ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 11 (426)

УДК 513

*П.Е. МАРКОВ*

# ОБЩИЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОГРУЖЕНИЙ. II [1)]

## 3. Основная система уравнений

**3.1.** Для $C^r$-погружения $z : X \to \Pi$, $r \geq 2$, рассмотрим на $X$ систему семи уравнений

$$\begin{cases} d\delta^s\tau^i = \sum\limits_{\alpha=1}^{s}(\delta^\alpha\tau^k \wedge \delta^{s-\alpha}\Phi^i_k + \delta^{s-\alpha}\tau^k \wedge \delta^\alpha\Phi^i_k), \\ \Delta^i\delta^s\Phi^i_j + \Delta^j\delta^s\Phi^j_i = 0, \\ d\delta^s\Phi^i_j = \sum\limits_{\alpha=1}^{s}[-(\delta^\alpha\Phi^i_k \wedge \delta^{s-\alpha}\Phi^k_j + \delta^{s-\alpha}\Phi^i_k \wedge \delta^\alpha\Phi^k_j) + \\ \qquad + \Delta^i\Delta^\sigma(\delta^\alpha\omega^\sigma_i \wedge \delta^{s-\alpha}\omega^\sigma_j + \delta^{s-\alpha}\omega^\sigma_i \wedge \delta^\alpha\omega^\sigma_j)], \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{s}(\delta^\alpha\tau^i \wedge \delta^{s-\alpha}\omega^\sigma_i + \delta^{s-\alpha}\tau^i \wedge \delta^\alpha\omega^\sigma_i) = 0, \\ d\delta^s\omega^\sigma_i = \sum\limits_{\alpha=1}^{s}[\delta^\alpha\Phi^k_i \wedge \delta^{s-\alpha}\omega^\sigma_k + \delta^{s-\alpha}\Phi^k_i \wedge \delta^\alpha\omega^\sigma_k + \\ \qquad + \Delta^\tau(\delta^\alpha\omega^\tau_i \wedge \delta^{s-\alpha}\varkappa^\sigma_\tau + \delta^{s-\alpha}\omega^\tau_i \wedge \delta^\alpha\varkappa^\sigma_\tau)], \\ \delta^s\varkappa^\tau_\sigma + \delta^s\varkappa^\sigma_\tau = 0, \\ d\delta^s\varkappa^\tau_\sigma = \sum\limits_{\alpha=1}^{s}[\Delta^i(\delta^\alpha\omega^\tau_i \wedge \delta^{s-\alpha}\omega^\sigma_i + \delta^{s-\alpha}\omega^\tau_i \wedge \delta^\alpha\omega^\sigma_i) + \\ \qquad + \Delta^\rho(\delta^\alpha\varkappa^\rho_\sigma \wedge \delta^{s-\alpha}\varkappa^\tau_\rho + \delta^{s-\alpha}\varkappa^\rho_\sigma \wedge \delta^\alpha\varkappa^\tau_\rho)], \end{cases} \tag{25}$$

где $\delta^s\tau^i$, $\delta^s\Phi^i_j$, $\delta^s\omega^\sigma_i$, $\delta^s\varkappa^\tau_\sigma$ — искомые 1-формы, $s = 1, \dots, l$, $\delta^0\tau^i = \tau^i$, $\delta^0\Phi^i_j = \Phi^i_j$, $\delta^0\omega^\sigma_i = \omega^\sigma_i$, $\delta^0\varkappa^\tau_\sigma = \varkappa^\tau_\sigma$, $i, j, k = 1, \dots, n$; $\tau, \sigma, \rho = 1, \dots, p$, по повторяющимся индексам — суммирование, $d$ — знак обобщенного внешнего дифференциала. Систему (25) будем называть основной системой уравнений теории бесконечно малых (б. м.) деформаций погружений, а следующую теорему — основной теоремой этой теории.

