ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 12 (487)

УДК 517.977

А.С. БУЛДАЕВ

К ОПТИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ПО СОСТОЯНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Введение

Для численного решения задач оптимизации динамических систем по управляющим параметрам традиционно применяются градиентные процедуры и методы второго порядка [1], [2]. Релаксация в этих процедурах в общем случае обеспечивается лишь локально, т. е. в достаточно малой окрестности варьируемых параметров. Существенным фактором повышения эффективности поиска решения является нелокальность улучшения. Процедуры нелокальной оптимизации линейных по состоянию систем были рассмотрены в [3] для класса измеримых управлений. В [4] предложены обобщения указанных нелокальных процедур для квадратичных по состоянию систем. Основой нелокальных процедур [3], [4] являются специальные формулы приращения целевых функционалов, не содержащие остаточных членов разложения.

В данной работе с аналогичных [4] позиций рассматривается процедура нелокального улучшения для задачи оптимизации квадратичной по состоянию системы по управляющим параметрам

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u, t)dt \to \min_{u\in U}, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{2}$$

в которой $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — вектор состояния, $u = (u_1, \dots, u_m)$ — вектор управляющих параметров со значениями в компактном множестве $U \subset R^m$. Функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$ являются квадратичными по x с коэффициентами, непрерывно зависящими от u, t на множестве $R^n \times U \times T$. Функция $\varphi(x)$ квадратична на R^n.

Процедура нелокального улучшения основывается на точной (без остаточных членов) формуле приращения целевой функции в рассматриваемом классе задач.

2. Формула приращения целевой функции. Условия оптимальности

Образуем функцию Понтрягина с сопряженной переменной p

$$H(p, x, u, t) = \langle p, f(x, u, t)\rangle - F(x, u, t)$$

и обозначим через $\Delta_v H(p, x, u, t) = H(p, x, v, t) - H(p, x, u, t)$ частное приращение по аргументу u, а через H_x, φ_x, H_{xx}, φ_{xx} — соответственно первые и вторые производные функций H, φ по аргументу x.

Кроме векторной стандартной сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u, t), \quad t \in T, \tag{3}$$

введем векторную модифицированную сопряженную систему

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), u, t) - \frac{1}{2}H_{xx}(p(t), x(t), u, t)y(t), \quad t \in T. \tag{4}$$

Пусть u^0, v — допустимые управления. Введем следующие обозначения: $\Delta_v\Phi(u^0) = \Phi(v) - \Phi(u^0)$; $x(t,v)$, $t \in T$, — решение системы (2) при $u = v$, $x(t_0,v) = x^0$; $\psi(t,v)$, $t \in T$, — решение системы (3) при $u = v$, $x(t) = x(t,v)$, $\psi(t_1,v) = -\varphi_x(x(t_1,v))$; $p(t,u^0,v)$, $t \in T$, — решение системы (4) при $u = u^0$, $x(t) = x(t,u^0)$, $y(t) = x(t,v) - x(t,u^0)$, $p(t_1,u^0,v) = -\varphi_x(x(t_1,u^0)) - \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x(t_1,u^0))(x(t_1,v) - x(t_1,u^0))$. Очевидно, для функции p выполняется равенство $p(t,u^0,u^0) = \psi(t,u^0)$, $t \in T$.

Управляющий вектор параметров в задаче (1), (2) рассмотрим как постоянную векторную функцию времени на интервале T. Тогда из формулы приращения целевого функционала для квадратичных задач оптимального управления (формула (7) из [4]) в качестве очевидного следствия получим формулу приращения целевой функции в задаче (1), (2)

$$\Delta_v\Phi(u^0) = -\int_T \Delta_v H(p(t,u^0,v), x(t,v), u^0, t)dt. \tag{5}$$

Определим функцию $G(u,v,w) = \int\limits_T H(p(t,u,v), x(t,v), w, t)dt$, $u \in U$, $v \in U$, $w \in U$, и введем отображение по формуле

$$W^*(u,v) = \arg\max_{w \in U} G(u,v,w), \quad u \in U, \quad v \in U. \tag{6}$$

Согласно (5) для оптимальности управления $u \in U$ достаточно (и необходимо), чтобы $\int\limits_T \Delta_v H(p(t,u,v), x(t,v), u, t)dt \le 0$, $v \in U$. Для выполнения последнего неравенства достаточно требовать выполнения условия

$$u = W^*(u,v), \quad v \in U. \tag{7}$$

В случае дифференцируемости функции H по u и выпуклости множества U известное [1] необходимое условие оптимальности управления $u \in U$ в форме линеаризованного принципа максимума (ЛПМ) можно представить в форме

$$u = \arg\max_{w \in U} \int_T \langle H_u(\psi(t,u), x(t,u), u, t), w\rangle dt, \tag{8}$$

где H_u — первая производная функции H по u.

