ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 12 (547)

УДК 517.929

В.Б. ЛАЗАРЕВА, А.М. ШЕЛЕХОВ

К ПРОБЛЕМЕ КЛАССИФИКАЦИИ РЕГУЛЯРНЫХ 4-ТКАНЕЙ, ОБРАЗОВАННЫХ ПУЧКАМИ СФЕР

Введение

В [1] сформулированы две “конформные” задачи: перечислить все регулярные (параллелизуемые) 3-ткани, образованные пучками окружностей, и привести примеры 4-тканей, образованных пучками сфер в трехмерном конформном пространстве. Напомним, что 3-ткань называется *параллелизуемой* или *регулярной*, если она эквивалентна ткани, образованной семействами параллельных плоскостей.

Решением первой задачи занималось несколько авторов, но, несмотря на кажущуюся простоту формулировки, она долго не поддавалась решению. Дело в том, что все авторы использовали путь, предложенный Бляшке — вычисляли кривизну ткани и приравнивали ее нулю. Этот путь приводил к громоздким вычислениям, которые отчетливо никому довести до конца не удалось. В [2] одним из авторов предложен другой путь, основанный на внешне весьма простом факте: оказалось, что гладкая часть граничной кривой любой регулярной криволинейной 3-ткани принадлежит этой ткани. С помощью этого утверждения в [2] строго доказано, что кроме известных семи классов регулярных круговых 3-тканей, перечисленных в [3], других классов не существует.

В данной работе показывается, что задачу классификации регулярных 4-тканей, образованных пучками сфер в трехмерном конформном пространстве (короче, сферических 4-тканей) можно эффективно решать, используя методы и результаты работы [2].

Во-первых, обобщается теорема о границах регулярных криволинейных 3-тканей для регулярных $(n+1)$-тканей коразмерности 1.

Согласно определению ([4], с. 4) $(n+1)$-ткань W образована на n-мерном многообразии X $n+1$ слоениями коразмерности 1, находящимися в общем положении. Последнее означает, что через каждую точку M области определения проходят в точности $n+1$ слоев ткани, по одному из каждого слоения, причем любые n из них находятся в общем положении — касательные плоскости к ним (в точке M) имеют нульмерное пересечение. Иными словами, указанные касательные плоскости образуют корепер в точке M.

Пусть слоения λ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n+1$, $(n+1)$-ткани W заданы в некоторой области U в локальных координатах уравнениями

$$F_\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n) = c_\alpha = \mathrm{const}, \tag{0.1}$$

тогда условие “в общем положении” эквивалентно тому, что все определители n-го порядка $n \times (n+1)$-матрицы $\mathcal{G}$, составленной из градиентов функций F_α, отличны от нуля в каждой точке области определения ткани.

Точки области U, в которых ранг какого-либо из этих определителей меньше n, называем, следуя [2], *граничными*. Они не входят в область определения ткани и образуют *границу* (размерности $(n-1)$, вообще говоря). Обозначим через Γ_α ту компоненту границы, которая выделяется обращением в нуль определителя матрицы $\mathcal{G}$, получающегося вычеркиваем из нее столбца с номером α (этот определитель также будем обозначать через Γ_α). Тогда область определения ткани есть $U/\cup\Gamma_\alpha$.

Ткань назовем *параболической*, если обращение в нуль какого-либо одного из $n+1$ определителей Γ_α влечет обращение в нуль всех остальных.

В работе будет доказано следующее утверждение, обобщающее аналогичное предложение для криволинейных тканей.

Теорема 1 (обобщение теоремы Шелехова о границах регулярных криволинейных 3-тканей). *Если непараболическая $(n+1)$-ткань W является регулярной (параллелизуемой), то гладкая часть ее граничной поверхности Γ_α принадлежит семейству λ_α этой ткани.*

Во второй части работы рассматриваются сферические 4-ткани W, т. е. ткани, образованные четырьмя пучками сфер в трехмерном конформном пространстве. Сферические 4-ткани, у которых никакие два пучка не имеют общей сферы, названы *основными*. Главный результат работы

Теорема 2. *Сферическая 4-ткань W основного типа не может быть регулярной.*

1. Теорема о границах односвязных областей регулярной $(n+1)$-ткани

Пусть слоения λ_α коразмерности 1, образующие $(n+1)$-ткань W на гладком n-мерном многообразии X, заданы в некоторых локальных координатах уравнениями (0.1).

