И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.929

М.Ж. АЛВЕШ

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С НЕСУММИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

1. Пространство B_p^v

Обозначим через C пространство непрерывных функций $x : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^1$ с нормой $\|x\|_C \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$, через L_p $(1 \le p < \infty)$ — пространство классов эквивалентных суммируемых в p-й степени функций $x : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^1$ с нормой $\|x\|_{L_p} \overset{\text{def}}{=} \Big(\int\limits_0^1 |x(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}$, а через L_∞ — пространство классов эквивалентных измеримых и ограниченных в существенном функций $x : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^1$ с нормой $\|x\|_{L_\infty} \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$. Пусть $v : [0,1] \longrightarrow [0,+\infty]$ — неубывающая положительная на $(0,1]$ функция.

Определение 1 ([1]). B_p^v $(1 \le p < \infty)$ — пространство классов эквивалентных измеримых функций $x : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^1$ таких, что для каждой функции $x \in B_p^v$ существует константа $M_x \ge 0$, для которой всюду на $[0,1)$ выполнено неравенство $\int\limits_0^t |x(s)|^p\,ds \le M_x^p\,v(t)$.

В качестве нормы $\|x\|_{B_p^v}$ элемента $x \in B_p^v$ можно взять величину $\|x\|_{B_p^v} \overset{\text{def}}{=} \inf M_x$. Норму $\|x\|_{B_p^v}$ элемента $x \in B_p^v$ можно также определять как $\|x\|_{B_p^v} \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{0<t<1}\Big(\frac{1}{v(t)}\int\limits_0^t |x(s)|^p\,ds\Big)^{1/p}$. При $p = \infty$ через B_∞^v определим пространство классов эквивалентных измеримых функций $x : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^1$ таких, что для каждой функции $x \in B_p^v$ существует константа $M_x \ge 0$, для которой всюду на $(0,1)$ выполнено неравенство $\operatorname*{vrai\,sup}\limits_{0\le s\le t}|x(s)| \le M_x\,v(t)$. Норму $\|x\|_{B_\infty^v}$ элемента $x \in B_\infty^v$ определяем выражением $\|x\|_{B_\infty^v} \overset{\text{def}}{=} \inf M_x$. Норму $\|x\|_{B_\infty^v}$ элемента $x \in B_\infty^v$ можно также определять как $\|x\|_{B_\infty^v} \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{0<t<1}\big(\frac{1}{v(t)}\operatorname*{vrai\,sup}\limits_{0\le s\le t}|x(s)|\big)$. Пространства B_p^v банаховы.

Лемма 1. *Пусть пространства $B_p^{v_1}$ и $B_p^{v_2}$ порождены функциями v_1 и v_2 соответственно, и пусть имеет место неравенство $M_{12}^p \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{0<t<1}\frac{v_1(t)}{v_2(t)} < \infty$.*

Тогда пространство $B_p^{v_1}$ непрерывно вложено в пространство $B_p^{v_2}$, причем для любого $x \in B_p^{v_1}$ имеем $\|x\|_{B_p^{v_2}} \le M_{12}\|x\|_{B_p^{v_1}}$.

Введем обозначение $t^* = \sqrt[2p]{t}$, если $1 \le p < \infty$, и $t^* = 1$, если $p = \infty$. Далее введем *весовое* пространство B_p^{t,t^*} таких классов эквивалентных измеримых функций $x : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^1$, что $x \in B_p^{t,t^*}$, если $xt^* \in B_p^t$. Положим $\|x\|_{B_p^{t,t^*}} \overset{\text{def}}{=} \|xt^*\|_{B_p^t}$. Пространство B_p^{t,t^*} банахово.

Работа выполнена при финансовой поддержке Capacity Building Project (Credit 2436, Eduardo Mondlane University — Mozambique).