Выделим условие

$$u = W^*(u,u), \tag{9}$$

которое получается из достаточного условия (7) при $v = u$. Нетрудно показать, что (8) является следствием (9).

При условии линейности по управлению u функций $f(x,u,t)$, $F(x,u,t)$ условия (8), (9) эквивалентны, т. е. в линейной по управлению задаче (1), (2) с выпуклым множеством U ЛПМ имеет форму (9).

3. Процедура улучшения

Поставим задачу об улучшении управления $u^0 \in U$: найти управление $v \in U$ с условием $\Delta_v\Phi(u^0) \le 0$. Формула (5) открывает возможность решения задачи улучшения управления u^0 через операцию (6).

Процедура улучшения.

1. По заданному u^0 определим отображение $W_1^*(v) = W^*(u^0,v)$, $v \in U$.
2. Найдем решение уравнения

$$v = W_1^*(v), \quad v \in U. \tag{10}$$

Покажем, что решение v обеспечивает улучшение. В силу определения отображения W_1^* получим

$$\int_T H(p(t,u^0,v)x(t,v), v, t)dt \ge \int_T H(p(t,u^0,v), x(t,v), u^0, t)dt.$$

Отсюда и из (5) следует $\Delta_v \Phi(u^0) \le 0$.

Таким образом, процедура улучшения состоит в нахождении неподвижной точки отображения W_1^* на множестве U. Рассмотрим $V_1(u^0) = \{v \in U : v = W_1^*(v)\}$ — множество неподвижных точек отображения W_1^*. Если $u^0 \in V_1(u^0)$, то u^0 удовлетворяет (9). Обратно, если u^0 удовлетворяет (9), то u^0 определяется из (10) при $v = u^0$, т. е. $u^0 \in V_1(u^0)$. Следовательно, (9) характеризуется включением $u^0 \in V_1(u^0)$. Отсюда вытекает

Теорема 1. *Управление u^0 удовлетворяет условию* (9) *тогда и только тогда, когда $u^0 \in V_1(u^0)$.*

Следствие 1. В линейной по управлению задаче (1), (2) с выпуклым множеством U управление u^0 удовлетворяет ЛПМ (8) тогда и только тогда, когда $u^0 \in V_1(u^0)$.

Следствие 2. В линейной по управлению задаче (1), (2) с выпуклым множеством U управление u^0 не оптимально, если отображение W_1^* не имеет неподвижных точек в U.

Укажем условия, при которых имеет место строгое улучшение $\Phi(v) < \Phi(u^0)$, $v \in V_1(u^0)$. Для этого ограничимся подклассом линейных по управлению задач

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T \{\langle a(x(t),t), u\rangle + F_0(x(t),t)\} dt \to \min_{u \in U}, \tag{11}$$

$$\dot{x}(t) = A(x(t),t)u + b(x(t),t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{12}$$

В задаче (11), (12) функция Понтрягина имеет структуру $H(p,x,u,t) = \langle H_1(p,x,t), u\rangle + H_0(p,x,t)$. Соответствующая функция $G(u,v,w)$ и отображение $W^*(u,v)$ примут вид

$$\begin{aligned} G(u,v,w) &= \Big\langle \int_T H_1(p(t,u,v), x(t,v), t) dt, w \Big\rangle + \int_T H_0(p(t,u,v), x(t,v), t) dt = \\ &= \langle g(u,v), w\rangle + g_0(u,v), \\ W^*(u,v) &= \arg \max_{w \in U} \langle g(u,v), w\rangle, \quad u \in U, \quad v \in U. \end{aligned}$$

В случае скалярного управления ($m = 1$) с областью значений $U = [u^-, u^+]$ (двусторонние ограничения) получим

$$W^*(u,v) = \begin{cases} u^+, & g(u,v) > 0; \\ u^-, & g(u,v) < 0; \\ w \in [u^+, u^-], & g(u,v) = 0. \end{cases}$$

В частности, если $u^+ = -u^- = l$, то отображение (6) можно записать в форме

$$W^*(u,v) = l \cdot \operatorname{sign}(g(u,v)).$$

Определим функцию переключения управления в процедуре улучшения управления u^0 в виде $g_1(v) = g(u^0, v)$, $v \in U$. При этом отображение W_1^* в процедуре улучшения примет вид $W_1^*(v) = \arg \max_{w \in U} \langle g_1(v), w\rangle$. Приращение целевой функции (5) на управлениях u^0, $v \in U$ в задаче (11), (12) записывается в виде $\Delta_v \Phi(u^0) = -\langle g_1(v), v - u^0\rangle$.