Пусть M — такая точка области U, что в ней по крайней мере один из миноров порядка n матрицы $\mathcal{G}$ отличен от нуля. Предположим, что от нуля отличен определитель Γ_{n+1}. Тогда в некоторой окрестности точки M локальные координаты можно выбрать так, что первые n слоений ткани станут координатными, т. е. будут определяться уравнениями $x_i = c_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для краткости такие координаты в дальнейшем будем называть адаптированными. В адаптированных координатах последнее слоение будет задаваться уравнением вида (0.1), т. е. его слои будут поверхностями уровня некоторой (гладкой) функции

$$y = F(x^1, x^2, \dots, x^n). \tag{1.1}$$

С другой стороны, уравнение (1.1) связывает параметры слоев $(n+1)$-ткани W, проходящих через одну точку, и называется уравнением этой ткани.

Самая простая $(n+1)$-ткань-*параллельная* — образована $n+1$ семействами параллельных гиперплоскостей в аффинном пространстве. При подходящем выборе координат уравнение такой ткани запишется в виде

$$y = x^1 + x^2 + \dots + x^n. \tag{1.2}$$

Теперь заметим, что, выбрав в некоторой области адаптированные координаты, будем исключать из нее соответствующую граничную поверхность (в выбранных выше координатах — поверхность Γ_{n+1}). Более того, если ткань является параболической, то из этой области исключаются *все* граничные поверхности. Поэтому исследовать граничные поверхности ткани в адаптированных координатах можно только у тканей непараболического типа.

Основное свойство $(n+1)$-ткани — трансверсальность поверхностей — сохраняется при локально диффеоморфной замене параметров $c^\alpha = \varphi^\alpha(\widetilde{c}^\alpha)$ в семействах, образующих ткань. Совокупность $n+1$ таких локальных диффеоморфизмов называется изотопией или изотопическим преобразованием. Изотопию можно рассматривать также как локально диффеоморфное отображение заданной $(n+1)$-ткани на некоторую другую $(n+1)$-ткань, локально эквивалентную первой. Изотопия — наиболее широкое отношение эквивалентности, сохраняющее трансверсальность.

Если в области определения параллельной $(n+1)$-ткани, заданной уравнением (1.2), вместо адаптированных координат x^i ввести новые адаптированные координаты $\widetilde{x}^i = (\varphi^i)^{-1}(x^i)$, то уравнение (1.2) примет следующий вид (волну над переменными x^i для удобства записи опускаем):

$$y = \varphi^1(x^1) + \varphi^2(x^2) + \cdots + \varphi^n(x^n). \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) в области определения новых переменных x^i задает некоторую регулярную $(n+1)$-ткань, эквивалентную параллельной ткани (1.2). Выясним геометрический смысл граничных точек. Пусть точка M принадлежит граничной поверхности Γ_α. Тогда согласно определению в этой точке градиенты соответствующих n слоев ткани линейно зависимы. Следовательно, касательные плоскости имеют более чем нульмерное пересечение, вообще говоря, одномерное. (Однако в каких-то случаях оно может иметь произвольную размерность p, $n-1>p>0$, а значит, граничные поверхности можно классифицировать в зависимости от величины p.)

В параболическом случае, поскольку обращение в нуль одного из определителей Γ_α влечет обращение в нуль всех остальных, в граничных точках касаются друг друга все $n+1$ слоев ткани. При этом размерность p общего касательного пространства также может быть произвольной.

Пусть рассматриваемая $(n+1)$-ткань W является непараболической и задана уравнением (1.1). Тогда в адаптированных координатах ее граничная поверхность Γ_i определяется уравнением $\frac{\partial F}{\partial x^i} = 0$. Это уравнение выделяет точки, в которых касательная плоскость к слою $y = \mathrm{const}$ содержит одномерное направление i. Следовательно, в этой точке все слои ткани, кроме слоя $x^i = \mathrm{const}$, касаются одномерного направления x^i.