2. Линейная сингулярная задача в пространстве D_p^{t,t^*}

Через D_p^{t,t^*} обозначим пространство функций $x:[0,1]\longrightarrow \mathbf{R}^1$ таких, что 1) *x непрерывна на $[0,1]$, причем $x(0)=0$;* 2) *$\dot{x}$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$;* 3) *$\ddot{x}$ принадлежит пространству B_p^{t,t^*}.*

Это пространство алгебраически изоморфно пространству $B_p^{t,t^*}\times\mathbf{R}^1$. Действительно, изоморфизмы $\mathcal{J}:B_p^{t,t^*}\times\mathbf{R}^1\longrightarrow D_p^{t,t^*}$ и $\mathcal{J}^{-1}:D_p^{t,t^*}\longrightarrow B_p^{t,t^*}\times\mathbf{R}^1$ можно определить равенствами $\mathcal{J}=\{\Lambda,Y\}$, $\mathcal{J}^{-1}=[\delta,r]$, где

$$(\Lambda z)\stackrel{\rm def}{=}\int_0^t(t-s)z(s)\,ds,\quad (Y\beta)\stackrel{\rm def}{=}\beta t,\quad \delta x\stackrel{\rm def}{=}\ddot{x},\quad rx\stackrel{\rm def}{=}\dot{x}(0).$$

Если в пространстве D_p^{t,t^*} определить норму равенством $\|x\|_{D_p^{t,t^*}}\stackrel{\rm def}{=}\|\ddot{x}\|_{B_p^{t,t^*}}+|\dot{x}(0)|$, то D_p^{t,t^*} — банахово пространство.

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$(\mathcal{L}_0x)(t)\stackrel{\rm def}{=}\ddot{x}(t)+\frac{\dot{x}(t)}{t}-\frac{x(t)}{t^2}=f(t),\quad t\in[0,1],\quad x(0)=0,\quad x(1)+\nu\dot{x}(1)=\alpha, \tag{1}$$

где $\nu\geq 0$.

Значение оператора $\mathcal{L}_0$ на функции, которая отлична от нуля в точке $t=0$ (напр., $x(t)\equiv 1$), не принадлежит пространству суммируемых функций. Поэтому уравнение $\mathcal{L}_0x=f$ естественно рассматривать в пространстве, где таких функций нет. Задачу (1) будем исследовать в пространстве $D_p^{t,t^*}\simeq B_p^{t,t^*}\times\mathbf{R}^1$. Для простоты вычислений ограничимся случаем $\nu\equiv 0$.

Главная часть ([2], с. 103) Q_0 оператора $\mathcal{L}_0:D_p^{t,t^*}\longrightarrow B_p^{t,t^*}$ имеет вид

$$(Q_0z)(t)\stackrel{\rm def}{=}(\mathcal{L}_0\Lambda z)(t)=z(t)+(\mathcal{K}z)(t),\quad t\in[0,1],$$

где $(\mathcal{K}z)(t)\stackrel{\rm def}{=}\frac{1}{t^2}\int\limits_0^t s\,z(s)\,ds$ — оператор со “средним весом” [3]. При $1<p\leq\infty$ оператор $\mathcal{K}:L_p\longrightarrow L_p$ ограничен, причем $\|\mathcal{K}\|_{L_p\to L_p}\leq\frac{p'}{2}$ [3], где p' — сопряженный показатель. Более того, при $1\leq p\leq\infty$ оператор $\mathcal{K}:B_p^{t,t^*}\longrightarrow B_p^{t,t^*}$ ограничен, причем

$$\|\mathcal{K}\|_{B_p^{t,t^*}\to B_p^{t,t^*}}\leq(1/2)^{1/p'}<1,\ \text{ если }\ 1<p\leq\infty,\ \text{ и }\ \|\mathcal{K}\|_{B_1^{t,t^*}\to B_1^{t,t^*}}\leq 1.$$