Пусть $v \in U$ — неподвижная точка отображения W_1^*. Тогда из формулы приращения следует, что строгое улучшение гарантируется (в том числе и для управления u^0, удовлетворяющего ЛПМ), если векторы $(v - u^0)$ и $g_1(v)$ не ортогональны. В частности, для скалярного управления ($m = 1$) строгое улучшение гарантируется, если v не равно u^0 и функция переключения g_1 не равна нулю в точке v.

Точки $v \in U$, в которых функция переключения g_1 равна нулю, очевидно являются неподвижными точками отображения W_1^*. Назовем такие неподвижные точки *особыми*, остальные — *неособыми*. Условие строгого улучшения в задаче (11), (12) в случае скалярного управления можно сформулировать в следующем виде: если $v \in U$ — неособая неподвижная точка отображения W_1^*, отличная от u^0, то $\Phi(v) < \Phi(u^0)$.

Отметим, что в задаче (11), (12) неособые неподвижные точки могут быть только граничными точками множества U.

Следствие 3. Особые неподвижные точки $v \in V_1(u^0)$ не дают строгого улучшения управления u^0 в линейной по управлению задаче (11), (12) ($\Delta_v \Phi(u^0) = 0$).

Предложенная процедура улучшения указывает на принципиальную возможность осуществления нелокального улучшения управления в рассматриваемом классе задач. Трудоемкость построения улучшающего управления определяется трудоемкостью решения задачи (10) о неподвижной точке отображения W_1^* в процедуре улучшения. Рассматриваемое отображение в общем случае определяет многозначную и разрывную векторную функцию W_1^*, значения которой вычисляются через операцию интегрирования фазовой и сопряженной систем и операцию на максимум (6). Компенсацией за поиск неподвижных точек отображения является нелокальность улучшения, а также возможность улучшения управляющих параметров на невыпуклых множествах.

Выделим следующие свойства процедуры.

1. Нелокальность улучшения управляющих параметров. В процедуре отсутствует малый параметр, гарантирующий близость варьируемых параметров.

2. Возможность улучшения параметров, удовлетворяющих линеаризованному принципу максимума. В линейной по управлению задаче такое свойство обуславливается неединственностью решения задачи о неподвижной точке.

3. Отсутствие в общем случае требования дифференцируемости по u функций $f(x,u,t)$, $F(x,u,t)$ и выпуклости множества значений управляющих параметров U (в отличие от градиентных методов).

Свойство неединственности неподвижных точек в процедуре улучшения является благоприятным фактором улучшения управлений, удовлетворяющих линеаризованному принципу максимума.

Отметим, что возможен случай, когда в процедуре улучшения отсутствуют неподвижные точки. В линейной по управлению задаче это означает, что управление u^0 не удовлетворяет линеаризованному принципу максимума. В данном случае рассматриваемая процедура не действует и нужно перейти к другим процедурам улучшения.

4. Схема поиска неподвижных точек в процедуре улучшения

Рассмотрим линейный по управлению подкласс задач (11), (12) с двусторонними ограничениями $U = [u^-, u^+]$. В данном случае в схеме поиска неподвижных точек в процедуре улучшения можно выделить следующие задачи.

С1. Поиск "нулей" гладкой функции g_1 переключения управления внутри допустимого множества U. Эти неподвижные точки являются особыми.

С2. Поиск неподвижных точек отображения W_1^* на границе множества U. Найденные неподвижные точки, не являющиеся "нулями" функции переключения, являются неособыми.

Для численного поиска нулей гладкой векторной функции переключения, принадлежащих внутренности U, можно применить метод Ньютона и его модификации для решения системы из m уравнений с m неизвестными, использующие значение градиента рассматриваемой функции переключения. Укажем возможную операцию вычисления градиента.