**Теорема 4.** *Если многообразие $X$ односвязно, то всякому решению $\{\delta^s\tau^i, \delta^s\Phi^i_j, \delta^s\omega^\sigma_i, \delta^s\varkappa^\tau_\sigma\}^l_{s=1}$ класса $\mathcal{E}^{r-2}(X, T^*(X))$ системы* (25) *соответствует б. м. деформация $l$-го порядка погружения $z$, при которой $\delta^s\tau^i, \delta^s\Phi^i_j, \delta^s\omega^\sigma_i, \varkappa^\tau_\sigma$ являются $s$-ми вариациями форм корепера $\tau$, связности $\Phi$, погружения и кручения соответственно. При этом вариации $\delta^s z$ погружения $z$ определяются решением однозначно с точностью до слагаемых вида $\Omega^s z + \omega^s$, где $\Omega^s$ — произвольный постоянный бивектор, $\omega^s$ — произвольный постоянный вектор, $s = 1, \dots, l < \infty$.*

**3.2.** Доказательство теоремы 4 проводится индукцией по $l$. В этом пункте мы докажем ее

[1)] Продолжение, ч. I см. в “Известия вузов. Математика”. – 1997. – № 9. – С. 21–34.

для $l=1$. Основная система в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} d\delta\tau_i = \delta\tau^k\wedge\Phi^i_k + \tau^k\wedge\delta\Phi^i_k, \\ \Delta^i\delta\Phi^i_j + \Delta^j\delta\Phi^j_i = 0, \\ d\delta\Phi^i_j = -\delta\Phi^i_k\wedge\Phi^k_j - \Phi^i_k\wedge\delta\Phi^k_j + \Delta^i\Delta^\sigma(\delta\omega^\sigma_i\wedge\omega^\sigma_j + \omega^\sigma_i\wedge\delta\omega^\sigma_j), \\ \delta\tau^i\wedge\omega^\sigma_i + \tau^i\wedge\delta\omega^\sigma_i = 0, \\ d\delta\omega^\sigma_i = \delta\Phi^k_i\wedge\omega^\sigma_k + \Phi^k_i\wedge\delta\omega^\sigma_k + \Delta^\tau(\delta\omega^\tau_i\wedge\varkappa^\sigma_\tau + \omega^\tau_i\wedge\delta\varkappa^\sigma_\tau), \\ \delta\varkappa^\tau_\sigma + \delta\varkappa^\sigma_\tau = 0, \\ d\delta\varkappa^\tau_\sigma = \Delta^i(\delta\omega^\tau_i\wedge\omega^\sigma_i + \omega^\tau_i\wedge\delta\omega^\sigma_i) + \Delta^\rho(\delta\varkappa^\rho_\sigma\wedge\varkappa^\tau_\rho + \varkappa^\rho_\sigma\wedge\delta\varkappa^\tau_\rho), \end{cases} \tag{26}$$

$i,j,k=1,\dots,n$; $\tau,\sigma,\rho=1,\dots,p$. Основную теорему для системы (26) мы докажем в следующей уточненной формулировке.

**Теорема 5.** *Если многообразие $X$ односвязно, то всякому решению $\{\delta\tau^i,\delta\Phi^i_j,\delta\omega^\sigma_i,\delta\varkappa^\tau_\sigma\}$ класса $\mathcal{E}^{r-2}(X,T^*(X))$ системы (26) соответствует б. м. деформация первого порядка погружения $z$, при которой $\delta\tau^i$, $\delta\Phi^i_j$, $\delta\omega^\sigma_i$, $\delta\varkappa^\tau_\sigma$ совпадают с вариациями форм локального корепера, связности, погружения и кручения соответственно. При этом вариация $\delta z$ погружения $z$ определяется по решению формулой*

$$\delta z = \int_{x_0}^{x}\Big\{\delta\tau^i e_i - \Big[\int_{x_0}^{x}\Big(\frac{1}{2}\Delta^j\delta\Phi^i_j[e_i,e_j] - \Delta^i\Delta^\sigma\delta\omega^\sigma_i[e_i,\nu_\sigma] + \\ + \frac{1}{2}\Delta^\tau\Delta^\sigma\delta\varkappa^\sigma_\tau[\nu_\tau,\nu_\sigma]\Big)\Big]dz\Big\} + \Omega z + \omega, \tag{27}$$

