметим необходимые для дальнейшего следствия из условия (B).

Лемма 1. *Для п. в. $t \in [0,T]$ (именно, для всех t, при которых функция $\beta_1(t,\cdot)$ не убывает на $\mathbb{R}_+$) и для любых $u,v \in H_0$*

$$|B(t,u) - B(t,v)|_H \le \beta_1(t, \max(|u|_0, |v|_0))|u - v|_0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Из условия (B) следует, что для любого $t \in [0,T]$ оператор $B_t : H_0 \to H$, определенный равенством $B_t(u) = B(t,u)$, имеет в каждой точке $u \in H_0$ производную Фреше $B'_t[u] \in \mathcal{L}(H_0,H)$, причем $\|B'_t[u] \mid \mathcal{L}(H_0,H)\| \le \beta_1(t,|u|_0)$ для всех $u \in H_0$. Поэтому, используя формулу конечных приращений ([14], с. 483), получаем для любых $u,v \in H_0$ и для всех $t \in [0,T]$, при которых функция $\beta_1(t,\cdot)$ не убывает на $\mathbb{R}_+$, $|B(t,u)-B(t,v)|_H \le \sup\limits_{0\le\theta\le1} \beta_1(t, |\theta u+(1-\theta)v|_0)|u-v|_0 = \beta_1(t,\max(|u|_0,|v|_0))|u-v|_0$. $\square$

Лемма 2. *Существует неубывающая функция $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $|B(t,u)|_H \le \beta(|u|_0)$ для всех $(t,u) \in [0,T] \times H_0$.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in [0,T]$ — такое число, что функция $\beta_1(t_0,\cdot)$ не убывает на $\mathbb{R}_+$. Зафиксируем произвольные $t \in [0,T]$, $u \in H_0$. Из условия (B) следует, что функция $B_u : [0,T] \to H$, определенная равенством $B_u(\tau) = B(\tau,u)$, дифференцируема в каждой точке $\tau \in [0,T]$ и для всех $\tau \in [0,T]$ выполняется $\left|\frac{d}{d\tau}B_u(\tau)\right|_H = |B'[\tau,u](1,0)|_H \le \beta_0(\tau,|u|_0)$. Отсюда с помощью теоремы 1 из ([15], с. 251) получим

$$|B(t,u) - B(t_0,u)|_H \le \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \beta_0(\tau,|u|_0)d\tau. \tag{2.2}$$

Используя оценки (2.1) и (2.2), имеем $|B(t,u)|_H \le |B(t,u) - B(t_0,u)|_H + |B(t_0,u) - B(t_0,0)|_H + |B(t_0,0)|_H \le \beta(|u|_0)$, где $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — функция, определенная равенством

$$\beta(\xi) = \max\left\{ \int_0^{t_0} \beta_0(\tau,\xi)d\tau,\ \int_{t_0}^{T} \beta_0(\tau,\xi)d\tau \right\} + \beta_1(t_0,\xi)\xi + |B(t_0,0)|_H.$$

Очевидно, эта функция не убывает на $\mathbb{R}_+$. $\square$

В заключение этого пункта сформулируем определение решения рассматриваемой задачи, действующее всюду ниже в данной работе.

Определение. Функцию $u_* : [0,T] \to D(A)$ будем называть решением задачи (1.1), (1.2), если $A_0u_* \in L^\infty(0,T;H)$, $u'_* \in L^\infty(0,T;H_0)$, $u''_* \in L^\infty(0,T;H)$, для п. в. $t \in [0,T]$ $Q[u_*,t] = 0$, $u_*(0) = u_0^{(0)}$ и $u'_*(0) = u_1^{(0)}$.