Дифференцируя по v векторную функцию переключения $g_1(v) = \int\limits_T H_1(p(t,u^0,v), x(t,v), t)dt$, $v \in U$, формально получим

$$g_{1v}(v) = \int_T \{H_{1p}(p(t,u^0,v), x(t,v), t) p_v(t,u^0,v) + H_{1x}(p(t,u^0,v), x(t,v), t) x_v(t,v)\} dt,$$

где нижние индексы v, p, x обозначают производные по соответствующим аргументам.

Матричная функция $x_v(t,v)$ удовлетворяет известной [5] матричной системе в вариациях

$$\dot{R}(t) = f_x(x(t,v),v,t)R(t) + f_v(x(t,v),v,t), \quad R(t_0) = 0. \tag{13}$$

Обозначим через $\Delta x = x(t,\widetilde{v}) - x(t,v)$ фазовое приращение, соответствующее приращению управления $\Delta v = \widetilde{v} - v$. Систему (13) можно получить при выделении линейной части $R\Delta v$ приращения Δx в системе дифференциальных уравнений для фазового приращения $\frac{d\Delta x}{dt} = f(x(t,\widetilde{v}),\widetilde{v},t) - f(x(t,v),v,t)$.

Аналогично, при выделении линейной части $S\Delta v$ приращения $\Delta p = p(t,u^0,\widetilde{v}) - p(t,u^0,v)$ в системе дифференциальных уравнений для приращения

$$\frac{d\Delta p}{dt} = -H_x(p(t,u^0,\widetilde{v}),x(t,u^0),u^0,t) + H_x(p(t,u^0,v),x(t,u^0),u^0,t) - \\ - \frac{1}{2}H_{xx}(p(t,u^0,\widetilde{v}),x(t,u^0),u^0,t)(x(t,\widetilde{v}) - x(t,u^0)) + \\ + \frac{1}{2}H_{xx}(p(t,u^0,v),x(t,u^0),u^0,t)(x(t,v) - x(t,u^0))$$

можно получить матричную систему в вариациях, решением которой является матричная функция $p_v(t,u^0,v)$,

$$\dot{S}(t) = -f_x^T(x(t,u^0),u^0,t)S(t) - \frac{1}{2}[f_x(x(t,u^0),u^0,t)z]_x^T\,|_{z=x(t,v)-x(t,u^0)} \cdot S(t) - \\ - \frac{1}{2}H_{xx}(p(t,u^0,v),x(t,u^0),u^0,t)R(t), \quad S(t_1) = 0. \quad (14)$$

Для заданного $v \in U$, численно интегрируя систему (13) вместе с фазовой системой (2), находим решения $x(t,v)$, $R(t)$. Для полученных решений, одновременно интегрируя сопряженные системы (4) и (14), вычислим решения $p(t,u^0,v)$, $S(t)$. При этом, вводя стандартную дополнительную переменную, определим значение градиента в форме

$$g_{1v}(v) = \int_T \{H_{1p}(p(t,u^0,v),x(t,v),t)S(t) + H_{1x}(p(t,u^0,v),x(t,v),t)R(t)\}dt.$$

Учитывая гладкость функции переключения и указанную операцию вычисления градиента, поиск нулей функции переключения можно производить с помощью метода Ньютона и его модификаций.

Перейдем к обсуждению задачи С2. Проверка на “неподвижность” граничных точек множества U для отображения W_1^* сводится к решению семейства задач линейного программирования

$$\langle g_1(v), w\rangle \to \max_{w\in\partial U}, \quad v \in \partial U, \quad (15)$$

и сравнению полученных решений с рассматриваемым значением $v \in \partial U$.

Из свойств задач (15) линейного программирования следует, что для решения задачи С2 достаточно проверить в множестве ∂U на неподвижность 1) точки 0-мерных граней (угловые точки); 2) внутренние точки 1-мерных граней (ребер), являющиеся решениями уравнений $g_{1j}(v) = 0$, где $j \in \{1,\dots,m\}$ и переменная v принадлежит рассматриваемому ребру; 3) внутренние точки k-мерных граней для всех $k \in \{2,\dots,(m-1)\}$, являющиеся решениями всевозможных систем уравнений $g_{1j_1}(v) = 0 \wedge \dots \wedge g_{1j_k}(v) = 0$, где $j_s \in \{1,\dots,m\}$, $1 \le s \le k$, и переменная v принадлежит рассматриваемой k-мерной грани. После стандартной параметризации точек k-мерной грани к поиску требуемых точек можно применить методы Ньютона для решения системы из k уравнений с k неизвестными.

