ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 10 (533)

УДК 517.958

В.П. ОРЛОВ

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

1. Введение

Пусть $\Omega_t \in R^n$, $n \geq 2$, является семейством ограниченных областей с границей Γ_t, $\mathcal{Q}_{T_0} = \{(t,x) : t \in [0,T_0],\ x \in \Omega_t\}$, $\mathcal{S}_{T_0} = \{(t,x) : t \in [0,T_0],\ x \in \Gamma_t\}$. Изучается начально-граничная задача

$$V_t + \sum_{i=1}^{n} V_i \partial V/\partial x_i - \mu \triangle V - \operatorname{Div} G(B_x(V)) - \nabla Q = F(t,x), \tag{1.1}$$

$$\nabla V(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathcal{Q}_{T_0};$$

$$V(0,x) = v^0(x), \quad x \in \Omega_0, \quad T(V,Q)n(x) = -n(x)P_0(t,x), \quad (t,x) \in \mathcal{S}_{T_0}, \tag{1.2}$$

описывающая движение сплошной среды, занимающей в момент времени $t = 0$ положение Ω_0. Здесь вектор-функция $V(t,x) = (V_1(t,x), \ldots, V_n(t,x))$ — скорость среды в точке x в момент t, скалярная функция $Q(t,x)$ — давление, $T(V,Q)$ — $n \times n$-матрица с коэффициентами

$$T_{ij} = -\delta_{ij} Q + \mu(\partial V_i/\partial x_j + \partial V_j/\partial x_i),$$

μ — положительная константа, $G(Z)$ — $n \times n$-матрица с коэффициентами $g_{ij}(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nn})$ (z_{ij} — коэффициенты матрицы Z), $n(x)$ — вектор внешней нормали к границе Γ_t в точке x, Div — дивергенция матрицы [1]. Далее $B(V) = z(0;t,x)$, где $z(\tau;t,x)$ определяется как решение задачи Коши (в интегральной форме)

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau V(s, z(s;t,x))ds, \quad \tau \in [0,T_0], \quad (t,x) \in \mathcal{Q}_{T_0},$$

а $B_x(V) = z_x(0;t,x)$ — матрица Якоби для $z(0;t,x)$. Матрица $B_x(V)$ характеризует деформацию окрестности частицы $y \in \Omega_0$, находящейся в точке x в момент времени t, при движении по траектории поля скоростей среды V. Таким образом, матрица $G(B_x(V))$ описывает упругие напряжения среды. Как следует из (1.1), среда помнит упругие напряжения вдоль траекторий поля скоростей в начальный момент времени, а не только в точке x в момент t. В задаче (1.1)–(1.2) искомыми являются вектор-функция V, скалярная функция Q и множество $\mathcal{Q}_{T_0}$.

Система (1.1)–(1.2) описывает движение вязкоупругой сплошной среды со свободной границей. В случае цилиндрической области $\mathcal{Q}_{T_0}$ ($\Omega_t \equiv \Omega_0$) в [1] установлена локальная теорема существования и единственности сильных решений задачи (1.1)–(1.2) в соболевских пространствах при необходимых условиях на данные. В [2] установлена нелокальная теорема существования и единственности сильных решений для одной модели вязкоупругости в соболевских пространствах при малых данных. В случае $G \equiv 0$ система (1.1)–(1.2) описывает движение ньютоновской сплошной среды со свободной границей. В [3] при условии дифференцируемости по x функций F и P_0 установлена локальная теорема существования и единственности сильных решений задачи (1.1)–(1.2) в гельдеровских пространствах. Ниже, опираясь на результаты [3], устанавливаем

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00081.

аналогичный результат для случая $G \not\equiv 0$. Ограничиваемся здесь простейшим случаем учета упругих напряжений в момент $t = 0$ в точке x, хотя тот же результат устанавливается аналогичным образом и для случая учета напряжений вдоль всей траектории $z(\tau; t, x)$ движения частицы $y = z(0; t, x)$ (как и в [4], в уравнении движения в этом случае появляется слагаемое $\int\limits_0^t \operatorname{Div} G(z_x(s; t, x))\, ds$). В этой связи отметим работы, посвященные доказательству существования слабых решений для таких сред (напр., [5], [6]).