Пусть теперь $(n+1)$-ткань W является регулярной и непараболической, тогда ее можно задать уравнением (1.3). Граничная поверхность Γ_i, как легко видеть, определяется уравнением $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} = 0$. Решения этого уравнения, если они есть, имеют вид $x^i = c^i = \mathrm{const}$, а это уравнение некоторого слоя $\mathcal{F}_i$ из i-го слоения ткани W. Поскольку других соотношений, связывающих переменные x^i, нет, то получается, что в каждой точке слоя $\mathcal{F}_i$ остальные слои ткани имеют общее одномерное направление, направленное по градиенту этого слоя. Тем самым теорема 1 доказана.

2. Четыре-ткани, образованные пучками сфер

Зададим уравнения пучков сфер, образующих некоторую сферическую четыре-ткань W, в виде

$$S_{\alpha 1} + x_\alpha S_{\alpha 2} = 0, \quad \alpha = \overline{1,4}, \tag{2.1}$$

где $S_{\alpha 1}$ и $S_{\alpha 2}$ — базисные сферы пучка λ_α, x_α — параметр пучка λ_α. Уравнение базисной сферы, например, $S_{\alpha 1}$ запишем в виде:

$$S_{\alpha 1} \equiv a_{\alpha_1}(x^2+y^2+z^2) + b_{\alpha_1}x + c_{\alpha_1}y + d_{\alpha_1}z + e_{\alpha_1} = 0$$

и положим

$$e_\alpha = e_{\alpha_1} + x_\alpha e_{\alpha_2}, \quad d_\alpha = d_{\alpha_1} + x_\alpha d_{\alpha_2}, \quad a_\alpha = a_{\alpha_1} + x_\alpha a_{\alpha_2},$$
$$b_\alpha = b_{\alpha_1} + x_\alpha b_{\alpha_2}, \quad c_\alpha = c_{\alpha_1} + x_\alpha c_{\alpha_2}, \quad \alpha = \overline{1,4}.$$

Аналогично тому, как это было сделано в [1], исключим из уравнений (2.1) координаты x, y, z и получим уравнение сферической ткани в виде

$$(aecd)^2 + (abed)^2 + (abce)^2 = (abcd)(ebcd), \tag{2.2}$$

где $(abcd)$ — определитель четвертого порядка, столбцами которого будут векторы $a(a_\alpha)$, $b(b_\alpha)$, $c(c_\alpha)$, $d(d_\alpha)$ и т. д.

Как видно из (2.2), уравнение сферической ткани является квадратичным по каждой из переменных x_α.

В данной работе будем использовать проективную интерпретацию Дарбу многообразия сфер. В ней точки пространства (сферы нулевого радиуса) изображаются точками некоторой овальной квадрики четырехмерного проективного пространства P^4, которая называется *квадрикой Дарбу*, будем обозначать ее K. Если уравнение сферы записать в виде $a(x^2+y^2+z^2)+bx+cy+dz+e=0$, то уравнение квадрики Дарбу K будет иметь вид

$$b^2+c^2+d^2-4ae=0. \tag{2.3}$$

Сферы ненулевого радиуса изображаются точками внешней (по отношению к квадрике Дарбу) области пространства P^4, пучки сфер — прямыми в P^4, связки сфер — двумерными плоскостями, гиперсвязки — гиперплоскостями. При этом гиперболические, эллиптические и параболические пучки сфер изображаются соответственно прямыми, пересекающими, не пересекающими и касающимися квадрики Дарбу; параболические связки и гиперсвязки сфер — соответственно двумерными и трехмерными плоскостями, касающимися квадрики Дарбу; ортогональные пучки и связки сфер — прямыми и плоскостями, сопряженными относительно квадрики Дарбу. Точки, принадлежащие сфере C, изображаются точками квадрики Дарбу, лежащими на пересечении этой квадрики с гиперплоскостью, сопряженной точке C; точки окружности, принадлежащей всем сферам пучка — точками пересечения квадрики Дарбу с двумерной плоскостью, полярной прямой, изображающей пучок, и т. д.

