ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 2 (441)

УДК 517.977

Е.К. МАКАРОВ, С.Н. ПОПОВА

О ГЛОБАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n, $\|x\| = \sqrt{x^*x}$ — норма в $\mathbb{R}^n$ (звездочка означает операцию транспонирования), $\mathrm{B}^n_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \varepsilon\}$; $\mathrm{M}_{n,m}$ — пространство матриц размерности $n \times m$ (при $m = n$ пишем M_n). Норма в $\mathrm{M}_{n,m}$ определяется равенством $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Для $H \in \mathrm{M}_n$ обозначим $\mathrm{B}_\varepsilon(H) = \{P \in \mathrm{M}_n : \|P - H\| < \varepsilon\}$. Всюду далее E — единичная матрица, для $I \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\mathrm{KC}_{m,n}(I)$ пространство ограниченных кусочно-непрерывных отображений $U : I \to \mathrm{M}_{m,n}$ с равномерной нормой $\|U\|_C = \sup\limits_{t \in I} \|U(t)\|$.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где оператор-функция $A(\cdot)$ предполагается ограниченной и непрерывной ($a := \sup\limits_t \|A(t)\|$), а $B(\cdot)$ — ограниченной и равномерно непрерывной ($b := \sup\limits_t \|B(t)\|$).

Напомним, что система (1) называется

1) *вполне управляемой на отрезке* $[t_0, t_0 + \sigma]$, если для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется такое управление $u \in \mathrm{KC}([t_0, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^m)$, что решение задачи Коши $\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)$, $x(t_0) = x_0$ удовлетворяет условию $x(t_0 + \sigma) = 0$;
2) *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\sigma > 0$ и $l > 0$, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ система (1) вполне управляема на $[t_0, t_0 + \sigma]$, при этом существует управление $u(\cdot)$, переводящее произвольную точку x_0 в 0, которое удовлетворяет неравенству $\|u\|_C \le l\|x_0\|$ (l от x_0 не зависит);
3) *σ-равномерно вполне управляемой*, если (1) равномерно вполне управляема на отрезках длины σ.

Пусть $X(t, s)$ — матрица Коши однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{2}$$

Для произвольных $t, s \in \mathbb{R}$ обозначим $Q(t, s) = X(t, s)B(s)$.

Лемма 1. *Система* (1) *вполне управляема на отрезке* $[t_0, t_0 + \sigma]$ *в том и только том случае, когда найдется такой набор из* $p \le n$ *точек* $t_1 < t_2 < \dots < t_p \in [t_0, t_0 + \sigma]$, *что*

$$\operatorname{rank}(Q(t_0, t_1), Q(t_0, t_2), \dots, Q(t_0, t_p)) = n. \tag{3}$$

Исследования первого автора профинансированы Институтом математики Национальной Академии Наук Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований “Математические структуры”. Исследования второго автора поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97–01–00413) и Конкурсным центром Удмуртского госуниверситета (грант 97–04).

Замечание 1. Известно ([1], с. 43), что система (1) вполне управляема на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ тогда и только тогда, когда строки матрицы $Q(t_0, t)$ линейно независимы на этом отрезке. Кроме того, полная управляемость (1) на $[t_0, t_0 + \sigma]$ эквивалентна тому, что

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0, t)\mathcal{U}\, dt = \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где $\mathcal{U} := \mathrm{KC}([t_0, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^m)$.

Доказательство леммы 1. Поскольку здесь рассматривается фиксированный отрезок $[t_0, t_0 + \sigma]$, для краткости будем обозначать $Q(t) := Q(t_0, t)$.

Необходимость. Предположим противное, пусть $\operatorname{rank}(Q(t_1), \dots, Q(t_n)) < n$ для любого набора из n точек $t_1 < \dots < t_n \in [t_0, t_0+\sigma]$. Пусть $\max\limits_{t_1<\dots<t_n} \operatorname{rank}(Q(t_1), \dots, Q(t_n)) = r < n$, и $\tau_1 < \dots < \tau_n \in [t_0, t_0+\sigma]$ таковы, что $\operatorname{rank}(Q(\tau_1), \dots, Q(\tau_n)) = r$. Тогда при добавлении к набору $\tau_1 < \dots < \tau_n$ произвольных точек $t_1, \dots, t_l \in [t_0, t_0 + \sigma]$ будем иметь $\operatorname{rank}(Q(\tau_1), \dots, Q(\tau_n), Q(t_1), \dots, Q(t_l)) = r$.