Возникающие в оценках различные константы, не зависящие от существенных параметров, обозначаются через M.

2. Вспомогательные результаты

2.1. *Предварительные построения.* Пусть $v(t, y)$ — гладкая вектор-функция на $Q_T = \{(t, y) : t \in [0, T],\ y \in \Omega_0\}$,

$$u(t, y) = y + \int_0^t v(s, y)\, ds, \quad (t, y) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$\Omega_t = \{x : x = u(t, y),\ y \in \Omega_0\}$, $S_T = \{(t, y) : t \in [0, T],\ y \in \Gamma_0\}$.

Соотношение (2.1) задает (по крайней мере для малых t) диффеоморфизм Ω_0 на Ω_t. Пусть $U(t, x)$ — обратное к $u(t, y)$ преобразование. Пусть $h(t, y)$ — произвольная достаточно гладкая на Q_T вектор-функция. Поставим ей в соответствие определенную на $\mathcal{Q}_T$ вектор-функцию $H(t, x) = h(t, U(t, x))$. В дальнейшем пара функций (в том числе и скалярных), обозначенных большой и малой буквами (напр., H и h), предполагаются связанными соотношениями $H(t, x) = h(t, U(t, x))$, $H(t, u(t, y)) = h(t, y)$. Эти соотношения задают оператор $\mathcal{A}_v : \mathcal{A}_v(h) = H$ и обратный к нему оператор $\mathcal{B}_v : \mathcal{B}_v(H) = h$. В частности, для v и $\mathcal{B}_v(v) = V$ справедливы соотношения

$$V(t, x) = v(t, U(t, x)), \quad V(t, u(t, y)) = v(t, y). \tag{2.2}$$

Заметим, что $u_y(t, y) = U_x(t, u(t, y))$, $U_x(t, x) = u_y(t, U(t, x))$, и если $\nabla V(t, x) = 0$, то

$$\det U_x(t, x) = 1, \quad \det u_y(t, y) = 1. \tag{2.3}$$

2.2. *Задача* (1.1)–(1.2) *в лагранжевых координатах.* Перейдем в системе (1.1)–(1.2) от эйлеровых координат x к лагранжевым координатам y, сделав замену переменной

$$x = z(0; t, x) \equiv u(t, y), \quad y \in \Omega_0. \tag{2.4}$$

Введем обозначение $v(t, y) = u_t(t, y)$. Тогда справедливы формулы (2.1)–(2.3). Сделав в (1.1)–(1.2) замену переменной (2.4), с учетом вышеупомянутых соотношений получаем задачу

$$v_t - \mu \triangle_v v + \nabla_v q = F^{(v)}(t, y) + \psi^{(v)}(t, y), \quad \operatorname{div}_v v = 0; \quad (t, y) \in Q_{T_0}; \tag{2.5}$$

$$v(0, y) = v_0(y), \quad y \in \Omega_0; \quad T_v(v, q) n_v(y) = -P_0^{(v)}(t, y) n_v(y), \quad (t, y) \in S_{T_0}. \tag{2.6}$$

Здесь $v(t, y) = V(t, u(t, y))$, $q(t, y) = Q(t, u(t, y))$, $F^{(v)}(t, y) = F(t, u(t, y))$, $P_0^{(v)}(t, y) = P_0(t, u(t, y))$, $n_v(y) = n(u(t, y))$, $T_v(v, q) = \mathcal{B}_v(T(V, Q))$, $\psi^{(v)}(t, y) = \mathcal{B}_v(\operatorname{Div} G(B_x(V)))$. При этом

$$\nabla_v p = \mathcal{B}_v(\nabla P), \quad \triangle_v h = \mathcal{B}_v(\triangle H), \quad \operatorname{div}_v v = \mathcal{B}_v(\nabla V)$$

для произвольных скалярной P и вектор-функции H. Положим $V(t, x) = v(t, U(t, x))$, $Q(t, x) = q(t, U(t, x))$, $\Omega_t = \{x : x = u(t, y),\ y \in \Omega_0\}$ (u определяется через (2.4)).