*где $x_0$ — произвольная точка на $X$, и каждый из интегралов берется по произвольному пути, соединяющему $x_0$ с точкой $x\in X$, $\Omega$ — произвольный постоянный бивектор из $\bigwedge^2\Pi$, $\omega$ — произвольный постоянный вектор из $\Pi$, $i,j=1,\dots,n$; $\tau,\sigma=1,\dots,p$.*

**Доказательство.** Обозначим выражение под знаком внутреннего интеграла через $p$. Пусть $U$ — произвольная окрестность точки $x_0$, содержащаяся в области определения локального корепера $\tau$. Для произвольной формы $\varphi\in\mathcal{E}^1_0(U,\wedge^{n-2}T^*(U))$ положим

$$I = \int_U p\wedge d\varphi. \tag{28}$$

Пользуясь формулами Гаусса и Вейнгартена (4), преобразуем интеграл $I$ следующим образом:

$$I = \int_U\Big\{\frac{1}{2}\Delta^j\delta\Phi^i_j\wedge d([e_i,e_j]\varphi) - \frac{1}{2}\Delta^j\delta\Phi^i_j\wedge[de_i,e_j]\wedge\varphi - \\ - \frac{1}{2}\Delta^j\delta\Phi^i_j\wedge[e_i,de_j]\wedge\varphi - \Delta^i\Delta^\sigma\delta\omega^\sigma_i\wedge d([e_i,\nu_\sigma]\varphi) + \\ + \Delta^i\Delta^\sigma\delta\omega^\sigma_i\wedge[de_i,\nu_\sigma]\wedge\varphi + \Delta^i\Delta^\sigma\delta\omega^\sigma_i\wedge[e_i,d\nu_\sigma]\wedge\varphi + \\ + \frac{1}{2}\Delta^\tau\Delta^\sigma\delta\varkappa^\tau_\sigma\wedge d([\nu_\tau,\nu_\sigma]\varphi) - \frac{1}{2}\Delta^\tau\Delta^\sigma\delta\varkappa^\tau_\sigma\wedge[d\nu_\tau,\nu_\sigma]\wedge\varphi - \\ - \frac{1}{2}\Delta^\tau\Delta^\sigma\delta\varkappa^\tau_\sigma\wedge[\nu_\tau,d\nu_\sigma]\wedge\varphi\Big\} = \\ = \int_U\Big\{\frac{1}{2}\Delta^j\Phi^i_j\wedge d([e_i,e_j]\varphi) - \frac{1}{2}\Delta^j\delta\Phi^i_j\wedge[\Phi^k_i e_k + \Delta^\sigma\omega^\sigma_i\nu_\sigma, e_j]\wedge\varphi -$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\Delta^j\delta\Phi^i_j\wedge[e_i,\Phi^k_je_k+\Delta^\sigma\omega^\sigma_j\nu_\sigma]\wedge\varphi-\Delta^i\Delta^\sigma\delta\omega^\sigma_i\wedge d([e_i,\nu_\sigma]\varphi)+\\
&+\Delta^i\Delta^\sigma\delta\omega^\sigma_i\wedge[\Phi^k_ie_k+\Delta^\tau\omega^\tau_i\nu_\tau,\nu_\sigma]\wedge\varphi+\\
&+\Delta^i\Delta^\sigma\delta\omega^\tau_i\wedge[e_i,-\Delta^k\omega^\sigma_ke_k+\Delta^\rho\varkappa^\rho_\sigma\nu_\rho]\wedge\varphi+\frac{1}{2}\Delta^\tau\Delta^\sigma\delta\varkappa^\tau_\sigma\wedge d([\nu_\tau,\nu_\sigma]\varphi)-\\
&-\frac{1}{2}\Delta^\tau\Delta^\sigma\delta\varkappa^\tau_\sigma\wedge[-\Delta^i\omega^\tau_ie_i+\Delta^\rho\varkappa^\rho_\tau\nu_\rho,\nu_\sigma]\wedge\varphi-\\
&-\frac{1}{2}\Delta^\tau\Delta^\sigma\delta\varkappa^\tau_\sigma\wedge[\nu_\tau,-\Delta^i\omega^\sigma_ie_i+\Delta^\rho\varkappa^\rho_\sigma\nu_\rho]\wedge\varphi\Big\}.
\end{aligned}
$$