Действительно, при добавлении новых столбцов к матрице ее ранг уменьшиться не может. Предположим, что он увеличился, и пусть для определенности $\operatorname{rank}(Q(\tau_1), \dots, Q(\tau_n), Q(t_1)) > r$. В силу непрерывности функции $Q(\cdot)$ можно считать, что точка t_1 не совпадает ни с одной из точек τ_i. Поскольку при всяком $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ матрица

$$(Q(\tau_1), \dots, Q(\tau_{j-1}), Q(\tau_{j+1}), \dots, Q(\tau_n)) \tag{5}$$

имеет $m(n-1) \geq n-1 \geq r$ столбцов, то найдется такое $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, что ранг матрицы (5) равен r и $\operatorname{rank}(Q(\tau_1), \dots, Q(\tau_n), Q(t_1)) = \operatorname{rank}(Q(\tau_1), \dots, Q(\tau_{j-1}), Q(\tau_{j+1}), \dots, Q(\tau_n), Q(t_1)) > r$ — противоречие с тем, что набор $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$ дает максимальный ранг.

Обозначим через L_r линейную оболочку столбцов матрицы $(Q(\tau_1), \dots, Q(\tau_n))$ и будем рассматривать произвольные отмеченные разбиения $T\xi$ отрезка $[t_0, t_0 + \sigma]$, в которые входят точки $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. Тогда для любой функции $u \in \mathrm{KC}([t_0, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^m)$ имеем $\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t)u(t)dt = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sum\limits_i Q(\xi_i)u(\xi_i)\varDelta t_i \subset L_r$. Поскольку размерность подпространства L_r равна $r < n$, то получаем противоречие с (4).

Достаточность. Пусть существуют такие $t_1 < \dots < t_p \in [t_0, t_0+\sigma]$, что $\operatorname{rank}(Q(t_1), \dots, Q(t_p)) = n$. Тогда строки матрицы $Q(t)$ линейно независимы на $[t_0, t_0 + \sigma]$. Действительно, в противном случае найдется такой ненулевой вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, что $\xi^* Q(t) \equiv 0$ на $[t_0, t_0 + \sigma]$. Тогда $\xi^*(Q(t_1), \dots, Q(t_p)) = 0$. Это означает, что $\operatorname{rank}(Q(t_1), \dots, Q(t_p)) < n$ — противоречие. Из замечания 1 следует, что (1) вполне управляема на $[t_0, t_0 + \sigma]$. $\square$

Следствие. Система (1) вполне управляема на $[t_0, t_0 + \sigma]$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $t_1 < \dots < t_n \in [t_0, t_0 + \sigma]$ и $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_j\| = 1$ $(j = 1, \dots, n)$, что

$$\det(Q(t_1)\nu_1, \dots, Q(t_n)\nu_n) \neq 0. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $t_1 < \dots < t_n \in [t_0, t_0 + \sigma]$ таковы, что выполнено соотношение (6). Докажем, что $\operatorname{rank}(Q(t_1), \dots, Q(t_n)) = n$. Предположим противное, пусть существует такой ненулевой вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, что $\xi^*(Q(t_1), \dots, Q(t_n)) = 0 \in \mathbb{R}^{mn*}$. Поэтому $\xi^* Q(t_j) = 0 \in \mathbb{R}^{m*}$ при всех $j \in \{1, \dots, n\}$. Следовательно, для векторов $\nu_1, \dots, \nu_n$, входящих в (6), справедливо соотношение $\sum\limits_{j=1}^{n} (\xi^* Q(t_j)\nu_j)^2 = 0$. Но из (6) вытекает, что $\xi^*(Q(t_1)\nu_1, \dots, Q(t_n)\nu_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n*}$, т. е. $\sum\limits_{j=1}^{n} (\xi^* Q(t_j)\nu_j)^2 > 0$ — противоречие.

Необходимость. Пусть (1) вполне управляема на $[t_0, t_0 + \sigma]$. Тогда справедливо равенство (3). Пусть $r_i := \operatorname{rank} Q(t_i)$, $r_1 + \dots + r_p \geq n$. Возьмем произвольное $i \in \{1, \dots, p\}$. Предположим, что векторы $\nu_1^i,...,\nu_{r_i}^i \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_j^i\|=1$, таковы, что $\operatorname{rank}(Q(t_i)\nu_1^i,...,Q(t_i)\nu_{r_i}^i)=r_i$. Из непрерывности функции $Q(\cdot)$ на $[t_0,t_0+\sigma]$ следует, что $\operatorname{rank}(Q(\tau_1^i)\nu_1^i,...,Q(\tau_{r_i}^i)\nu_{r_i}^i)=r_i$ при достаточно малом δ и произвольных $\tau_1^i,...,\tau_{r_i}^i \in \mathrm{B}_\delta^1(t_i)$, при этом $\operatorname{rank}(Q(\tau_1^1)\nu_1^1,...,Q(\tau_{r_1}^1)\nu_{r_1}^1,...,Q(\tau_1^p)\nu_1^p,...,Q(\tau_{r_p}^p)\nu_{r_p}^p)=n$. Взяв здесь n попарно различных моментов времени τ_j^i, получим утверждение следствия. □