3. Функциональные пространства

Для формулировки результатов понадобится ряд функциональных пространств [3]. Будем далее предполагать, что $\partial\Omega_0 \in C^{2+\alpha}$. Обозначим через $C^{r+\alpha}(\Omega_0)$, $r \geq 0$ целое, банахово пространство функций, имеющих непрерывные производные в $\overline{\Omega}_0$ до порядка r включительно, с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{r+\alpha}(\Omega_0)} = \|u\|_{C^r(\overline{\Omega}_0)} + \sum_{|k|=r} [D_k u]_{\alpha,\Omega_0},$$
$$[D_k u]_{\alpha,\Omega_0} = \sup_{x,y\in\Omega_0} |u(x) - u(y)|\,|x-y|^{-\alpha}.$$

Здесь $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $|k| = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, $D_k u = \partial^{|k|}u/\partial x^{k_1}, \ldots, \partial x^{k_n}$. Обозначим через $C^{r+\alpha}(Q_T)$ при $r = 0, 1, 2$ банахово пространство определенных на $\overline{Q}_T$ функций с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{\alpha}(Q_T)} = \|u\|_{C(\overline{Q}_T)} + [u]_{\alpha,Q_T} \quad (r=0),$$
$$[u]_{\alpha,Q_T} = [u]_{\alpha,t,Q_T} + [u]_{\alpha,x,Q_T},$$
$$[u]_{\alpha,t,Q_T} = \sup_{t,\tau,x} |u(t,x) - u(\tau,x)|\,|t-\tau|^{-\alpha/2},$$
$$[u]_{\alpha,x,Q_T} = \sup_{t,x,y} |u(t,x) - u(t,y)|\,|x-y|^{-\alpha},$$
$$\|u\|_{C^{1+\alpha}(Q_T)} = \|u\|_{C(\overline{Q}_T)} + \sum_{i=1}^{n} [\partial u/\partial x_i]_{\alpha,Q_T} + [u]_{1+\alpha,t,Q_T} \quad (r=1),$$
$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} = \|u\|_{C^1(\overline{Q}_T)} + \sum_{i,j=1}^{n} [\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j]_{\alpha,Q_T} + [\partial u/\partial t]_{\alpha,t,Q_T} + \sum_{i=1}^{n} [\partial u/\partial x_i]_{1+\alpha,t,Q_T} \quad (r=2).$$

Понадобится также банахово пространство $\widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(Q_T)$, $\gamma \in (0,1)$, определенных на $\overline{Q}_T$ функций с конечной нормой

$$\|u\|_{\widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(Q_T)} = \|u\|_{C(\overline{Q}_T)} + \sum_{i=1}^{n} [\partial u/\partial x_i]_{C^{\alpha}(Q_T)} +]u[,$$
$$]u[= \sup_{x,y,t,\tau} |u(t,x) - u(t,y) - u(\tau,x) + u(\tau,y)|\,|t-\tau|^{-(1+\alpha-\gamma)/2}.$$

Аналогично определяются пространства $C^{r+\alpha}(\Pi_T)$, $\widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(\Pi_T)$.

4. Формулировка результатов

Определение 4.1. Решением задачи (2.5)–(2.6) называется пара (v, q), $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$, $q \in \widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(Q_T)$, удовлетворяющая уравнениям (2.5) и условиям (2.6).

Теорема 4.1. *Пусть $F, F_x \in C^{1+\alpha}(\Pi_{T_0})$, $P_0, (P_0)_x \in \widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(\Pi_{T_0})$ при некоторых $\alpha, \gamma \in (0,1)$. Тогда при достаточно малом $T \in (0, T_0]$ задача (2.5)–(2.6) имеет по крайней мере одно решение.*

Замечание 4.1. Величина T на самом деле зависит от $\|F\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{T_0})}$, $\|P_0\|_{\widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(\Pi_{T_0})}$, Ω_0 и может быть оценена через данные задачи.