5. Регуляризация процедуры улучшения

Слабым местом рассмотренной выше нелокальной процедуры является возможность стабилизации. Отметим также, что особые неподвижные точки v в процедуре улучшения не улучшают u^0 в линейной по управлению задаче (11), (12).

С целью повышения качества процедуры улучшения применим квадратичную фазовую регуляризацию целевой функции по аналогии с [3]. Регуляризованная процедура улучшения приобретает свойство улучшения любых управлений u^0, не удовлетворяющих линеаризованному принципу максимума. Особые неподвижные точки v в регуляризованной процедуре, отличные от u^0, строго улучшают u^0. Регуляризация позволяет получить новое нелокальное необходимое условие оптимальности (условие неулучшения), которое усиливает линеаризованный принцип максимума в линейном по управлению классе задач (11), (12).

Пусть $(u^0, x(t,u^0))$, $(v, x(t,v))$, $t \in T$, — допустимые процессы в задаче (1), (2). Введем регуляризованную целевую функцию

$$J_\alpha(v,u^0) = \Phi(v) + \alpha J(v,u^0), \quad \alpha \geq 0, \tag{16}$$

где средневзвешенное фазовое отклонение

$$J(v,u^0) = \frac{1}{2}\int_T \langle B(x(t,v) - x(t,u^0)), x(t,v) - x(t,u^0)\rangle dt,$$

в котором B — симметричная, неотрицательно определенная матрица ($B^T = B$, $B \geq 0$). Понятно, что $J(v,u^0) \geq 0$, $v \in U$.

Поставим задачу улучшения управления u^0 по функции J_α: найти управление $v^\alpha \in U$ с условием $J_\alpha(v^\alpha,u^0) \leq J_\alpha(u^0,u^0) = \Phi(u^0)$. Тогда управление $v^\alpha \in U$ обеспечивает уменьшение исходной целевой функции с оценкой

$$\Phi(v^\alpha) - \Phi(u^0) \leq -\alpha J(v^\alpha,u^0). \tag{17}$$

Фазовая регуляризация целевой функции не изменяет структуру задачи относительно управления, и функция (16) сохраняет свойство квадратичности по x. Следовательно, для улучшения по функции (16) можно использовать процедуру, предложенную выше.

Для регуляризованной задачи функция Понтрягина имеет вид

$$H_\alpha(p,x,u,t) = H(p,x,u,t) - \frac{1}{2}\alpha\langle B(x - x(t,u^0)), x - x(t,u^0)\rangle,$$

где $H(p,x,u,t) = \langle p, f(x,u,t)\rangle - F(x,u,t)$. Векторные стандартная и модифицированная сопряженные системы соответственно принимают вид

$$\dot\psi(t) = -H_x(\psi(t),x(t),u,t) + \alpha B(x(t) - x(t,u^0)), \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\dot p(t) = -H_x(p(t),x(t),u,t) + \alpha B(x(t) - x(t,u^0)) - \\ - \frac{1}{2}H_{xx}(p(t),x(t),u,t)y(t) + \frac{1}{2}\alpha By(t), \quad t \in T.\end{aligned} \tag{19}$$

Пусть $\psi^\alpha(t,v)$, $t \in T$, — решение системы (18) при $u = v$, $x(t) = x(t,v)$, $\psi^\alpha(t_1,v) = -\varphi_x(x(t_1,v))$; $p^\alpha(t,u^0,v)$, $t \in T$, — решение системы (19) при $u = u^0$, $x(t) = x(t,u^0)$, $y(t) = x(t,v) - x(t,u^0)$, $p^\alpha(t_1,u^0,v) = -\varphi_x(x(t_1,u^0)) - \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x(t_1,u^0))(x(t_1,v) - x(t_1,u^0))$.

Очевидно, для функций ψ^α, p^α выполняется равенство $\psi^\alpha(t,u^0) = p^\alpha(t,u^0,u^0) = \psi(t,u^0)$, $t \in T$, для всех $\alpha \geq 0$.