Лемма 2. *Система* (1) *σ-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда найдется $\alpha>0$ такое, что для каждого $t_0\in\mathbb{R}$ существуют $t_1,\dots,t_n\in[t_0,t_0+\sigma]$ и $\nu_1,\dots,\nu_n\in\mathbb{R}^m$, $\|\nu_j\|=1$, для которых матрица*

$$F=F(t_0):=(Q(t_0,t_1)\nu_1,\dots,Q(t_0,t_n)\nu_n) \tag{7}$$

удовлетворяет неравенству

$$|\det F(t_0)|\ge\beta. \tag{8}$$

Замечание 2. Известно [2], что система (1) σ-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда найдется такое $\alpha>0$, что при всех $t\in\mathbb{R}$ *матрица Калмана*

$$W(t,t+\sigma):=\int_t^{t+\sigma}X(t,s)B(s)B^*(s)X^*(t,s)ds$$

удовлетворяет неравенству $W(t,t+\sigma)\ge\alpha E$, понимаемому в смысле квадратичных форм. Очевидно, это свойство эквивалентно существованию такого $\alpha>0$, что для каждого $t_0\in\mathbb{R}$ и каждого $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\|\xi\|=1$, найдется $\nu\in\mathbb{R}^m$, $\|\nu\|=1$ и такой, что

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma}(\xi^*Q(t_0,s)\nu)^2\,ds\ge\alpha. \tag{9}$$

Доказательство леммы 2. Достаточность. Предположим противное, пусть (1) не является равномерно вполне управляемой, т.е. свойство (9) не выполнено. Это означает, что для каждого $k\in\mathbb{N}$ найдутся $\vartheta_k\in\mathbb{R}$ и $\xi_k\in\mathbb{R}^n$, $\|\xi_k\|=1$ и такие, что при всех $\nu\in\mathbb{R}^m$, $\|\nu\|=1$, справедливо неравенство $\int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_k+\sigma}(\xi_k^*Q(\vartheta_k,s)\nu)^2\,ds<1/k$. Пусть $\widehat{\xi}$ — предельная точка последовательности $\{\xi_k\}$. Без ограничения общности считаем, что $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k=\widehat{\xi}$. Тогда существует $K\in\mathbb{N}$, начиная с которого

$$\int_{\vartheta_k}^{\vartheta_k+\sigma}(\widehat{\xi}^*Q(\vartheta_k,s)\nu)^2\,ds<2/k. \tag{10}$$

Докажем, что для всякого $\varepsilon>0$ существует такое k, что при всех $\nu\in\mathbb{R}^m$, $\|\nu\|=1$, и всех $t\in[\vartheta_k,\vartheta_k+\sigma]$

$$|\widehat{\xi}^*Q(\vartheta_k,t)\nu|<\varepsilon. \tag{11}$$

Действительно, пусть это не так. Тогда найдется такое $\beta>0$, что при всех $k\in\mathbb{N}$ существуют единичный вектор $\nu\in\mathbb{R}^m$ и момент времени $\widehat{t}\in[\vartheta_k,\vartheta_k+\sigma]$, для которых справедливо неравенство $|\widehat{\xi}^*Q(\vartheta_k,\widehat{t})\nu|\ge\beta$. Поскольку функция $t\mapsto Q(\vartheta_k,t)$ равномерно непрерывна на $[\vartheta_k,\vartheta_k+\sigma]$ (равномерно относительно k), то найдется такое не зависящее от k число $\delta>0$, что при всех $t\in\mathrm{B}_\delta^1(\hat{t})$ получим $|\widehat{\xi}^*Q(\vartheta_k,t)\nu|\ge\beta/2$. Поэтому $\int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_k+\sigma}(\widehat{\xi}^*Q(\vartheta_k,s)\nu)^2\,ds\ge\beta^2\delta/4$, что при достаточно больших k противоречит (10).

Из (11) следует, что $\|\widehat{\xi}^*(Q(\vartheta_k,t_1)\nu_1,\dots,Q(\vartheta_k,t_n)\nu_n)\|<n\varepsilon^2$ для любых наборов $t_1,\dots,t_n\in[\vartheta_k,\vartheta_k+\sigma]$ и $\nu_1,\dots,\nu_n\in\mathbb{R}^m$, $\|\nu_j\|=1$, а это при малых ε противоречит (8).