3. Специальный базис и соотношения МБГ. Существование, единственность и априорные оценки приближенных решений

Поскольку оператор A_0 имеет вполне непрерывный в H обратный оператор A_0^{-1}, то в силу теоремы Гильберта–Шмидта ([14], с. 246) в H существует базис $\{v_{0,m}\}_{m=1}^\infty$, состоящий из собственных элементов оператора A_0, которые можно считать пронумерованными в порядке неубывания соответствующих собственных значений λ_m $(m = 1,2,\dots)$, $A_0v_{0,m} = \lambda_m v_{0,m}$, $0 < \lambda_m \le \lambda_{m+1}$, $m = 1,2,\dots;$ $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = \infty$. Пусть n — произвольное натуральное число. Обозначим через H_n линейную оболочку конечной системы элементов $\{v_{0,m}\}_{m=1}^n$, через P_n — ортопроектор H на H_n

и через R_n — оператор $I-P_n$, где I — тождественный оператор в H. Будем решать задачу (1.1), (1.2) по МБГ, используя в качестве базисных элементов собственные элементы оператора A_0

$$P_n(Q[u_n,t])=0, \quad t\in[0,T], \tag{3.1}$$

$$u_n(t)\in H_n, \quad t\in[0,T], \tag{3.2}$$

$$u_n(0)=P_nu_0^{(0)}, \quad u_n'(0)=P_nu_1^{(0)}. \tag{3.3}$$

Решение u_n задачи (3.1)–(3.3) будем называть приближенным решением задачи (1.1), (1.2), построенным по МБГ.

В дальнейшем через c_i $(i=1,2,\ldots,8)$ обозначаются различные неотрицательные константы, которые могут зависеть только от вида операторов $K(t)$, $A(t)$ $(t\in[0,T])$, A_0, B, функционала Φ и от $u_0^{(0)}$, $u_1^{(0)}$, T. Восстанавливая описываемые ниже построения во всех деталях, можно получить значения всех этих констант в явном виде. Через $\|\cdot\|_C$ в дальнейшем обозначается следующая норма пространства $C([0,T];H_0)\cap C^1([0,T];H)$:

$$\|u\|_C=\max_{0\le t\le T}(|u'(t)|_H^2+|u(t)|_0^2)^{1/2}.$$

Следуя ([10], [12], сс. 23–24, 30–33), нетрудно показать, что при любом натуральном n задача (3.1)–(3.3) имеет единственное решение u_n, удовлетворяющее условиям $u_n\in C^2([0,T];H_n)$, $u_n'''\in L(0,T;H_n)$, и для этого решения выполнены априорные оценки

$$\|u_n\|_C\le c_1, \tag{3.4}$$

$$\|u_n'\|_C\le c_2. \tag{3.5}$$

Замечание. Необходимым элементом вывода оценок (3.4), (3.5) и нижеследующих построений является лемма Гроноулла, используемая в данной работе в следующей формулировке, усиленной по сравнению с более известными формулировками из ([16], с. 298; [17], с. 37): если $y\in C([0,T])$, $y_0\in\mathbb{R}$, $z\in L(0,T)$ и для всех $t\in[0,T]$ $z(t)\ge 0$, $y(t)\le y_0+\int\limits_0^t y(\tau)z(\tau)d\tau$, то $y(t)\le y_0\exp\left(\int\limits_0^t z(\tau)d\tau\right)$ для всех $t\in[0,T]$. Также отметим, что функционал Φ используется в данной работе только при выводе оценки (3.4).

4. Основные результаты

Теорема. *Решение u_* задачи* (1.1), (1.2) *существует и единственно, последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ приближенных решений задачи* (1.1), (1.2), *построенных по МБГ* (3.1)–(3.3), *сильно сходится к u_* в пространстве $C([0,T];H_0)\cap C^1([0,T];H)$ и скорость этой сходимости допускает оценку*

$$\|u_n-u_*\|_C\le c_3|R_nu_1^{(0)}|_H+c_4|R_nu_0^{(0)}|_0+c_5\lambda_{n+1}^{-1/4}, \tag{4.1}$$

где n — произвольное натуральное число.