Точная формула приращения $\Delta J_\alpha(v,u^0) = J_\alpha(v,u^0) - J_\alpha(u^0,u^0)$ регуляризованной функции (16) имеет вид

$$\Delta J_\alpha(v,u^0) = -\int_T \Delta_v H(p^\alpha(t,u^0,v), x(t,v), u^0, t)dt. \tag{20}$$

Определим функцию

$$G^\alpha(u,v,w) = \int_T H(p^\alpha(t,u,v), x(t,v), w, t)dt, \quad u \in U, \quad v \in U, \quad w \in U,$$

и введем отображение по формуле $W^\alpha(u,v) = \arg\max_{w \in U} G^\alpha(u,v,w)$, $u \in U$, $v \in U$.

Процедура улучшения, основанная на формуле (20), принимает следующий вид.

1. По данному u^0 определим отображение $W_1^\alpha(v) = W^\alpha(u^0,v)$, $v \in U$.

2. Найдем неподвижную точку отображения W_1^α, т. е. решение уравнения $v = W_1^\alpha(v)$, $v \in U$.

Обозначим $V_1^\alpha(u^0) = \{v^\alpha \in U : v^\alpha = W_1^\alpha(v^\alpha)\}$ — множество неподвижных точек на выходе процедуры. Аналог теоремы 1 имеет следующую форму.

Теорема 2. *Управление* u^0 *удовлетворяет условию* (9) *тогда и только тогда, когда* $u^0 \in V_1^\alpha(u^0)$ *хотя бы для одного* $\alpha \geq 0$.

Отметим, что если u^0 удовлетворяет условию (9), то $u^0 \in V_1^\alpha(u^0)$ для всех $\alpha \geq 0$.

Линеаризованный принцип максимума (8) является следствием условия (9) (в случае дифференцируемости функции H по u и выпуклости U). Таким образом, справедливо

Следствие 4. Если u^0 является неподвижной точкой отображения W_1^α хотя бы для одного $\alpha \geq 0$, то u^0 удовлетворяет ЛПМ (8).

В линейной по управлению задаче (11), (12) условия (8) и (9) эквивалентны, поэтому необходимое условие оптимальности в форме ЛПМ можно сформулировать следующим образом.

Следствие 5. В линейной по управлению задаче (11), (12) с выпуклым множеством U для оптимальности управления u^0 необходимо, чтобы u^0 была неподвижной точкой отображения W_1^α хотя бы для одного $\alpha \geq 0$.

Неподвижные точки $v^\alpha \in V_1^\alpha(u^0)$ обеспечивают невозрастание целевой функции (16) с оценкой (17). При этом для особых неподвижных точек в линейной по управлению задаче (11), (12) неравенство (17) превращается в равенство.

Введем *условие регулярности*: если $v^\alpha \neq u^0$, $v^\alpha \in V_1^\alpha(u^0)$, то $J(v^\alpha, u^0) \neq 0$ для всех $\alpha > 0$. При выполнении условия регулярности особые неподвижные точки $v^\alpha \neq u^0$ в линейной по управлению задаче (11), (12) обеспечивают строгое улучшение управления u^0. Таким образом, поиск особых неподвижных точек в регуляризованной процедуре улучшения существенно расширяет возможности строгого нелокального улучшения управлений.

Сформулируем

Условие A_1. Точка u^0 является единственной неподвижной для отображения W_1^α при всех $\alpha > 0$: $\{u^0\} = V_1^\alpha(u^0)$, $\alpha > 0$.

Регуляризованная ($\alpha > 0$) процедура при условии существования неподвижных точек строго улучшает любое управление, не удовлетворяющее условию A_1 (при выполнении условия регулярности). Действительно, если для некоторого $\alpha > 0$ имеем $v^\alpha \neq u^0$, $v^\alpha \in V_1^\alpha(u^0)$, то с учетом условия регулярности на основании оценки (17) получаем строгое улучшение $\Phi(v^\alpha) < \Phi(u^0)$.

Очевидно, условие (9) для управления u^0 является следствием условия A_1. Это значит, что регуляризованная процедура при условии существования неподвижных точек может улучшать управление u^0, удовлетворяющее ЛПМ (8) и не удовлетворяющее условию A_1.

В линейной по управлению задаче (11), (12) справедливо следующее усиление необходимого условия оптимальности, имеющего форму ЛПМ.

Принцип A_1. В линейной по управлению задаче (11), (12) с выпуклым множеством U для оптимальности управления u^0 необходимо, чтобы u^0 была единственной неподвижной точкой отображения W_1^α для всех $\alpha > 0$ при выполнении условия регулярности.

В случае общей задачи (1), (2) отметим, что если u^0 оптимально и является неподвижной точкой отображения W_1^α для всех $\alpha > 0$, то других неподвижных точек не существует при всех $\alpha > 0$.