Необходимость. Из (9) следует, что найдется такое $\alpha_1>0$, что для каждого $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\|\xi\|=1$, и каждого $t_0\in\mathbb{R}$ существуют такие $\nu\in\mathbb{R}^m$, $\|\nu\|=1$, и $\widehat{t}\in[t_0,t_0+\sigma]$, что

$$|\xi^*Q(t_0,\widehat{t})\nu|\ge\alpha_1. \tag{12}$$

Докажем существование таких положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что для каждого t_0 найдутся $t_1, \ldots, t_n \in [t_0, t_0+\sigma]$ и $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_j\| = 1$, обеспечивающие при всех $j = 1, \ldots, n$ неравенства

$$V_j(Q(t_0, t_1)\nu_1, \ldots, Q(t_0, t_j)\nu_j) \geq \alpha_j, \tag{13}$$

где через $V_j(w_1, \ldots, w_j)$ обозначен j-мерный объем параллелотопа, натянутого на векторы $w_1, \ldots, w_j \in \mathbb{R}^n$.

Действительно, из (12) следует, что при $j = 1$ соотношение (13) выполнено. Предположим, оно доказано для всех $j \in \{1, \ldots, l-1\}$, т. е. показано существование таких $t_1, \ldots, t_{l-1}$, что (13) выполнено при всех $j \in \{1, \ldots, l-1\}$. Докажем, что на произвольном $[t_0, t_0+\sigma]$ найдется такое t_l, что (13) имеет место и для $j = l$. Предположим противное, пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $\vartheta_k \in \mathbb{R}$, что для всех $t \in [\vartheta_k, \vartheta_k + \sigma]$ и всех $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu\| = 1$, справедливо неравенство $V_l(Q(\vartheta_k, t_1)\nu_1, \ldots, Q(\vartheta_k, t_{l-1})\nu_{l-1}, Q(\vartheta_k, t)\nu) < 1/k$. Пусть L есть $(l-1)$-мерное линейное подпространство векторов $Q(\vartheta_k, t_1)\nu_1, \ldots, Q(\vartheta_k, t_{l-1})\nu_{l-1}$, M есть $(n-l+1)$-мерное линейное ортогональное ему подпространство. Обозначим через $\gamma(t) \in [0, \pi)$ угол между вектором $Q(\vartheta_k, t)\nu$ и L. Тогда

$$\begin{aligned} &V_l(Q(\vartheta_k, t_1)\nu_1, \ldots, Q(\vartheta_k, t_{l-1})\nu_{l-1}, Q(\vartheta_k, t)\nu) = \\ &\qquad = V_{l-1}(Q(\vartheta_k, t_1)\nu_1, \ldots, Q(\vartheta_k, t_{l-1})\nu_{l-1})\|Q(\vartheta_k, t)\nu\| \sin\gamma(t), \end{aligned}$$

поэтому $\|Q(\vartheta_k, t)\nu\| \sin\gamma(t) < 1/(k\alpha_{l-1})$. Пусть $r(t)$ — проекция вектора $Q(\vartheta_k, t)\nu$ на M. Выберем ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ так, что $e_1, \ldots, e_{n-l+1}$ — базис M. Тогда $|e_1^* Q(\vartheta_k, t)\nu| = |e_1^* r(t)| \leq \|r(t)\| = \|Q(\vartheta_k, t)\nu\| \sin\gamma(t) < 1/(k\alpha_{l-1})$, а это противоречит (12). Таким образом, (13) выполнено. Но

$$\begin{aligned} &|\det F(t_0)| = \sqrt{\det(F^*(t_0)F(t_0))} = \sqrt{\Gamma(Q(t_0, t_1)\nu_1, \ldots, Q(t_0, t_n)\nu_n)} = \\ &\qquad = V_n(Q(t_0, t_1)\nu_1, \ldots, Q(t_0, t_n)\nu_n) \geq \alpha_n, \end{aligned}$$

здесь через $\Gamma(w_1, \ldots, w_n)$ обозначен определитель Грама совокупности векторов $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Замечание 3. Из равномерной непрерывности функции $t \mapsto Q(t_0, t)$ на каждом из отрезков $[t_0, t_0+\sigma]$ (равномерной относительно t_0) следует, что набор моментов времени $t_1, \ldots, t_n \in [t_0, t_0+\sigma]$ из формулировки леммы 2 может быть взят так, что $|t_i - t_j| \geq \varDelta_0$ при $i \neq j$; $t_i - t_0 \geq \varDelta_0$ и $t_0 + \sigma - t_i \geq \varDelta_0$ для всех i, причем положительное число $\varDelta_0$ не зависит от t_0.