Замечание 4.2. Как и в [3], опускаем переформулировку результата в терминах задачи (1.1)–(1.2).

5. Доказательство теоремы 4.1

5.1. *Случай* $G \equiv 0$. Пусть дана пара (v, q), $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$, $\nabla_v v = 0$, $q \in \widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(Q_T)$, удовлетворяющая условиям (2.6). Оператор $\mathcal{L}(v, q) = v_t - \mu\triangle_v v + \nabla_v q$ определен на функциях, удовлетворяющих (2.6) и $\operatorname{div}_v v = 0$. В [3] установлена локальная разрешимость задачи

$$\mathcal{L}(v, q) = F^{(v)}(t, y). \tag{5.1}$$

Приведем этот результат в форме, удобной для дальнейшего.

Лемма 5.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 4.1. *Пусть* $\|F\|_{C^{\alpha}(\Pi_{T_0})} \le R_1$, $\|P_0\|_{\bar{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(\Pi_{T_0})} \le R_2$. *Тогда найдется такое достаточно малое* $T_1 = T_1(R_1, R_2)$, *что при* $T \le T_1$ *задача* (5.1) *имеет единственное решение* (v, q), $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$, $\nabla_v v = 0$, $q \in \widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(Q_T)$, *и справедлива оценка*

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} + \|q\|_{\widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(Q_T)} \le M(R_1, R_2).$$

Замечание 5.1. Условие на дифференцируемость функций F и P_0 использовалось лишь при доказательстве единственности решения.

Рассмотрим возмущенную задачу (5.1):

$$\mathcal{L}(v, q) = F^{(v)}(t, y) + \psi(t, y), \tag{5.2}$$

где $\psi(t, y) \in C^{\alpha}(Q_T)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 5.1. *Предположим, что* $\|\psi(t, y)\|_{C^{\alpha}(Q_T)} \le R_3$. *Тогда найдется такое достаточно малое* $T_2 = T_2(R_1, R_2, R_3) \le T_0$, *что при* $T \le T_2$ *задача* (5.2) *имеет единственное решение* (v, q), $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$, $\nabla_v v = 0$, $q \in \widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(Q_T)$, *и справедлива оценка*

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} + \|q\|_{\widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(Q_T)} \le M_1(R_1, R_2, R_3).$$

Доказательство по существу повторяет доказательство леммы 5.1 (изящное, но связанное с весьма продолжительными выкладками [3]). При этом возмущение $\psi(t, y)$, не зависящее от v, играет роль параметра, влияя лишь на величину T_2.

5.2. *Случай* $G \not\equiv 0$. Для того чтобы сократить выкладки, упростим в уравнении (2.5) слагаемое $\psi^{(v)}(t, y)$. В силу гладкости матричной функции G с учетом структуры выражения $\mathcal{B}_v(\operatorname{Div} G(B_x(V)))$ можем в задаче (2.5)–(2.6), без ограничения общности, заменить выражение $\psi^{(v)}(t, y) = \mathcal{B}_v(\operatorname{Div} G(B_x(V)))$ на

$$\psi^{(v)}(t, y) = \operatorname{Div} G(Z(v)), \quad Z(v) = \left(I + \int_0^t v_y(s, y)ds\right)\left(I + \int_0^t v_y^*(s, y)ds\right)^{-1}, \tag{5.3}$$

поскольку коэффициенты векторов в правых частях двух последних соотношений имеют одинаковую структуру. Здесь $*$ означает переход к сопряженной матрице. В частности, если $G(Z) \equiv Z$, то правая часть (5.3) совпадает с $\mathcal{B}_v(\operatorname{Div} B_x(V))$.

Итак, будем полагать в (2.5) выражение $\psi^{(v)}(t, y)$ определенным формулой (5.3).

Для доказательства разрешимости задачи

$$\mathcal{L}(v, q) = F^{(v)}(t, y) + \psi^{(v)}(t, y) \tag{5.4}$$

докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 5.2. *Пусть* $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$, $\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} \le R_4$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\psi^{(v)}\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} \le \Phi(R_4)T^{1-\alpha}, \tag{5.5}$$

где $\Phi(x)$ — *некоторая непрерывная функция от* $x \in [0, \infty)$.