Доказательство. Прежде всего установим априорную оценку нормы $\|A_0u_n\mid C([0,T];H)\|$ (n — любое натуральное число, u_n — решение задачи (3.1)–(3.3)). Умножим скалярно в H обе части равенства (3.1) на $A_0u_n(t)$. Тогда получим $(A(t)u_n(t),A_0u_n(t))_H=-(u_n''(t)+K(t)u_n'(t)+B(t,u_n(t)),A_0u_n(t))_H$ для всех $t\in[0,T]$. Оценим левую часть данного равенства снизу с помощью условия (A3), а правую часть — сверху через $[|u_n''(t)|_H+|K(t)u_n'(t)|_H+|B(t,u_n(t))|_H]\,|A_0u_n(t)|_H$. Таким образом, получим неравенство $|A_0u_n(t)|_H\le a_2^{-1}[|u_n''(t)|_H+|K(t)u_n'(t)|_H+|B(t,u_n(t))|_H]$, правую часть которого оценим с помощью (3.4), (3.5), очевидного неравенства $\|K(t)\mid\mathcal{L}(H)\|\le k_0$ и леммы 2. В результате имеем

$$\|A_0u_n\mid C([0,T];H)\|\le c_6. \tag{4.2}$$

Далее установим априорную оценку нормы $|Q[u_n,t]|_H$, где t — любое число из $[0,T]$. В силу условия (A1) $|Q[u_n,t]|_H \le |u_n''(t)|_H + |K(t)u_n'(t)|_H + a_0|A_0 u_n(t)|_H + |B(t,u_n(t))|_H$. Используя это неравенство, (3.4), (3.5), (4.2), неравенство $\|K(t) \mid \mathcal{L}(H)\| \le k_0$ и лемму 2, имеем

$$|Q[u_n,t]|_H \le c_7. \tag{4.3}$$

Теперь покажем, что последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ приближенных решений задачи (1.1), (1.2), построенных по МБГ (3.1)–(3.3), сильно сходится в пространстве $C([0,T];H_0) \cap C^1([0,T];H)$. Пусть n, s — произвольные натуральные числа такие, что $n \le s$. Примем обозначение $\Delta u_{n,s} = u_n - u_s$. Из (3.1) следует, что для всех $t \in [0,T]$ $P_s(Q[u_n,t]) = R_n P_s(Q[u_n,t])$. Вычтем из этого равенства равенство (3.1) с s вместо n, обе части полученного равенства умножим скалярно в H на $2\Delta u_{n,s}'(t)$ и вновь полученное равенство почленно проинтегрируем по отрезку $[0,\tau]$, где τ — произвольное число из $[0,T]$, с учетом начальных условий $\Delta u_{n,s}(0) = P_n u_0^{(0)} - P_s u_0^{(0)}$, $\Delta u_{n,s}'(0) = P_n u_1^{(0)} - P_s u_1^{(0)}$. В результате будем иметь для всех $\tau \in [0,T]$

$$\begin{aligned} |\Delta u_{n,s}'(\tau)|_H^2 + a(\tau, \Delta u_{n,s}(\tau), \Delta u_{n,s}(\tau)) = |P_n u_1^{(0)} - P_s u_1^{(0)}|_H^2 + a(0, P_n u_0^{(0)} - P_s u_0^{(0)}, P_n u_0^{(0)} - P_s u_0^{(0)}) - \\ - 2\int_0^\tau (K(t)\Delta u_{n,s}'(t), \Delta u_{n,s}'(t))_H dt + 2\int_0^\tau (B(t,u_s(t)) - B(t,u_n(t)), \Delta u_{n,s}'(t))_H dt + \\ + 2\int_0^\tau (R_n P_s(Q[u_n,t]), \Delta u_{n,s}'(t))_H dt + \int_0^\tau a'(t, \Delta u_{n,s}(t), \Delta u_{n,s}(t)) dt. \end{aligned} \tag{4.4}$$

В силу условия (A2) второе слагаемое в левой части (4.4) допускает оценку снизу

$$a(\tau, \Delta u_{n,s}(\tau), \Delta u_{n,s}(\tau)) \ge a_1^{-2} |\Delta u_{n,s}(\tau)|_0^2. \tag{4.5}$$

Оценим сверху каждое слагаемое в правой части (4.4) в отдельности. Для первого слагаемого получим

$$|P_n u_1^{(0)} - P_s u_1^{(0)}|_H^2 = |P_s R_n u_1^{(0)}|_H^2 \le |R_n u_1^{(0)}|_H^2. \tag{4.6}$$