Положим

$$
\begin{aligned}
I_1&=\int_U\Big\{\frac{1}{2}\Delta^k\delta\Phi^i_k\wedge d([e_i,e_k]\varphi)+(-\frac{1}{2}\Delta^k\delta\Phi^j_k\wedge\Phi^i_j-\\
&\quad-\frac{1}{2}\Delta^j\delta\Phi^i_j\wedge\Phi^k_j-\Delta^i\Delta^k\Delta^\sigma\delta\omega^\sigma_i\wedge\omega^\sigma_k)\wedge[e_i,e_k]\varphi\Big\},\\
I_2&=\int_U\Big\{-\Delta^i\Delta^\sigma\delta\omega^\sigma_i\wedge d([e_i,\nu_\sigma]\varphi)+(\frac{1}{2}\Delta^i\Delta^\sigma\delta\Phi^i_j\wedge\omega^\sigma_j-\\
&\quad-\frac{1}{2}\Delta^j\Delta^\sigma\delta\Phi^i_j\wedge\omega^\sigma_j+\Delta^k\Delta^\sigma\delta\omega^\sigma_k\wedge\Phi^i_k-\Delta^i\Delta^\sigma\Delta^\tau\delta\omega^\tau_i\wedge\varkappa^\sigma_\tau+\\
&\quad+\frac{1}{2}\Delta^i\Delta^\tau\Delta^\sigma\delta\varkappa^\tau_\sigma\wedge\omega^\tau_i-\frac{1}{2}\Delta^i\Delta^\tau\Delta^\sigma\delta\varkappa^\sigma_\tau\wedge\omega^\tau_i)\wedge[e_i,\nu_\sigma]\varphi\Big\},\\
I_3&=\int_U\Big\{\frac{1}{2}\Delta^\tau\Delta^\sigma\delta\varkappa^\tau_\sigma\wedge d([\nu_\tau,\nu_\sigma]\varphi)+(\Delta^i\Delta^\sigma\Delta^\tau\delta\omega^\sigma_i\wedge\omega^\tau_i-\\
&\quad-\frac{1}{2}\Delta^\tau\Delta^\sigma\Delta^\rho\delta\varkappa^\rho_\sigma\wedge\varkappa^\tau_\rho-\frac{1}{2}\Delta^\tau\Delta^\sigma\Delta^\rho\delta\varkappa^\tau_\rho\wedge\varkappa^\sigma_\rho)\wedge[\nu_\tau,\nu_\sigma]\varphi\Big\}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Тогда $I=I_1+I_2+I_3$. Покажем, что $I_1=0$. Пусть относительно системы координат $(O;a_\alpha)^m_{\alpha=1}$, задающей сигнатуру $\Delta$ пространства $\Pi$, бивектор $[e_i,e_k]$ имеет вид $[e_i,e_k]=E^{\alpha\beta}_{ik}[a_\alpha,a_\beta]$, $\alpha,\beta=1,\dots,m$; $i,k=1,\dots,n$. Для произвольной формы $\psi\in\mathcal{E}^1_0(U,\wedge^{n-2}T^*(U))$ положим в (29) $\varphi=E^{\alpha\beta}_{ik}\psi$, умножим результат на $[a_\alpha,a_\beta]$ и просуммируем по $\alpha,\beta=1,\dots,m$; получим

$$
I_1=\frac{1}{2}\int_U\Delta^i\delta\Phi^i_k\wedge d\psi+\frac{1}{2}\int_U[\Delta^i(\delta\Phi^i_j\wedge\Phi^j_k+\Phi^i_j\wedge\delta\Phi^j_k)-\Delta^\sigma(\delta\omega^\sigma_i\wedge\omega^\sigma_k+\omega^\sigma_i\wedge\delta\omega^\sigma_k]\wedge\psi.
$$

В силу третьего уравнения системы (26) и определения обобщенного внешнего дифференциала получаем $I_1=0$. Аналогично, с использованием пятого и седьмого уравнений системы (26) доказывается, что $I_2=I_3=0$.