Оператор $Q_0:B_p^{t,t^*}\longrightarrow B_p^{t,t^*}$ при $1<p\leq\infty$ имеет ограниченный обратный

$$(Q_0^{-1}z)(t)=z(t)-\frac{1}{t^3}\int_0^t s^2\,z(s)\,ds.$$

Таким образом, *главная краевая задача* ([2], с. 104) $\mathcal{L}_0x=f$, $\dot{x}(0)=\alpha$ однозначно разрешима. Фундаментальная система решений однородного уравнения $\mathcal{L}_0x=0$ в пространстве D_p^{t,t^*} одномерна и состоит из функции $x_1(t)=t$. Итак, главная краевая задача интегрируется в конечном виде и ее общее решение имеет представление

$$x(t)=(\Lambda Q_0^{-1}f)(t)+\dot{x}(0)t=\int_0^t(t-s)\{f(s)-\frac{1}{s^3}\int_0^s\tau^2\,f(\tau)\,d\tau\}\,ds+\dot{x}(0)t.$$

После перемены порядка интегрирования это представление принимает канонический вид

$$x(t)=\int_0^t C_0(t,s)f(s)\,ds+\dot{x}(0)t=(\mathcal{C}_0f)(t)+\dot{x}(0)t,$$

где функция Коши определяется равенством $C_0(t,s)=\frac{t^2-s^2}{2t}$, $0\leq s\leq t\leq 1$. Оператор Коши $\mathcal{C}_0:B_p^{t,t^*}\longrightarrow C$ вполне непрерывен при $p=\infty$. В соответствии с ([2], с. 105) для любого функционала ℓ, определенного на D_p^{t,t^*} и такого, что $\ell[x_1]\neq 0$, краевая задача $\mathcal{L}_0x=z$, $\ell x=\alpha$ однозначно разрешима. Решение задачи (1) при $\nu = 0$ в пространстве D_p^{t,t^*} имеет представление $x = \mathcal{W}f + \alpha x_1$, где $(\mathcal{W}f)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 W(t,s)f(s)\,ds$,

$$W(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s^2(t^2-1)/(2t), & \text{если } 0 \le s \le t \le 1; \\ t(s^2-1)/2, & \text{если } 0 \le t < s \le 1. \end{cases}$$

При $p = \infty$ оператор $\mathcal{W} : B_p^{t,t^*} \longrightarrow C$ вполне непрерывен.

Рассмотрим задачу

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L}_0 x)(t) - (Tx)(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha, \tag{2}$$

где $T : C \longrightarrow B_\infty^{t,1}$ — линейный антитонный оператор, $f \in B_\infty^{t,1}$, $\alpha \in \mathbf{R}^1$.

Пусть $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{W}T : C \longrightarrow C$. Имеет место

Лемма 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует такой элемент* $y \in D_\infty^{t,1}$, *что* $y(t) > 0$, $\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L}_0 y)(t) - (Ty)(t) \le 0$, $t \in (0,1)$, *причем* $y(1) - \int\limits_0^1 \phi(s)\,ds > 0$;
2) *спектральный радиус* $\rho(\mathcal{A})$ *оператора* $\mathcal{A} : C \longrightarrow C$ *меньше единицы;*
3) *краевая задача* (2) *имеет единственное решение* $x \in D_\infty^{t,1}$ *для каждой пары* $f \in B_\infty^{t,1}$, $\alpha \in \mathbf{R}^1$, *причем ее оператор Грина* $\mathcal{G}$ *антитонен;*
4) *существует положительное на* $[0,1]$ *решение однородного уравнения* $\mathcal{L}_0 x - Tx = 0$.

3. Нелинейная задача с несуммируемой особенностью

Пусть $v, z \in D_\infty^{t,1}$, где $v(t) \le z(t)$ при всех $t \in [0,1]$. Обозначим

$$[v,z]_{D_\infty^{t,1}} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D_\infty^{t,1} : v(t) \le x(t) \le z(t),\ t \in [0,1]\}$$

— порядковый интервал в пространстве $D_\infty^{t,1}$. Пусть $\Theta : C \longrightarrow B_\infty^{t,1}$ — линейный изотонный оператор, $\overline{v} \equiv \Theta v$, $\overline{z} \equiv \Theta z$, $[\overline{v}, \overline{z}]_{B_\infty^{t,1}}$ — порядковый интервал в пространстве $B_\infty^{t,1}$.