Выделим следующие свойства регуляризованной процедуры.

1. Особые неподвижные точки в регуляризованной процедуре, отличные от управления u^0, строго улучшают u^0 с оценкой (17) в линейной по управлению задаче (11), (12).

2. Регуляризованная процедура при условии существования неподвижных точек строго улучшает любое управление u^0, не удовлетворяющее ЛПМ.

3. Регуляризованная процедура при условии существования неподвижных точек строго улучшает управление u^0, удовлетворяющее ЛПМ и не удовлетворяющее условию A_1.

Отметим, что управление u^0, удовлетворяющее условию A_1, может строго улучшаться соответствующей нерегуляризованной ($\alpha = 0$) процедурой. В линейной по управлению задаче такая возможность обуславливается неединственностью неподвижных точек отображений.

В случае, когда в регуляризованной процедуре улучшения отсутствуют неподвижные точки, рассматриваемая процедура не действует и нужно перейти к другим процедурам улучшения.

6. Примеры

Проиллюстрируем работу предлагаемых процедур улучшения на простых примерах.

Пример 1 (улучшение управления). $\Phi(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2(t)dt \to \min$, $\dot{x}(t) = u$, $x(0) = 1$, $u \in U = [-1,1]$, $t \in T = [0,2]$.

В данном случае $H = pu - \frac{1}{2}x^2$, модифицированная сопряженная система $\dot{p}(t) = x(t) + \frac{1}{2}y(t)$.

Рассмотрим управление $u^0 = 0$ с соответствующей фазовой траекторией $x(t,u^0) = 1$, $t \in T$, и значением функционала $\Phi(u^0) = 1$. Поставим задачу об улучшении управления u^0.

Применим процедуру улучшения. Определим отображение $W_1^*(v)$ с соответствующей функцией переключения $g_1(v)$, $v \in U$. Получим $x(t,v) = vt + 1$, $p(t,u^0,v) = t + \frac{vt^2}{4} - (v+2)$, $t \in T$, $g_1(v) = \int\limits_0^2 p(t,u^0,v)dt = -2 - \frac{4}{3}v$, $W_1^*(v) = \operatorname{sign}(g_1(v))$, $v \in U$.

Единственным нулем функции переключения g_1 является точка $v = -\frac{3}{2} \notin [-1,1]$. Следовательно, особых неподвижных точек нет. Методом подстановки определятся единственная неособая неподвижная точка $v = -1$.

Проведем обсуждение процедуры. Так как $u^0 = 0$ не является неподвижной точкой отображения W_1^*, то $u^0 = 0$ не удовлетворяет линеаризованному принципу максимума. Так как $v = -1 \neq u^0$ и $g_1(-1) \neq 0$, то $v = -1$ строго улучшает $u^0 = 0$ с величиной приращения $\Delta_v\Phi(u^0) = -(v - u^0)g_1(v) = -\frac{2}{3}$.

Пример 2 (отсутствие улучшения). В задаче примера 1 в качестве улучшаемого управления выберем полученное в примере 1 управление $u^0 = -1$ с соответствующей фазовой траекторией $x(t,u^0) = 1 - t$, $t \in T$, и значением функционала $\Phi(u^0) = \frac{1}{3}$.

Применим процедуру улучшения. Имеем $x(t,v) = vt+1$, $p(t,u^0,v) = t + \frac{(v-1)t^2}{4} - (v+1)$, $t \in T$, $g_1(v) = \int_0^2 p(t,u^0,v)dt = -\frac{2}{3} - \frac{4}{3}v$, $W_1^*(v) = \operatorname{sign}(g_1(v))$, $v \in U$.

Единственным нулем функции переключения g_1 является точка $v = -\frac{1}{2} \in [-1,1]$. Подстановкой убеждаемся, что неособых неподвижных точек нет. Следовательно, $v = -\frac{1}{2}$ является единственной особой неподвижной точкой отображения W_1^*.

Так как $u^0 = -1$ не является неподвижной точкой отображения W_1^*, то u^0 не удовлетворяет линеаризованному принципу максимума. Строгого улучшения согласно формуле $\Delta_v\Phi(u^0) = -(v - u^0)g_1(v)$ не происходит.