Отметим также, что касающиеся друг друга сферы принадлежат одному параболическому пучку, и поэтому изображаются точками, лежащими на прямой, касающейся квадрики Дарбу. Три сферы, касающиеся некоторой прямой m в точке M, порождают параболическую связку сфер, причем сферы с центрами на m, проходящие через точку M, образуют параболический пучок сфер, ортогональный этой связке. В проективном пространстве эти объекты изображаются соответственно двумерной плоскостью и прямой, касающимися квадрики Дарбу в некоторой точке (в образе точки M) и полярно сопряженными относительно этой квадрики.

4-ткань W, образованная четырьмя пучками сфер, изображается в проективном пространстве P^4 четырьмя прямыми, обозначим их ℓ_α. Так как четыре сферы, взятые из разных пучков 4-ткани W и проходящие через одну точку, принадлежат одной параболической гиперсвязке, то образы этих сфер в P^4 есть точки, принадлежащие гиперплоскости, касающейся квадрики Дарбу K. Обозначим (если это не будет приводить к путанице) образы сфер в пространстве P^4 теми же символами, что и в исходном конформном пространстве.

Наконец, дадим интерпретацию 3-подтканям рассматриваемой 4-ткани W.

Напомним, что 3-подткань высекается на фиксированном слое некоторого слоения ткани W слоями из других слоений. Фиксируем сферу S, например, в пучке λ_4 и обозначим высекаемую на ней остальными сферами пучков λ_i, $i=1,2,3$, круговую 3-ткань через W'. Найдем образ Дарбу этой ткани.

Прежде всего заметим, что плоскость π, полярно сопряженная точке S относительно квадрики Дарбу K, пересекает K по двумерной сфере, которую обозначим $K(S)$. Окружности, образующие три-ткань W', высекаются на квадрике Дарбу K двумерными плоскостями, полярно сопряженными (относительно этой квадрики) прямым, соединяющим точку S с точками прямых ℓ_i, $i=1,2,3$. Но все эти окружности лежат в трехмерной плоскости π и, следовательно, высекаемые ими окружности ткани W' лежат на двумерной сфере $K(S)$. Таким образом, эта сфера в плоскости π и есть квадрика Дарбу проективной модели трехмерного проективного пространства для 3-ткани W'. Пучки окружностей, образующих эту ткань, изображаются в плоскости π тремя прямыми ℓ'_1, ℓ'_2 и ℓ'_3 — проекциями прямых ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 на плоскость π из точки S.

Область определения сферической ткани представляет собой все конформное пространство, из которого нужно удалить общие окружности эллиптических пучков, нулевые окружности гиперболических пучков, вершины параболических пучков, а также граничные поверхности Γ_α, образованные, как было сказано выше, точками, в которых три сферы, взятые по одной из каких-либо трех пучков, имеют общую касательную. Уравнения поверхностей Γ_α можно найти следующим образом.

Пусть S_1, S_2 и S_3 — три сферы, принадлежащие соответствующим пучкам сфер, и пусть они имеют общую касательную в точке M. Эти сферы порождают параболическую связку сфер с вершиной в M. При этом точка M также принадлежит связке (как сфера нулевого радиуса).

Поэтому ее можно представить в виде линейной комбинации базисных сфер: $M = aS_1 + bS_2 + cS_3$. В проективном пространстве P^4 соответствующая плоскость $[S_1, S_2, S_3]$ касается квадрики Дарбу в точке M, поэтому она сопряжена каждой из точек S_1, S_2, S_3 относительно квадрики Дарбу. Условие сопряженности записывают в виде $(M, S_1) = 0$ и т. д., где скобки означают билинейную симметричную форму, сопряженную квадратичной форме, стоящей в левой части уравнения (2.3), определяющего квадрику Дарбу. Подставляя в эти три равенства разложение для точки M, получим три однородных уравнения на параметры a, b, c. Так как точка M существует, то система имеет ненулевое решение, т. е. соответствующий определитель (определитель Грама для точек S_1, S_2 и S_3) равен нулю:

$$\mathrm{Det}\,(S_i, S_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Всего получим четыре граничные поверхности. Прямым вычислением нетрудно проверить, что это алгебраические поверхности шестого порядка (вообще говоря).