Доказательство. Из условия $\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} \le R_4$ вытекает, что коэффициенты z_{ij} матрицы $Z(v)$ лежат в некотором шаре пространства R^{n^2} радиуса $R_5 = R_5(R_4)$ с центром в нуле и являются непрерывными функциями аргументов $\int\limits_0^t \partial v_k(s,y)/\partial y_m ds$, $k, m = 1, \dots, n$.

Таким образом, коэффициенты $\widetilde{g}_{ij}$ матрицы $G(Z(v))$ также имеют вид

$$\widetilde{g}_{ij}(v) = r_{ij}\Big(\int_0^t \partial v_1(s,y)/\partial y_1 ds, \dots, \int_0^t \partial v_n(s,y)/\partial y_n\, ds\Big),$$

где $r_{ij}(p_{11}, \dots, p_{nn})$ — гладкие функции своих аргументов, а

$$\partial \widetilde{g}_{ij}/\partial y_k = \sum_{l,m=1}^n \partial r_{ij}/\partial p_{lm}\Big(\int_0^t \partial v_1(s,y)/\partial y_1 ds, \dots, \int_0^t \partial v_n(s,y)/\partial y_n\, ds\Big)\int_0^t \partial^2 v_l(s,y)/\partial y_k \partial y_m ds.$$

Из последней формулы вытекает, что коэффициенты $\psi_i^{(v)}$ вектор-функции $\psi^{(v)}$ имеют вид

$$\psi_i^{(v)} = \sum_{j=1}^n \partial \widetilde{g}_{ij}/\partial y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{l,m=1}^n \partial r_{ij}/\partial p_{lm}\Big(\int_0^t \partial v_1(s,y)/\partial y_1\, ds, \dots$$
$$\dots, \int_0^t \partial v_n(s,y)/\partial y_n\, ds\Big)\int_0^t \partial^2 v_l(s,y)/\partial y_j \partial y_m ds. \quad (5.6)$$

Легко проверяются неравенства

$$\|\varphi\psi\|_{C^\alpha(Q_T)} \le M\|\varphi\|_{C^\alpha(Q_T)}\|\psi\|_{C^\alpha(Q_T)}, \quad (5.7)$$
$$\|f(\varphi)\|_{C^\alpha(Q_T)} \le M\|\varphi\|_{C^\alpha(Q_T)}, \quad (5.8)$$

где φ, ψ — произвольные функции из $C^\alpha(Q_T)$, а f — некоторая гладкая функция. Для оценки $\|\psi\|_{C^\alpha(Q_T)}$ достаточно оценить нормы

$$\Big\|\int_0^t \partial v_l(s,y)/\partial y_j\, ds\Big\|_{C^\alpha(Q_T)}, \quad \Big\|\int_0^t \partial^2 v_l(s,y)/\partial y_j \partial y_m ds\Big\|_{C^\alpha(Q_T)}.$$

Используя элементарные соображения, имеем

$$\Big\|\int_0^t \partial v_l(s,y)/\partial y_j ds\Big\|_{C^\alpha(Q_T)} \le MT^{1-\alpha}\|v\|_{C^{1+\alpha}(Q_T)}, \quad (5.9)$$
$$\Big\|\int_0^t \partial^2 v_l(s,y)/\partial y_j \partial y_m ds\Big\|_{C^\alpha(Q_T)} \le MT^{1-\alpha}\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)}. \quad (5.10)$$

Из оценок (5.7)–(5.10) и (5.6) в силу гладкости функций r_{ij} вытекает

$$\|\psi^{(v)}\|_{C^\alpha(Q_T)} \le M_3(R_4)T^{1-\alpha},$$

откуда следует (5.5) с $\Phi(x) = M_3(R_4)T^{1-\alpha}$. $\square$

Перейдем непосредственно к доказательству разрешимости задачи (5.4).