Определение 1. Скажем, что к системе (1) применимо λ-*преобразование*, если существует такое $T > 0$, что для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется управление $U \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$, обеспечивающее для матрицы Коши $Y_U(t, s)$ замкнутой системы

$$\dot{y} = (A(t) + B(t)U(t))y \tag{14}$$

равенство

$$Y_U(kT, (k-1)T) = \exp(\lambda T)X(kT, (k-1)T) \tag{15}$$

при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что определение 1 восходит к определению λ-преобразования системы (2) ([3], с. 249), которое заключается в добавлении к матрице $A(t)$ системы (2) возмущения $D(t) \equiv \lambda E$. Матрица Коши $Y(t, s)$ возмущенной системы $\dot{y} = (A(t) + D(t))y$ обладает тем свойством, что при всех $t, s \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$Y(t, s) = \exp(\lambda(t-s))X(t, s). \tag{16}$$

Из (15) следует, что для матрицы Коши системы (14) при всех $k, l \in \mathbb{Z}$ имеет место соотношение

$$Y_U(kT, lT) = \exp(\lambda(k-l)T)X(kT, lT), \tag{17}$$

аналогичное (16), но выполненное на относительно плотном на числовой прямой множестве точек $\{kT,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Теорема. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, то к ней применимо* λ*-преобразование.*

Доказательство. Пусть система (1) σ-равномерно вполне управляема. Зафиксируем любое $\lambda \in \mathbb{R}$. Построим такое управление $U \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$, что (15) будет выполнено при $T = 2\sigma$. Для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ на отрезке $I_k := [2k\sigma, (2k+1)\sigma]$ рассмотрим краевую задачу

$$\dot{Z} = A(t)Z + B(t)V(t), \tag{18}$$

$$Z(2k\sigma) = E, \quad Z((2k+1)\sigma) = X((2k+1)\sigma, 2k\sigma)\widetilde{\Lambda}, \tag{19}$$

где $\widetilde{\Lambda} \in \mathrm{M}_n$ — достаточно близкая к $\Lambda := \exp(2\lambda\sigma)E$ матрица, выбор которой будет уточнен ниже. Решение задачи (18), (19) записывается в виде

$$Z(t) = X(t, 2k\sigma)\Big(E + \int_{2k\sigma}^{t} Q(2k\sigma, s)V(s)ds\Big); \tag{20}$$

второе из условий (19) выполнено тогда и только тогда, когда

$$E + \int_{2k\sigma}^{(2k+1)\sigma} Q(2k\sigma, s)V(s)\,ds = \widetilde{\Lambda}. \tag{21}$$

Предположим, что существуют такие не зависящие от $k \in \mathbb{Z}$ числа $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$, что $\|V(t)\| \le \beta_1$ при всех $t \in I_k$, и матрица $Z(t)$, определяемая соотношениями (20) и (21), удовлетворяет неравенству $\det Z(t) \ge \beta_2$. Положим $U(t) := V(t)Z^{-1}(t)$, $t \in I_k$. Тогда $\|U(t)\|$ ограничена на I_k равномерно относительно k, а $Z(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{Z} = (A(t) + B(t)U(t))Z \tag{22}$$

и краевым условиям (19). Поэтому наша задача сводится к нахождению такой матричной функции $V(\cdot) \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$, что выполнены равенство (21) и условие

$$\det\Big(E + \int_{2k\sigma}^{t} Q(2k\sigma, s)V(s)ds\Big) \ge \gamma \tag{23}$$

при всех $t \in I_k$ и некотором, не зависящим от $k \in \mathbb{Z}$ и от t числе $\gamma > 0$.

Пусть $t_1 < \dots < t_n \in I_k$ и $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_j\| = 1$ $(j = 1, \dots, n)$, выбраны в соответствии с леммой 2 и замечанием 3. Пользуясь (7), обозначим $F = F_k = F(2k\sigma)$. Пусть $\varDelta_j$ $(j = 1, \dots, n)$ — произвольные отрезки, удовлетворяющие следующим условиям: а) $t_j \in \varDelta_j$; б) $|\varDelta_i| = \varDelta$, где значение положительной величины $\varDelta < \varDelta_0$ будет уточнено ниже ($\varDelta_0$ — из замечания 3). Очевидно, отрезки $\varDelta_j$ попарно не пересекаются и содержатся во внутренности I_k. Обозначим $\varDelta_j =: [\tau_j, \vartheta_j]$; $\tau_0 := \vartheta_0 := 2k\sigma$; $\tau_{n+1} := (2k+1)\sigma$; $V_j := \nu_j e_j^*(\Lambda - E)F_k^{-1}/\varDelta$. Тогда $\|V_j\| \le |\exp(2\lambda\sigma) - 1|\,\|F_k^{-1}\|/\varDelta \le \beta|\exp(2\lambda\sigma) - 1|/\varDelta$, где $\beta > 0$ — величина, ограничивающая сверху $\|F_k^{-1}\|$. Отметим, что β не зависит от k, — это следует из (8) и того, что $\|Q(2k\sigma, t)\| \le b\exp(a\sigma)$ при всех k.