Теорема 3. *Граничные поверхности сферической* 3*-ткани являются вещественными.*

Доказательство. Пусть, как и выше, S_1 — произвольная сфера первого пучка, S_2 — второго, причем последнюю выберем так, чтобы эти сферы пересекались. Это всегда возможно, поскольку через произвольную точку пространства всегда проходит единственная сфера, принадлежащая данному пучку. Обозначим окружность пересечения сфер S_1 и S_2 через O и возьмем на ней произвольную точку A. Через A проходит произвольная сфера третьего пучка, обозначим ее S_3. Если сфера S_3 касается окружности O в точке A, то последняя согласно определению принадлежит граничной поверхности. Предположим, в точке A касания нет, тогда сфера S_3 и окружность O пересекаются еще в одной точке, A'.

Если точку A перемещать по окружности O, то точка A' также будет перемещаться, и в силу непрерывности в некоторый момент они совпадут. Таких точек совпадения будет, очевидно, две, и они обе принадлежат граничной поверхности. □

Следствие из теоремы 1 *для сферических* 4*-тканей.* Пусть сферическая 4-ткань W является регулярной. В силу теоремы 1 гладкие куски каждой ее граничной поверхности Γ_α должны быть сферами, принадлежащими соответствующему семейству λ_α. Но поскольку в общем случае граничные поверхности сферической 4-ткани суть поверхности шестого порядка, то в регулярном случае они должны распадаться на 3 сферы, некоторые из которых могут совпадать или быть точками — сферами нулевого радиуса.

3. Сферические 4-ткани основного типа

Напомним, что сферические 4-ткани, пучки которых не имеют общих сфер, для краткости названы основными. Пучки сфер, образующих сферическую 4-ткань основного типа, изображаются в проективном пространстве P^4 четырьмя попарно скрещивающимися прямыми.

Далее будем рассматривать, в частности, такие сферические 4-ткани, пучки которых принадлежат одной гиперсвязке сфер, т. е. допускают ортогональную сферу S_0. Будем обозначать такие ткани W_0. Пучки сфер, образующих сферическую 4-ткань W_0, изображаются в проективном пространстве P^4 четырьмя прямыми, лежащими в гиперплоскости, полярно сопряженной точке S_0 относительно квадрики Дарбу K.

Теорема 4. *Если сферическая* 4*-ткань* W *основного типа регулярна, то она является тканью* W_0.

Доказательство. Фиксируем, например, в пучке λ_4 сферу S и рассмотрим на ней 3-подткань W', высекаемую сферами пучков λ_i, $i = 1, 2, 3$. Как было показано выше, образ Дарбу этой подткани — это три прямые ℓ'_i — проекции прямых ℓ_i из точки S на плоскость $\pi(S)$, полярно сопряженную точке S (последняя лежит на прямой ℓ_4) относительно квадрики Дарбу K.

Так как рассматриваемая 4-ткань W является регулярной, то регулярной будет и подткань W'. Но тогда согласно результатам из [2] прямые ℓ'_i, представляющие эту 3-ткань, не могут попарно скрещиваться — какие-то две из них обязаны пересекаться. Пусть это будут прямые ℓ'_1 и ℓ'_2. Обозначим точку их пересечения через A.

Далее, т.к. прямые ℓ'_1 и ℓ'_2 получаются проектированием прямых ℓ_1 и ℓ_2 из точки S, то проектирующая прямая SA должна пересекать последние две прямые. Поэтому получается, что SA — трансверсаль трех прямых ℓ_4, ℓ_1 и ℓ_2.