Теорема 5.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 4.1. *Тогда при достаточно малом* $T \in (0, T_0]$ *задача* (5.4) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть

$$u \in B(R_0) = \{u : u \in C^{2+\alpha}(Q_T),\ \ T \le T_0,\ \ \|u\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} \le R_0\}.$$

Рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}(v,q) = F^{(v)}(t,y) + \psi^{(u)}(t,y) \quad (5.11)$$

при произвольной $u \in B(R_0)$. Из (5.5) следует

$$\|\psi^{(u)}\|_{C^\alpha(Q_T)} \le T^{1-\alpha}\Phi(R_0) \equiv R_3.$$

В силу теоремы 5.1 при фиксированных F и P_0 получаем существование и единственность решения (v,q) задачи (5.11) на промежутке $[0,T]$, $T \le T_2(R_1,R_2,T^{1-\alpha}\Phi(R_0))$, причем

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} + \|q\|_{\bar{C}^{2+\alpha}_\gamma(Q_T)} \le M_1(R_1,R_2,R_3) = M_1(R_1,R_2,T^{1-\alpha}\Phi(R_0)).$$

Считая R_3 постоянным, выберем R_0 настолько большим, а T_3 настолько малым, чтобы при $T \le T_3$ выполнялось неравенство

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} + \|q\|_{\bar{C}^{1+\alpha}_\gamma(Q_T)} \le R_0.$$

Обозначим через $\mathcal{R}$ оператор, ставящий в соответствие $u \in B(R_0)$ решение v задачи (5.11). Последнее неравенство означает, что оператор $\mathcal{R}$ переводит шар $B(R_0)$ в себя. $\square$

Пусть $v^0(t,y) = v_0(y)$, T и R_0 таковы, что $\mathcal{R}B(R_0) \subset B(R_0)$, а $v^0 \in B(R_0)$. Пусть v^n, q^n — последовательность решений уравнения (5.11) при $u = v^{n-1}$, $n = 1,2,\dots$ Так как $v^n = \mathcal{R}v^{n-1}$, то $v^n \in B(R_0)$. Следуя [3], покажем, что последовательность v^n сходится в норме $C^{2+\alpha'}(Q_T)$, а q^n — в норме $\widetilde{C}^{2+\alpha'}_{\gamma'}(Q_T)$. Здесь $\alpha' \in (0,\alpha)$ — произвольное число, а $\gamma' = \max(\gamma, 1+\alpha'-\alpha)$.

Лемма 5.3. *При произвольном $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство*

$$\|v^n - v^{n-1}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \|q^n - q^{n-1}\|_{\bar{C}^{2+\alpha'}_{\gamma'}(Q_T)} \le M(\varepsilon\|v^n - v^{n-1}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \\ + C(\varepsilon)\int_0^T \|v(s,y)\|_{C^{2+\alpha}(Q_s)}\,ds + \|\psi^{(v^{n-1})} - \psi^{(v^{n-2})}\|_{C^\alpha(Q_T)}). \quad (5.12)$$

Для доказательства нужно повторить рассуждения, проведенные при обосновании единственности в теореме 5 из [3]. При этом дополнительные слагаемые в правой части (5.11), содержащие $\psi^{(u^2)}$ и $\psi^{(u^1)}$, обусловливают появление последнего слагаемого в (5.12).

Лемма 5.4. *Пусть даны произвольные функции $v^1, v^2 \in B(R_0)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|\psi^{(v^2)} - \psi^{(v^1)}\|_{C^{\alpha'}(Q_T)} \le M_4(R_0)T^{1-\alpha}\|v^2 - v^1\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)}. \quad (5.13)$$