Пример иллюстрирует, что слабым местом рассматриваемой процедуры улучшения является возможность стабилизации, т. е. отсутствия улучшения на управлениях, не удовлетворяющих ЛПМ. С целью преодоления этого явления может быть проведена фазовая регуляризация процедуры улучшения, которая приобретает свойство улучшать любые управления, не удовлетворяющие ЛПМ.

Пример 3 (эффект регуляризации). В примере 2 улучшим $u^0 = -1$. Регуляризуем целевую функцию с помощью единичной матрицы $B = E = 1$:

$$J_\alpha(v,u^0) = \Phi(v) + \alpha J(v,u^0) = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2(t)dt + \frac{1}{2}\alpha\int_0^2 (x(t) - (1-t))^2 dt, \quad \alpha \geq 0.$$

Применим регуляризованную процедуру улучшения. Определим соответствующее отображение $W_1^\alpha(v)$, $v \in U$. Имеем $x(t,v) = vt + 1$, $p^\alpha(t,u^0,v) = t + \frac{(v-1)+\alpha(v+1)}{4}t^2 - ((v-1) + \alpha(v+1) + 2)$, $t \in T$, $g_1^\alpha(v) = \int\limits_0^2 p^\alpha(t,u^0,v)dt = -2 - \frac{4}{3}((\alpha+1)v + (\alpha-1))$, $v \in U$, $W_1^\alpha(v) = \operatorname{sign}(g_1^\alpha(v))$.

Особыми неподвижными точками отображения W_1^α являются точки $v^\alpha = \frac{-2-\frac{4}{3}(\alpha-1)}{\frac{4}{3}(\alpha+1)}$. При этом выполняется строгое неравенство $-1 < v^\alpha < 1$, $\alpha \geq 0$, причем $\lim\limits_{\alpha\to\infty} v^\alpha = -1$. Методом подстановки убеждаемся, что неособых неподвижных точек нет.

Таким образом, отображение W_1^α имеет только особые неподвижные точки, отличные от u^0 при любых $\alpha \geq 0$. Следовательно, u^0 не удовлетворяет линеаризованному принципу максимума и тем более условию A_1.

Строгого улучшения регуляризованной функции не происходит для любого $\alpha \geq 0$, т. е. $\Delta J_\alpha(v^\alpha, u^0) = 0$, $\alpha \geq 0$. Но для исходной целевой функции Φ получим оценку $\Phi(v^\alpha) - \Phi(u^0) = -\alpha J(v^\alpha, u^0)$, $\alpha \geq 0$.

Легко проверить, что неподвижные точки v^α удовлетворяют условию регулярности. Тогда из последней оценки следует строгое улучшение целевой функции при $\alpha > 0$ и отсутствие улучшения при $\alpha = 0$ (нерегуляризованный случай).

В этом состоит один из эффектов регуляризации: при $\alpha = 0$ особая неподвижная точка отображения в процедуре улучшения, отличная от u^0, не дает улучшения по целевой функции. При $\alpha > 0$ особая неподвижная точка отображения, отличная от u^0, приводит к строгому улучшению, гарантируемому оценкой (17).

Рассматриваемый пример демонстрирует, что регуляризованная процедура улучшения при $\alpha > 0$ строго улучшает любые управления, не удовлетворяющие условию A_1, в том числе не удовлетворяющие линеаризованному принципу максимума.

С целью выбора наилучшего параметра регуляризации, обеспечивающего наибольшее убывание целевой функции, рассмотрим задачу одномерной оптимизации

$$\Phi(\alpha) = -\alpha J(v^\alpha, u^0) = -\frac{\alpha}{3(\alpha+1)^2} \to \min_{\alpha>0}.$$

Решением задачи является $\alpha^* = 1$ с минимальным значением $\Phi(\alpha^*) = -\frac{1}{12}$. Соответствующая особая точка $v^* = -\frac{3}{4}$. Отметим, что управляющий параметр $v^* = -\frac{3}{4}$, обеспечивающий наибольшее убывание целевой функции на выходе регуляризованной процедуры, является оптимальным в рассматриваемой задаче.

Литература

1. Васильев О.В. *Лекции по методам оптимизации.* – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994. – 342 с.
2. Тятюшкин А.И. *Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 192 с.
3. Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
4. Булдаев А.С. *Нелокальное улучшение управлений в динамических системах, квадратичных по состоянию* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 12. – С. 3–9.
5. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.* – М.: Наука, 1986. – 272 с.

Восточно-Сибирский государственный технологический университет

Поступила 25.06.2002