ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 3 (502)

УДК 519.71

И.К. ШАРАНХАЕВ

О БУЛЕВЫХ БАЗИСАХ ВТОРОГО ЯРУСА

Под *базисом* понимаем конечную полную систему булевых функций.

Булева функция называется *бесповторной* в базисе B, если ее можно представить в этом базисе термом (формулой), в котором каждая переменная встречается не более одного раза. В противном случае она называется повторной в B.

Булева функция называется *слабоповторной* в базисе B, если ее любая остаточная подфункция является бесповторной, а сама она повторна в базисе B.

Под *сложностью* $L(\Phi)$ терма Φ понимаем число всех вхождений переменных в Φ. *Сложностью* $L_B(f)$ булевой функции f в базисе B называется наименьшее значение $L(\Phi)$ при условии, что терм Φ в базисе B представляет функцию f.

При сравнении базисов по сложности представлений булевых функций термами на множестве всех базисов вводится частичный порядок: $B_1 \leq B_2$, если существует число c такое, что $L_{B_1}(f) \leq cL_{B_2}(f)$ для любой булевой функции f, говорят, B_1 *предшествует* B_2. Если $B_1 \leq B_2$ и $B_2 \leq B_1$, то базисы B_1 и B_2 называются *эквивалентными*. Если $B_1 \leq B_2$ и $B_2 \nleq B_1$, то пишем $B_1 < B_2$ и говорим, что B_1 *строго предшествует* B_2. Также говорим, что B_1 *непосредственно предшествует* B_2, если $B_1 < B_2$ и не существует базиса B такого, что $B_1 < B < B_2$.

Таким образом, множество базисов разбито на классы эквивалентности. В [1] доказано, что в каждом классе базисов можно указать канонический вид класса, причем если базис B непосредственно предшествует базису B', то канонический вид B содержит на одну функцию больше, чем канонический вид B', а эта функция является слабоповторной в базисе, каноническом для B'.

О.Б. Лупановым замечено (см. [2]), что базис $B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$ является наибольшим элементом при введенном порядке, т. е. класс базисов, эквивалентных базису B_0, самый "плохой" по сложности реализации булевых функций термами. Эти базисы назовем базисами *нулевого яруса*. Отметим, что базис B_0 канонический для своего класса.

Базисами *k-го яруса* ($k > 0$) называются все базисы, непосредственно предшествующие всем базисам $(k-1)$-го яруса.

Введем обозначение $x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$

Функции f и g называются однотипными, если $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$, где $(i_1, \ldots, i_n)$ — произвольная перестановка чисел от 1 до n.

Функции f и g называются *обобщенно однотипными*, если f однотипна к g или $\overline{g}$. Очевидно, что на множестве булевых функций отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности.

В работе [3] получено описание всех обобщенных типов функций, слабоповторных в базисе B_0, а как следствие — канонических базисов первого яруса. Заметим, что при добавлении к базису B_0 разных по типу слабоповторных функций получаются базисы из разных классов эквивалентности. Поэтому уже в первом ярусе имеется счетное число различных классов эквивалентности базисов.

Естественно, возник вопрос изучения базисов второго яруса. Часть этих базисов удалось описать в [4]–[7].

К настоящему моменту автором найдены все слабоповторные функции в канонических базисах первого яруса, тем самым, описание базисов второго яруса завершено.

Ниже следует один из результатов, полученных автором по данной проблеме.

Теорема. *Система булевых функций*

$$\begin{array}{ll} x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4), & \\ x_1(x_2 \vee \dots \vee x_n) \vee x_2 \cdot \ldots \cdot x_n, & n \geq 3, \\ x_1(x_2 \vee x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) \vee x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n, & n \geq 3, \\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n, & n \geq 2, \\ \overline{x}_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1 g(x_3, x_2, x_5, x_4), & \\ \overline{x}_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1x_3x_5(x_2 \vee x_4), & \\ \overline{x}_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1(x_2x_3 \vee x_4x_5), & \\ \overline{x}_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1x_3(x_2 \vee x_4x_5), & \\ \overline{x}_1 x_2 g(x_3, \ldots, x_6) \vee x_1 g(x_2x_3, x_4, x_5, x_6) & \end{array}$$

является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для функций, слабоповторных в базисе $B = B_0 \cup \{g\}$, *где* $g(x_1, \ldots, x_4) = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$.

Литература

1. Черухин Д.Ю. *Алгоритмический критерий сравнения булевых базисов* // Матем. вопр. кибернетики. – 1999. – № 8. – С. 77–122.
2. Субботовская Б.А. *О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами* // ДАН СССР. – 1963. – Т. 149. – № 4. – С. 784–787.
3. Стеценко В.А. *О предплохих базисах в* P_2 // Матем. вопр. кибернетики. – 1992. – № 4. – С. 139–177.
4. Перязев Н.А. *Слабоповторные булевы функции в бинарном базисе* // Дискретн. матем. и информатика. – Иркутск. ун-т, 1998. – Вып. 4. – 12 с.
5. Кириченко К.Д. *Слабоповторные булевы функции в некоторых предэлементарных базисах* // Дискретн. матем. и информатика. – Иркутск. ун-т, 2000. – Вып. 13. – 60 с.
6. Шаранхаев И.К. *Слабоповторные булевы функции в одном предэлементарном базисе* // Методы оптимизации и их прилож. Тр. 12-й Байкал. межд. конф. – 2001. – Т. 5. – С. 151–155.
7. Шаранхаев И.К. *О слабоповторных булевых функциях в одном базисе* // Дискретн. анализ и исслед. операций. Матер. конф. – Новосибирск, 2002. – С. 139.

Бурятский государственный университет

Поступила 21.03.2003