Доказательство. Из формулы (5.6) следует

$$\Delta_i = \psi_i^{(v^2)} - \psi_i^{(v^1)} = \sum_{j=1}^n \sum_{l,m=1}^n \Big[\frac{\partial r_{ij}}{\partial p_{lm}}\Big(\int_0^t \partial v_1^2(s,y)/\partial y_1\,ds, \dots, \int_0^t \partial v_n^2(s,y)/\partial y_n ds\Big) - \\ - \frac{\partial r_{ij}}{\partial p_{lm}}\Big(\int_0^t \partial v_1^1(s,y)/\partial y_1\,ds, \dots, \int_0^t \partial v_n^1(s,y)/\partial y_n ds\Big)\Big]\int_0^t \partial^2 v_l^2(s,y)/\partial y_j \partial y_m ds + \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{l,m=1}^n \frac{\partial r_{ij}}{\partial p_{lm}}\Big(\int_0^t \partial v_1^1(s,y)/\partial y_1\,ds, \dots, \int_0^t \partial v_n^1(s,y)/\partial y_n\,ds\Big) \times \\ \times \Big[\int_0^t \partial^2 v_l^2(s,y)/\partial y_j \partial y_m ds - \int_0^t \partial^2 v_l^1(s,y)/\partial y_j \partial y_m ds\Big].$$

Используя неравенства (5.7) и (5.8) для оценки $C^{\alpha'}(Q_T)$-нормы от Δ_i, так же, как при доказательстве леммы 5.2, получаем

$$\|\Delta_i\|_{C^{\alpha'}(Q_T)} \le MT^{1-\alpha}\|v^2 - v^1\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)}(\|v^2\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \|v^1\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)}).$$

Отсюда следует (5.13). $\square$

Из оценок (5.12) и (5.13) следует

$$\|v^n - v^{n-1}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \|q^n - q^{n-1}\|_{\widetilde{C}^{2+\alpha'}_{\gamma'}(Q_T)} \le M\Big(\varepsilon\|v^n - v^{n-1}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \\ + C_\varepsilon \int_0^T \|v(s,y)\|_{C^{2+\alpha}(Q_s)} ds + M_4(R_0)T^{1-\alpha}\|v^{n-1} - v^{n-2}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)}\Big). \quad (5.14)$$

Воспользовавшись тем, что $\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_s)} \le \|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)}$ при $s \le T$ и полагая $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ достаточно малыми, из (5.14) получаем

$$\|v^n - v^{n-1}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \|q^n - q^{n-1}\|_{\widetilde{C}^{2+\alpha'}_{\gamma}(Q_T)} \le \frac{1}{2}\|v^{n-1} - v^{n-2}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)}. \quad (5.15)$$

В силу (5.15) последовательности v^n и q^n сходятся к некоторым функциям $v \in C^{2+\alpha'}(Q_T)$ и $q \in \widetilde{C}^{2+\alpha'}_{\gamma'}(Q_T)$ соответственно. Равномерная ограниченность норм $\|v^n\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)}$, $\|q^n\|_{\widetilde{C}^{2+\alpha}_{\gamma}(Q_T)}$ влечет [3] включения $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$ и $q \in \widetilde{C}^{2+\alpha}_{\gamma}(Q_T)$. Ясно, что пара (v, q) является решением уравнения (5.4). В силу неравенства (5.13) обоснование единственности с небольшими несущественными изменениями повторяет доказательство единственности в теореме 5 из [3] для задачи (5.1). Теорема 5.2 доказана.

Нетрудно видеть, что однозначная разрешимость уравнения (5.4) равносильна однозначной разрешимости задачи (2.5), (2.6). Таким образом, теорема 4.1 доказана.

Литература

1. Орлов В.П., Соболевский П.Е. *Исследование математических моделей вязкоупругости* // ДАН УССР. Сер. А. – 1989. – № 10. – С. 31–35.
2. Орлов В.П. *Об устойчивости нулевого решения математической модели вязкоупругой жидкости* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 3. – С. 82–84.
3. Солонников В.А. *Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью* // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1975. – Вып. 23. – С. 182–197.
4. Orlov V.P., Sobolevskii P.E. *On mathematical model of viscoelasticity with a memory* // Diff. and Integral Equat. – 1991. – V. 4. – № 1. – P. 89–101.
5. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О слабых решениях начально-граничных задач для уравнений движения вязкоупругой жидкости* // Докл. РАН. – 2001. – Т. 380. – № 3. – С. 308–311.
6. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. *Topological degree method in the equations of Navier–Stokes type* // Abstr. and Appl. Anal. – 1997. – V. 1–2. – P. 1–45.

Воронежский государственный университет

Поступила 10.03.2005