Проведенные рассуждения справедливы для 3-подткани, высекаемой на любой сфере пучка λ_4. Это означает, что трансверсаль должна существовать при любом положении точки S на прямой ℓ_4. Следовательно, тройка прямых ℓ_4, ℓ_1 и ℓ_2 допускает однопараметрическое семейство одномерных трансверсалей, а отсюда, в свою очередь, вытекает, что эти три прямые лежат в одном трехмерном подпространстве.

Аналогичные рассуждения можно провести для любой тройки прямых ℓ_α, поэтому получается, что все они лежат в одном трехмерном подпространстве. Полюс этого подпространства и есть образ сферы S_0, ортогональной всем сферам пучков λ_α, образующих 4-ткань W. $\square$

Замечание. Как видно из доказательства, результат можно усилить. Действительно, теорема будет верна при более слабом предположении: достаточно, чтобы среди четырех прямых, представляющих сферическую 4-ткань, существовали 2 тройки попарно скрещивающихся прямых.

Теорема 5. *Всякая сферическая 4-ткань W_0 является тканью параболического типа.*

Доказательство. Напомним, что прямые ℓ_α, представляющие пучки сфер ткани W_0, лежат в одной гиперплоскости, обозначим ее σ. Плоскость σ высекает из квадрики Дарбу двумерную сферу, обозначим ее $S(\sigma)$. Текущая точка граничной поверхности, например, поверхности Γ_4, согласно определению получается таким образом. Возьмем по точке на каких-либо двух из четырех прямых ℓ_α: $A \in \ell_1$, $B \in \ell_2$, затем через точки A и B проведем двумерную касательную плоскость к квадрике Дарбу так, чтобы она пересекла и прямую ℓ_3. Точка касания и есть точка граничной поверхности Γ_4. Но т.к. все четыре прямые ℓ_α лежат в гиперплоскости σ, то, во-первых, точка касания лежит на квадрике $S(\sigma)$, а, во-вторых, эта же касательная плоскость будет пересекать и прямую ℓ_4. Иными словами, всякая двумерная плоскость, касающаяся квадрики Дарбу и пересекающая три из четырех прямых, пересекает и четвертую. А это и означает, что рассматриваемая 4-ткань является тканью параболического типа. $\square$

Теорема 6. *Всякая сферическая 4-ткань W_0 является шестиугольной.*

Доказательство. Фиксируем, например, в пучке λ_4 сферу S и рассмотрим на ней 3-подткань W_0, высекаемую сферами пучков λ_i, $i = 1, 2, 3$. Образ Дарбу этой подткани — это три прямые ℓ'_i, $i = 1, 2, 3$, — проекции прямых ℓ_i, из точки S на плоскость $\pi(S)$, полярно сопряженную точке S (лежащей на прямой ℓ_4) относительно квадрики Дарбу K. Пусть, как и выше, σ — гиперплоскость, в которой лежат прямые ℓ_α. Так как прямые ℓ_i и точка проектирования S лежат в одной и той же плоскости σ, то эти прямые спроектируются в одну двумерную плоскость — пересечение плоскостей $\pi(S)$ и σ. Но круговая 3-ткань, отвечающая трем прямым ℓ'_i, лежащим в одной плоскости, будет регулярной (см., напр., [2]).

Аналогичный вывод получится при любом расположении точки S на прямой ℓ_4 и для любой из прямых ℓ_α. Следовательно, все 3-подткани рассматриваемой ткани W являются регулярными. Значит, в соответствии с определением, и сферическая 3-ткань W будет шестиугольной. $\square$

Как известно [1], шестиугольность 4-ткани еще не гарантирует ее регулярности. Поэтому из теоремы 4 не вытекает, что сферическая 4-ткань W_0 будет регулярной. Чтобы описать условие регулярности, докажем предварительно одно утверждение, детализирующее известную теорему Зауэра: всякая 4-ткань, образованная плоскостями в трехмерном пространстве, будет параллелизуемой (регулярной) тогда и только тогда, когда существуют две квадрики, касающиеся всех плоскостей этой ткани (см. [1], с. 94).