Определим функцию $V(\cdot)$ на I_k равенствами $V(t) \equiv V_j$ при $t \in \varDelta_j$ и $V(t) \equiv 0$ при $t \in I_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} \varDelta_j$. Положим $G(t) = E + \int\limits_{2k\sigma}^{t} Q(2k\sigma, s)V(s)ds$. Очевидно, при $t \in (\vartheta_j, \tau_{j+1})$, где $j \in \{0, \dots, n\}$, имеет место тождество $G(t) \equiv G(\vartheta_j)$.

Для $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$ при $j = 1, \ldots, n$ обозначим $R_j(t) := \int\limits_{\tau_j}^{t} (Q(2k\sigma, s) - Q(2k\sigma, t_j))V(s)ds$, $S(t) := \sum\limits_{i=1}^{j-1} R_i(\vartheta_i) + R_j(t)$. При $t \in [2k\sigma, \tau_1)$ полагаем $S(t) \equiv 0$. Отметим, что для всех $t \in I_k$

$$\begin{aligned} \|S(t)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \mathit{\Delta} \cdot \|V_i\| \cdot \max_{t \in \mathit{\Delta}_i} \|Q(2k\sigma, t_i) - Q(2k\sigma, t)\| \leq \\ \leq n\beta \cdot |\exp(2\lambda\sigma) - 1| \cdot \max_{|\hat{t}_1 - \hat{t}_2| \leq \mathit{\Delta}} \|Q(2k\sigma, \hat{t}_1) - Q(2k\sigma, \hat{t}_2)\|. \end{aligned} \tag{24}$$

Поскольку функция $t \mapsto Q(2k\sigma, t)$ равномерно непрерывна на I_k, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое не зависящее от k число $\mathit{\Delta} \in (0, \mathit{\Delta}_0)$, что

$$\|S\|_C < \varepsilon. \tag{25}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{\mathit{\Delta}_j} Q(2k\sigma, s)V(s)\,ds = \int_{\mathit{\Delta}_j} Q(2k\sigma, s)V_j\,ds = \int_{\mathit{\Delta}_j} Q(2k\sigma, t_j)V_j\,ds + R_j(\vartheta_j) = \\ = \frac{1}{\mathit{\Delta}} \int_{\mathit{\Delta}_j} Q(2k\sigma, t_j)\nu_j e_j^*(\Lambda - E)F^{-1}\,ds + R_j(\vartheta_j) = \frac{1}{\mathit{\Delta}} \cdot \mathit{\Delta} \cdot F e_j e_j^*(\Lambda - E)F^{-1} + R_j(\vartheta_j) = \\ = F \cdot \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, \exp(2\lambda\sigma) - 1, 0, \ldots, 0)F^{-1} + R_j(\vartheta_j), \end{aligned}$$

где элемент $\exp(2\lambda\sigma) - 1$ находится на j-м месте. Поэтому

$$\begin{aligned} G(\vartheta_j) = E + \sum_{i=1}^{j} \int_{\mathit{\Delta}_i} Q(2k\sigma, s)V_i\,ds = \\ = F(E + \operatorname{diag}(\exp(2\lambda\sigma) - 1, \ldots, \exp(2\lambda\sigma) - 1, 0, \ldots, 0)F^{-1} + \sum_{i=1}^{j} R_i(\vartheta_i) = \\ = F \operatorname{diag}(\exp(2\lambda\sigma), \ldots, \exp(2\lambda\sigma), 1, \ldots, 1)F^{-1} + S(\vartheta_j). \end{aligned}$$

Следовательно, для $t \in \mathit{\Delta}_{j+1}$

$$\begin{aligned} G(t) = G(\vartheta_j) + \int_{\tau_{j+1}}^{t} Q(2k\sigma, t_{j+1})V_{j+1}\,ds + R_{j+1}(t) = \\ = F \operatorname{diag}(\exp(2\lambda\sigma), \ldots, \exp(2\lambda\sigma), 1, \ldots, 1)F^{-1} + \\ + \frac{t - \tau_{j+1}}{\mathit{\Delta}} F e_{j+1} e_{j+1}^*(\Lambda - E)F^{-1} + \sum_{i=1}^{j} R_i(\vartheta_i) + R_{j+1}(t) = \\ = S(t) + F \cdot \operatorname{diag}(\exp(2\lambda\sigma), \ldots, \exp(2\lambda\sigma), 1 + \frac{t - \tau_{j+1}}{\mathit{\Delta}}(\exp(2\lambda\sigma) - 1), 1, \ldots, 1)F^{-1}; \end{aligned}$$