Для второго слагаемого имеем

$$\begin{aligned} a(0, P_n u_0^{(0)} - P_s u_0^{(0)}, P_n u_0^{(0)} - P_s u_0^{(0)}) = |(A(0))^{1/2} P_s R_n u_0^{(0)}|_H^2 \le \\ \le \|(A(0))^{1/2} A_0^{-1/2} \mid \mathcal{L}(H)\|^2 |A_0^{1/2} P_s R_n u_0^{(0)}|_H^2 \le \\ \le \|(A(0))^{1/2} A_0^{-1/2} \mid \mathcal{L}(H)\|^2 |R_n u_0^{(0)}|_0^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Третье слагаемое оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} - 2\int_0^\tau (K(t)\Delta u_{n,s}'(t), \Delta u_{n,s}'(t))_H dt \le \\ \le 2\int_0^\tau \|K(t) \mid \mathcal{L}(H)\| \, |\Delta u_{n,s}'(t)|_H^2 dt \le 2k_0 \int_0^\tau |\Delta u_{n,s}'(t)|_H^2 dt. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Используя лемму 1, оценку (3.4) и неравенство Коши, получим

$$\begin{aligned} 2\int_0^\tau (B(t,u_s(t)) - B(t,u_n(t)), \Delta u_{n,s}'(t))_H dt \le 2\int_0^\tau \beta_1(t,c_1) |\Delta u_{n,s}(t)|_0 |\Delta u_{n,s}'(t)|_H dt \le \\ \le \int_0^\tau \beta_1(t,c_1)[|\Delta u_{n,s}(t)|_0^2 + |\Delta u_{n,s}'(t)|_H^2] dt. \end{aligned} \tag{4.9}$$

В силу специального выбора базиса МБГ $\|A_0^{-1/2}R_n \mid \mathcal{L}(H)\| = \lambda_{n+1}^{-1/2}$, в силу (3.5) для всех $t \in [0,\tau]$ $|\Delta u'_{n,s}(t)|_0 \le 2c_2$ и в соответствии с (4.3) для всех $t \in [0,\tau]$ $|Q[u_n,t]|_H \le c_7$, поэтому

$$2\int_0^\tau (R_nP_s(Q[u_n,t]),\Delta u'_{n,s}(t))_H dt = 2\int_0^\tau (A_0^{-1/2}R_nP_s(Q[u_n,t]),A_0^{1/2}\Delta u'_{n,s}(t))_H dt \le$$

$$\le 2\|A_0^{-1/2}R_n \mid \mathcal{L}(H)\| \int_0^\tau |Q[u_n,t]|_H\,|\Delta u'_{n,s}(t)|_0 dt \le 4Tc_2c_7\lambda_{n+1}^{-1/2}. \quad (4.10)$$

Наконец, последнее слагаемое в правой части (4.4) допускает оценку

$$\int_0^\tau a'(t,\Delta u_{n,s}(t),\Delta u_{n,s}(t))dt \le \int_0^\tau \|a'(t,\cdot,\cdot\cdot) \mid \mathcal{B}(H_0)\|\,|\Delta u_{n,s}(t)|_0^2 dt \le \alpha_0\int_0^\tau |\Delta u_{n,s}(t)|_0^2 dt. \quad (4.11)$$

Из (4.4)–(4.11) следует, что для всех $\tau \in [0,T]$

$$|\Delta u'_{n,s}(\tau)|_H^2 + a_1^{-2}|\Delta u_{n,s}(\tau)|_0^2 \le |R_nu_1^{(0)}|_H^2 + \|(A(0))^{1/2}A_0^{-1/2} \mid \mathcal{L}(H)\|^2\,|R_nu_0^{(0)}|_0^2 +$$

$$+ 4Tc_2c_7\lambda_{n+1}^{-1/2} + \int_0^\tau [(\beta_1(t,c_1)+2k_0)|\Delta u'_{n,s}(t)|_H^2 + (\beta_1(t,c_1)+\alpha_0)|\Delta u_{n,s}(t)|_0^2]dt,$$