Определение 2 ([2], с. 218). Будем говорить, что функция $f(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет одному из условий $L^i[\overline{v},\overline{z}]$, $i = 1,2$, если для любой измеримой функции $u \in [\overline{v},\overline{z}]_{B_\infty^{t,1}}$ при почти всех $t \in [0,1]$ возможно разложение $f(t,u(t)) = q_i(t)u(t) + M_i(t,u(t))$. Здесь $q_i \in L_\infty$, $i = 1,2$, $\mathcal{M}_i : [\overline{v},\overline{z}]_{B_\infty^{t,1}} \longrightarrow B_\infty^{t,1}$ — оператор Немыцкого, определенный равенством $(\mathcal{M}_i u)(t) \stackrel{\text{def}}{=} M_i(t,u(t))$, причем оператор $\mathcal{M}_1$ изотонен, а оператор $\mathcal{M}_2$ антитонен.

Рассмотрим квазилинейную задачу

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}(t) + \frac{\dot{x}(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = f(t,(\Theta x)(t)), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha, \tag{3}$$

где функция $f(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

В [4], [5] встречаются краевые задачи, которые могут быть представлены в виде (3) при $\Theta x \equiv x$. В статье [6] указаны условия существования и единственности решения такой задачи. Ниже сформулируем условия существования и единственности решения задачи (3), которые непосредственно не следуют из [6]. Задачу (3) исследуем в пространстве $D_\infty^{t,1}$.

Аналогично теореме 1 из [7] можно показать, что имеет место

Теорема. *Пусть существует пара функций* $v, z \in D_\infty^{t,1}$, $v(t) < z(t)$, $t \in (0,1)$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$\mathcal{L}_0 z \le f(\cdot,\Theta z), \quad \mathcal{L}_0 v \ge f(\cdot,\Theta v), \quad v(1) \le \alpha \le z(1).$$

Предположим, что функция $f(\cdot,\cdot)$ *удовлетворяет условию* $L^2[\overline{v},\overline{z}]$ *с коэффициентом* $q_2 \in L_\infty$, $q_2(\cdot) \le 0$. *Тогда задача* (3) *имеет по крайней мере одно решение* $x \in [v,z]_{D_\infty^{t,1}}$.

Если, кроме того, выполнено условие $L^1[\overline{v},\overline{z}]$ *с коэффициентом* $q_1 \in L_\infty$, *причем оператор Грина вспомогательной задачи*

$$\mathcal{L}_1 x \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_0 x - q_1 \Theta x = \phi, \quad x(1) = 0,$$

антитонен, то решение задачи (3) *единственно.*

Литература

1. Шиндяпин А.И. *О краевой задаче для одного сингулярного уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 3. – С. 450–455.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
3. Rhoades B. E. *Norm and spectral properties of some weighted mean operators* // Math. – 1984. – V. 26. – № 2. – P. 143–152.
4. Срубщик Л.С. *Нежесткость сферической оболочки* // ПММ. – 1967. – Т. 31. – Вып. 4. – С. 723–729.
5. Срубщик Л.С. *Докритическое равновесие тонкой пологой оболочки вращения и его устойчивость* // ПММ. – 1980. – Т. 44. – Вып. 2. – С. 327–337.
6. Гризанс Г.П. *Об одной краевой задаче для уравнения с несуммируемой особенностью* // Латв. матем. ежегодник. – 1985. – Вып. 29. – С. 22–35.
7. Алвеш М.Ж. О разрешимости двухточечной краевой задачи для сингулярного нелинейного функционально-дифференциального уравнения // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 12–19.

Пермский государственный университет

Поступила
24.05.1999