Теорема 7 (дополнение к теореме Зауэра). *Всякая 4-ткань, образованная четырьмя пучками плоскостей в трехмерном пространстве, будет параллелизуемой (регулярной) тогда и только тогда, когда оси пучков образуют замкнутую пространственную цепочку: каждая из них пересекает две другие, но никакие три не проходят через одну точку и не лежат в одной плоскости.*

Доказательство. Согласно теореме Зауэра, плоскости, образующие регулярную 4-ткань W, представляют собой некоторое алгебраическое многообразие — совокупность касательных плоскостей к двум квадрикам, обозначим последние S_1 и S_2. Пусть регулярная 4-ткань W образована четырьмя пучками плоскостей с осями $\widetilde{\ell}_\alpha$. Тогда многообразие касательных плоскостей к квадрикам S_1 и S_2 должно распадаться на пучки плоскостей. Это означает, что квадрики S_1 и S_2 являются линейчатыми, а оси пучков являются их прямолинейными образующими.

Линейчатая квадрика содержит, как известно, две серии прямолинейных образующих. Если у двух линейчатых квадрик три образующие из одной серии совпадают, то и квадрики совпадают. Поэтому у двух разных линейчатых квадрик четыре общие образующие могут быть только по две из каждой серии. В канонических координатах уравнения двух таких квадрик имеют вид $x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0$, $x^2 - y^2 - z^2 + w^2 = 0$, а общие образующие определяются уравнениями $x = \pm z$, $y = \pm w$. Эти четыре прямые образуют цепочку, описанную в условии теоремы 7. $\square$

Теорема 8. *Сферическая 4-ткань W_0 является регулярной тогда и только тогда, когда составляющие ее четыре пучка сфер образуют последовательность, в которой каждые два соседних пучка имеют общую сферу (принадлежат одной связке сфер), причем никакие три пучка не принадлежат одной связке и не имеют общей сферы.*

Доказательство можно провести непосредственно, вычислив компоненты кручения рассматриваемой 4-ткани [1]. Однако мы дадим геометрическое доказательство.

Рассмотрим в гиперплоскости σ наряду с прямыми ℓ_α, изображающими пучки сфер нашей ткани, двойственный образ — четыре прямые $\widetilde{\ell}_\alpha$, полярно сопряженные прямым ℓ_α относительно квадрики $S(\sigma)$ (обозначения см. в доказательстве теоремы 5). Прямолинейным рядам точек с носителями ℓ_α, изображающим пучки сфер рассматриваемой 4-ткани W_0, в этом поляритете соответствуют пучки двумерных плоскостей с осями $\widetilde{\ell}_\alpha$ в трехмерном пространстве σ. Таким образом, можно считать, что рассматриваемая сферическая 4-ткань W_0 изображается в трехмерном пространстве σ четырьмя пучками плоскостей с осями $\widetilde{\ell}_\alpha$. Но согласно теореме 7 такая 4-ткань будет регулярной только в случае специального расположения осей пучков $\widetilde{\ell}_\alpha$, описанном в теореме 6. Конфигурация, образованная этими осями, такова, что двойственная ей конфигурация, образованная прямыми ℓ_α, обладает теми же проективными свойствами, т. е. образует пространственную цепочку. Если свойства цепочки описать в терминах пучков сфер, то получим утверждение теоремы 8.

Теорема 2 вытекает из теорем 4 и 8.

Литература

1. Бляшке В. *Введение в геометрию тканей.* – М.: Физматгиз, 1959. – 144 с.
2. Шелехов А.М. *О три-тканях, образованных пучками окружностей* // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения. – 2005. – Т. 32. – С. 7–28.
3. Лазарева В.Б. *Параллелизуемые три-ткани, образованные пучками окружностей* // Ткани и квазигруппы. - Калинин, Калининский госуниверситет, 1988. – С. 74–77.
4. Goldberg V.V. *Theory of multicodimensional* $(n+1)$*-webs.* – Kluwer Academic Publishers/Dordrecht/Boston/London, 1988. – xiii+466 p.

Тверской государственный университет

Поступила 17.08.2006