$\det(G(t) - S(t)) = \exp(2\lambda\sigma j)\left(1 + \frac{t - \tau_{j+1}}{\mathit{\Delta}}(\exp(2\lambda\sigma) - 1)\right)$ линейно зависит от t, причем $\det(G(\tau_{j+1}) - S(\tau_{j+1})) = \exp(2\lambda\sigma j)$, $\det(G(\vartheta_{j+1}) - S(\vartheta_{j+1})) = \exp(2\lambda\sigma(j+1))$. Очевидно,

$$\min_{t \in I_k} \det(G(t) - S(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda \geq 0; \\ \exp(2n\lambda\sigma), & \text{если } \lambda < 0. \end{cases}$$

Поэтому при произвольном $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем неравенство

$$\min_{t \in I_k} \det(G(t) - S(t)) \geq \exp(-2n|\lambda|\sigma).$$

Так как определитель матрицы непрерывно зависит от ее элементов, то из (25) следует, что найдется настолько малое $\varDelta \in (0, \varDelta_0)$, что

$$\det G(t) \geq \frac{1}{2} \exp(-2n|\lambda|\sigma), \tag{26}$$

поэтому (23) выполнено.

Положим $\widetilde{\Lambda} := \Lambda + S((2k+1)\sigma)$. Тогда построенное на I_k управление $V(\cdot)$ обеспечивает соотношения (22) и (19), поэтому для матрицы Коши системы (14) имеет место равенство $Y_U((2k+1)\sigma, 2k\sigma) = X((2k+1)\sigma, 2k\sigma)\widetilde{\Lambda}$. Кроме того, из (24) следует, что $\|\widetilde{\Lambda} - \Lambda\| \leq n\beta|\exp(2\lambda\sigma) - 1| \max\limits_{|\widehat{t}_1 - \widehat{t}_2| \leq \varDelta} \|Q(2k\sigma, \widehat{t}_1) - Q(2k\sigma, \widehat{t}_2)\|$.

Известно [4], что σ-равномерно вполне управляемая система (1) обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякой матрицы $H \in \mathrm{B}_\delta(E)$ и любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется управление $U \in \mathrm{KC}_{m,n}([t_0, t_0 + \sigma])$, $\|U\| < \varepsilon$, обеспечивающее для матрицы Коши системы (14) равенство

$$Y_U(t_0 + \sigma, t_0) = HX(t_0 + \sigma, t_0). \tag{27}$$

Возьмем $\varepsilon = 1$ и по нему найдем величину $\widehat{\delta} := \delta(1)$. Построим в соответствии с этим свойством на отрезке $[(2k+1)\sigma, 2(k+1)\sigma]$ такое кусочно-непрерывное управление $U(\cdot)$, что выполнено (27) с $t_0 = (2k+1)\sigma$ и $H = \Lambda X(2(k+1)\sigma, 2k\sigma)\widetilde{\Lambda}^{-1} X(2k\sigma, 2(k+1)\sigma)$. Заметим, что матрицы Λ и $X(2(k+1)\sigma, 2k\sigma)$ коммутируют, поэтому $\|H - E\| \leq \exp(4a\sigma)\|\Lambda\widetilde{\Lambda}^{-1} - E\| \leq \exp(4a\sigma)\|\Lambda - \widetilde{\Lambda}\|\,\|\widetilde{\Lambda}^{-1}\| \leq \|\widetilde{\Lambda}^{-1}\| \exp(4a\sigma)|\exp(2\lambda\sigma) - 1|n\beta \max\limits_{|\widehat{t}_1 - \widehat{t}_2| \leq \varDelta} \|Q(2k\sigma, \widehat{t}_1) - Q(2k\sigma, \widehat{t}_2)\|$. Выберем величину $\varDelta$ настолько малой, чтобы $\|H - E\| < \widehat{\delta}$ и чтобы было выполнено (26). Это можно сделать в силу равномерной непрерывности функции Q. Тогда равенство (27) с выбранной H имеет место и

$$\begin{aligned}
Y_U(2(k+1)\sigma, 2k\sigma) &= Y_U(2(k+1)\sigma, (2k+1)\sigma) Y_U((2k+1)\sigma, 2k\sigma) = \\
&= HX(2(k+1)\sigma, (2k+1)\sigma) X((2k+1)\sigma, 2k\sigma)\widetilde{\Lambda} = \\
&= \Lambda X(2(k+1)\sigma, 2k\sigma)\widetilde{\Lambda}^{-1} X(2k\sigma, 2(k+1)\sigma) X(2(k+1)\sigma, (2k+1)\sigma) X((2k+1)\sigma, 2k\sigma)\widetilde{\Lambda} = \\
&= \Lambda X(2(k+1)\sigma, 2k\sigma). \quad \square
\end{aligned}$$