откуда с помощью леммы Гроноулла получим

$$\|u_n - u_s\|_C \le c_3|R_nu_1^{(0)}|_H + c_4|R_nu_0^{(0)}|_0 + c_5\lambda_{n+1}^{-1/4}. \quad (4.12)$$

Из (4.12) видно, что последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в пространстве $C([0,T];H_0)\cap C^1([0,T];H)$. Следовательно, существует функция $u_* \in C([0,T];H_0)\cap C^1([0,T];H)$ такая, что

$$u_n \to u_* \quad \text{сильно в} \quad C([0,T];H_0)\cap C^1([0,T];H), \quad n\to\infty. \quad (4.13)$$

Теперь покажем, что функция u_* является решением задачи (1.1), (1.2). Примем обозначения: $\langle v_1,v_2,t\rangle = (v_1''(t),v_2''(t))_H + (v_1'(t),v_2'(t))_0 + (A_0v_1(t),A_0v_2(t))_H$, где $t\in[0,T]$, v_1 и v_2 — произвольные функции, отображающие $[0,T]$ в $D(A)$ и удовлетворяющие условиям $A_0v_i \in L^2(0,T;H)$, $v_i' \in L^2(0,T;H_0)$, $v_i'' \in L^2(0,T;H)$ $(i=1,2)$; $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, состоящее из функций $v:[0,T]\to D(A)$, удовлетворяющих условиям $A_0v \in L^2(0,T;H)$, $v' \in L^2(0,T;H_0)$, $v'' \in L^2(0,T;H)$, и снабженное скалярным произведением $(v_1,v_2)_{\mathcal{H}} = \int_0^T \langle v_1,v_2,t\rangle dt$. В силу (3.5), (4.2) для всех $n\in\mathbb{N}$

$$\max_{0\le t\le T}\langle u_n,u_n,t\rangle \le c_8. \quad (4.14)$$

Тем более последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена в $\mathcal{H}$. Следовательно, по теореме 3 из ([14], с. 199) найдется подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ этой последовательности, слабо сходящаяся в $\mathcal{H}$ к некоторой функции v_*. Поскольку эта подпоследовательность к тому же сильно сходится в $C([0,T];H_0)\cap C^1([0,T];H)$ к u_*, то в силу единственности слабого предела в $C([0,T];H_0)\cap C^1([0,T];H)$ $v_* = u_*$ и вся последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ слабо сходится в $\mathcal{H}$ к u_*.

Сейчас будет доказано, что функция u_* удовлетворяет условиям (участвующим в определении решения задачи (1.1), (1.2), см. п. 2)

$$A_0u_* \in L^\infty(0,T;H), \quad u_*' \in L^\infty(0,T;H_0), \quad u_*'' \in L^\infty(0,T;H). \quad (4.15)$$

Пусть m_0 — какое-либо фиксированное число, строго большее, чем c_8. Обозначим через σ множество $\{t\in[0,T] \mid \langle u_*,u_*,t\rangle \ge m_0\}$. Рассмотрим линейный ограниченный функционал F над $\mathcal{H}$, определенный равенством $F(v) = \int_\sigma \langle u_*,u_*,t\rangle^{-1/2}\langle v,u_*,t\rangle dt$. В силу (4.14) для всех $n\in\mathbb{N}$

$$F(u_n) \le \int_\sigma \langle u_n,u_n,t\rangle^{1/2}dt \le c_8^{1/2}\operatorname{mes}\sigma. \quad (4.16)$$

Так как последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится в $\mathcal{H}$ к u_*, то

$$F(u_*) = \lim_{n\to\infty} F(u_n). \tag{4.17}$$

Из (4.16) и (4.17) получаем $F(u_*) \le c_8^{1/2} \operatorname{mes}\sigma$. С другой стороны, $F(u_*) = \int_\sigma \langle u_*, u_*, t\rangle^{1/2} dt \ge m_0^{1/2} \operatorname{mes}\sigma$ по определению множества σ. Из двух последних неравенств вытекает $m_0^{1/2} \operatorname{mes}\sigma \le c_8^{1/2} \operatorname{mes}\sigma$, но при этом $m_0 > c_8 \ge 0$. Очевидно, это возможно только при $\operatorname{mes}\sigma = 0$. Поэтому $\langle u_*, u_*, t\rangle < m_0$ для п. в. $t \in [0,T]$ и, стало быть, функция u_* удовлетворяет условиям (4.15).

Из того, что $u_n \to u_*$ слабо в $\mathcal{H}$, следует

$$A_0 u_n \to A_0 u_* \ \text{ слабо в } \ L^2(0,T;H), \quad n\to\infty, \tag{4.18}$$

$$u_n'' \to u_*'' \quad \text{ слабо в } \ L^2(0,T;H), \quad n\to\infty. \tag{4.19}$$

Далее получим из (4.13) с учетом условия (K)

$$K(\cdot)u_n'(\cdot) \to K(\cdot)u_*'(\cdot) \quad \text{сильно в} \quad C([0,T];H), \quad n\to\infty, \tag{4.20}$$

а из (4.18) с учетом условия (A1)

$$A(\cdot)u_n(\cdot) \to A(\cdot)u_*(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;H), \quad n\to\infty. \tag{4.21}$$

В силу (4.13) в (3.4) можно перейти к пределу. Используя устанавливаемую таким образом оценку $\|u_*\|_C \le c_1$, саму оценку (3.4) и лемму 1, имеем для п. в. $t \in [0,T]$ $|B(t,u_n(t)) - B(t,u_*(t))|_H \le \beta_1(t,c_1)|u_n(t) - u_*(t)|_0$, поэтому

$$B(\cdot,u_n(\cdot)) \to B(\cdot,u_*(\cdot)) \quad \text{сильно в} \quad L(0,T;H), \quad n\to\infty. \tag{4.22}$$

Теперь, используя (4.13), (4.19)–(4.22), предельным переходом в (3.1), (3.3) получаем равенства $Q[u_*,t] = 0$ (для п. в. $t \in [0,T]$), $u_*(0) = u_0^{(0)}$, $u_*'(0) = u_1^{(0)}$. В частности, первое из этих равенств устанавливается следующим образом: полагая $m,n \in \mathbb{N}$, $n \ge m$, умножая скалярно (3.1) в H на $\operatorname{sign}((Q[u_*,t],v_{0,m})_H)v_{0,m}$, интегрируя по $[0,T]$ и переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем $\int_0^T |(Q[u_*,t],v_{0,m})_H| dt = 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$, т. е. $(Q[u_*,t],v_{0,m})_H = 0$ для п. в. $t\in[0,T]$, и затем из последнего равенства (поскольку $\{v_{0,m}\}_{m=1}^{\infty}$ — базис в H) заключаем, что $Q[u_*,t] = 0$ для п. в. $t \in [0,T]$.

Итак, сильный предел u_* последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $C([0,T];H_0)\cap C^1([0,T];H)$ удовлетворяет всем условиям определения решения задачи (1.1), (1.2), так что утверждения теоремы о существовании решения этой задачи и сходимости к нему последовательности приближенных решений доказаны. Переходя в (4.12) к пределу при $s\to\infty$, имеем оценку (4.1).

Остается доказать, что решение задачи (1.1), (1.2) единственно. Следующее доказательство аналогично проведенному в ([12], с. 27–28) для конкретной начально-краевой задачи. Пусть $u_*^{(1)}$, $u_*^{(2)}$ — два решения задачи (1.1), (1.2) и $\Delta u = u_*^{(1)} - u_*^{(2)}$, тогда для п. в. $t \in [0,T]$

$$\Delta u''(t) + K(t)\Delta u'(t) + A(t)\Delta u(t) + B(t,u_*^{(1)}(t)) - B(t,u_*^{(2)}(t)) = 0, \tag{4.23}$$