Следствие 1. Если система (1) равномерно вполне управляема, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется такое управление $U \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$, что показатели Ляпунова возмущенной системы (14) удовлетворяют равенствам $\lambda_j(A + BU) = \lambda_j(A) + \lambda$ при всех $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\lambda \in \mathbb{R}$ и построим в соответствии с доказанной теоремой такое $U \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$, что выполнено (15). Пусть $x(\cdot)$ — произвольное нетривиальное решение системы (2). Для решения $y(\cdot)$ системы (14) с начальным условием $y(0) = x(0)$ имеем

$$\begin{aligned}
\lambda(y) &= \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln\|y(t)\|}{t} = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\ln\|y(kT)\|}{kT} = \\
&= \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\ln\|Y_U(kT, 0)y(0)\|}{kT} = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\ln\|\exp(\lambda kT) X(kT, 0)x(0)\|}{kT} = \\
&= \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\ln(\exp(\lambda kT)\|x(kT)\|)}{kT} = \lambda(x) + \lambda.
\end{aligned}$$

Мы здесь воспользовались тем свойством, что показатель Ляпунова может быть вычислен на произвольной относительно плотной на числовой прямой последовательности моментов времени $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ (напр., [4]), а также соотношением (17). $\square$

Следствие 2. Если система (1) равномерно вполне управляема, то для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ и любого $y_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ существует такое $U \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$, что решение $y(\cdot)$ уравнения (14) с начальным условием $y(0) = y_0$ имеет характеристический показатель Ляпунова, равный μ.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\mu \in \mathbb{R}$ и $y_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим решение $x(\cdot)$ уравнения (2) с начальным условием $x(0) = y_0$. Пусть $\lambda(x)$ — показатель Ляпунова этого решения. Возьмем $\lambda := \mu - \lambda(x)$. Пользуясь теоремой, построим такое управление $U \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$, что имеет место (15). Тогда решение $y(\cdot)$ уравнения (14) с начальным условием $y(0) = y_0$ имеет показатель, равный $\lambda(y) = \lambda(x) + \lambda = \mu$. $\square$

Напомним ([3], с. 116), что верхним центральным показателем системы (2) называется величина

$$\Omega(A) := \lim_{T\to\infty} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \sum_{j=1}^{k} \ln \|X(jT,(j-1)T)\|.$$

Известно ([3], с. 164), что $\Omega(A)$ служит точной верхней границей подвижности показателей Ляпунова системы (2) при малых возмущениях ее коэффициентов. Верхний центральный показатель может быть вычислен на произвольной последовательности $\{T_l\}_{l=1}^{\infty}$ с условием $\lim\limits_{l\to\infty} T_l = +\infty$ ([3], с. 106–107).

Определение 2. Система (1) обладает свойством *глобальной управляемости верхнего центрального показателя*, если для любого $\mu \in \mathbb{R}$ найдется такое управление $U \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$, что верхний центральный показатель $\Omega(A+BU)$ возмущенной системы (14) удовлетворяет равенству $\Omega(A+BU) = \mu$.

Следствие 3. Если система (1) равномерно вполне управляема, то (1) обладает свойством глобальной управляемости верхнего центрального показателя.

Доказательство. Пусть $U \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$ такова, что (15) выполнено с числом $\lambda := \mu - \Omega(A)$. Возьмем $T_l = lT$. Тогда, используя (17), получим

$$\Omega(A+BU) = \lim_{l\to\infty} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{klT} \sum_{j=1}^{k} \ln \|Y_U(jlT,(j-1)lT)\| =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{klT} \sum_{j=1}^{k} (\lambda lT + \ln \|X(jlT,(j-1)lT)\|) = \lambda + \Omega(A) = \mu. \quad \square$$

Замечание 4. Очевидно, что в случае равномерной полной управляемости системы (1) свойством глобальной управляемости обладают нижний центральный ω, а также верхний Ω^0 и нижний ω_0 особые показатели ([3], с. 117). Отметим, что следствие 3 дополняет исследования работы [2], в которой была доказана возможность построения для произвольного $\alpha > 0$ такого управления $U \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$, что верхний особый показатель системы (14) удовлетворяет неравенству $\Omega^0(A+BU) < -\alpha$.

Литература

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. *Очерки по математической теории систем.* – М.: Мир, 1971. – 400 с.
2. Тонков Е.Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 10. – С. 1804–1813.
3. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* – М.: Наука, 1966. – 576 с.
4. Попова С.Н. *К вопросу об управлении показателями Ляпунова* // Вестн. Удмуртск. ун-та. – 1992. – № 1. – С. 23–39.

Институт математики Национальной Академии наук Белоруссии

Удмуртский государственный университет

Поступила
03.03.1998