$$\Delta u(0) = \Delta u'(0) = 0. \tag{4.24}$$

Умножим обе части равенства (4.23) скалярно в H на $2\Delta u'(t)$ и полученное равенство почленно проинтегрируем по отрезку $[0,\tau]$, где τ — произвольное число из $[0,T]$, с учетом начальных условий (4.24). Тогда будем иметь для всех $\tau \in [0,T]$

$$|\Delta u'(\tau)|_H^2 + a(\tau,\Delta u(\tau),\Delta u(\tau)) =$$
$$= \int_0^\tau [2(-K(t)\Delta u'(t) + B(t,u_*^{(2)}(t)) - B(t,u_*^{(1)}(t)),\Delta u'(t))_H + a'(t,\Delta u(t),\Delta u(t))]dt.$$

Оценивая левую часть данного равенства снизу с помощью условия (A2), а правую — сверху с помощью очевидных неравенств $\|K(t) \mid \mathcal{L}(H)\| \le k_0$, $\|a'(t,\cdot,\cdot\cdot) \mid \mathcal{B}(H_0)\| \le \alpha_0$, леммы 1 и неравенства Коши, получим для всех $\tau \in [0, T]$

$$|\Delta u'(\tau)|_H^2 + a_1^{-2}|\Delta u(\tau)|_0^2 \le \int_0^\tau [(\beta_1(t,M) + 2k_0)|\Delta u'(t)|_H^2 + (\beta_1(t,M) + \alpha_0)|\Delta u(t)|_0^2]dt,$$

где $M = \max(\|u_*^{(1)} \mid C([0,T];H_0)\|, \|u_*^{(2)} \mid C([0,T];H_0)\|)$. Из последнего неравенства с помощью леммы Гронуолла получаем $\Delta u(\tau) = 0$ для всех $\tau \in [0, T]$, т. е. $u_*^{(1)} = u_*^{(2)}$. Таким образом, решение задачи (1.1), (1.2) единственно. $\square$

Литература

1. Михлин С.Г. *Численная реализация вариационных методов.* – М.: Наука, 1966. – 432 с.
2. Соболевский П.Е. *Об уравнениях с операторами, образующими острый угол* // ДАН СССР. – 1957. – Т. 116. – № 5. – С. 752–757.
3. Железовский С.Е., Кириченко В.Ф., Крысько В.А. *О скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина для одной неклассической системы дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 8. – С. 1407–1416.
4. Железовская Л.А., Железовский С.Е., Кириченко В.Ф., Крысько В.А. *О скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина для гиперболических уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 2. – С. 323–333.
5. Железовский С.Е. *О скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина для нелинейной задачи теории упругих оболочек* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 5. – С. 858–869.
6. Джишкариани А.В. *О быстроте сходимости метода Бубнова–Галёркина* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1964. – Т. 4. – № 2. – С. 343–348.
7. Вайникко Г.М. *Некоторые оценки погрешности метода Бубнова–Галёркина.* 2. *Оценки n-го приближения* // Учен. зап. Тартуск. ун-та. – 1964. – № 150. – С. 202–215.
8. Зарубин А.Г. *Исследование проекционной процедуры Галёркина–Петрова методом дробных степеней* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 4. – С. 780–784.
9. Зарубин А.Г. *О скорости сходимости метода Фаэдо–Галёркина для квазилинейных нестационарных операторных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 12. – С. 2051–2059.
10. Ворович И.И. *О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1957. – Т. 21. – № 6. – С. 747–784.
11. Велиев М.А., Мамедов Я.Д. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений с нелинейным потенциальным оператором в гильбертовом пространстве* // ДАН СССР. – 1973. – Т. 208. – № 1. – С. 21–24.
12. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
13. Морозов Н.Ф. *Исследование колебаний призматического стержня под действием поперечной нагрузки* // Изв. вузов. Математика. – 1965. – № 3. – С. 121–125.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Учеб. пособие. – 5-е изд. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
15. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – М.: Наука, 1974. – 480 с.
16. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* Т. 1. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
17. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Поволжская академия государственной службы (г. Саратов)

Поступила 27.05.1996