Значит, $I=0$, и по определению внешнего дифференциала равенство (28) означает, что $dp=0$. По лемме 4 отсюда следует, что существует поле $-V\in C^{r-1}(X,\wedge^2\Pi)$ такое, что $p=-dV$, в частности, внутренний интеграл в (27) не зависит от пути, соединяющего $x_0$ с точкой $x$. Положим теперь $q=\delta\tau^ie_i+V\,dz$, $i=1,\dots,n$. В силу первого и четвертого уравнений системы (26) будем иметь $dq=0$. Следовательно, существует поле $u\in C^r(X,\Pi)$ такое, что $du=q$. В частности, внешний интеграл в (27) не зависит от пути, соединяющего $x_0$ с $x$.

Рассмотрим б. м. деформацию первого порядка погружения $z$ с вариацией $\delta z=u$. Для поля $\delta z$ справедливо равенство (27), из которого следует, что

$$
d\delta z=\delta\tau^ie_i+V\,dz,\quad i=1,\dots,n. \tag{30}
$$

Определим вариации полей $e_i$ и $\nu_\sigma$ формулами $\delta e_i=Ve_i$, $\delta\nu_\sigma=V\nu_\sigma$, $i=1,\dots,n$; $\sigma=1,\dots,p$. Пусть $\tilde{\delta}\tau^i$ — вариации форм локального корепера при построенной б. м. деформации. Так как

$V$ — поле вращений этой деформации, то по теореме 3 $d\delta z = \tilde{\delta}\tau^i e_i + V dz$. Отсюда и из (30) следует, что $\tilde{\delta}\tau^i = \delta\tau^i$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть теперь $\tilde{\delta}\Phi^i_j$, $\tilde{\delta}\omega^\sigma_i$, $\tilde{\delta}\varkappa^\tau_\sigma$ — соответственно вариации форм связности, погружения и кручения при построенной деформации. По лемме 6 имеем

$$dV = -\frac{1}{2}\Delta^j \tilde{\delta}\Phi^i_j [e_i, e_j] + \Delta^i \Delta^\sigma \tilde{\delta}\omega^\sigma_i [e_i, \nu_\sigma] - \frac{1}{2}\Delta^\tau \Delta^\sigma \tilde{\delta}\varkappa^\tau_\sigma [\nu_\tau, \nu_\sigma].$$

С другой стороны, по построению поля $V$

$$dV = -\frac{1}{2}\Delta^j \delta\Phi^i_j [e_i, e_j] + \Delta^i \Delta^\sigma \delta\omega^\sigma_i [e_i, \nu_\sigma] - \frac{1}{2}\Delta^\tau \Delta^\sigma \delta\varkappa^\tau_\sigma [\nu_\tau, \nu_\sigma]$$

и, значит, $\tilde{\delta}\Phi^i_j = \delta\Phi^i_j$, $\tilde{\delta}\omega^\sigma_i = \delta\omega^\sigma_i$, $\tilde{\delta}\varkappa^\tau_\sigma = \delta\varkappa^\tau_\sigma$. Таким образом, вариации форм локального корепера, связности, погружения и кручения совпадают с формами заданного решения.

Пусть $\tilde{z}$ — еще одна вариация погружения $z$ с заданными вариациями $\delta\tau^i$, $\delta\Phi^i_j$, $\delta\omega^\sigma_i$, $\delta\varkappa^\tau_\sigma$ форм локального корепера, связности, погружения и кручения, и пусть $\tilde{V}$ — соответствующее поле вращений. Для полей $V$ и $\tilde{V}$ справедлива лемма 6, и значит, $d\tilde{V} = dV$, т. е. $\tilde{V} = V + \Omega$, $\Omega = \mathrm{const}$. В силу (30) отсюда следует, что $d\tilde{\delta} z = \delta\tau^i e_i + (V + \Omega) dz$, т. е. $\tilde{\delta} z = \delta z + \Omega z + \omega$, $\omega = \mathrm{const}$. $\square$

**3.3. Доказательство теоремы 4.** Для $l = 1$ она доказана. Допустим, что она справедлива для $s = 1, \dots, l-1$. Пусть $\{\delta^s\tau^i, \delta^s\Phi^i_j, \delta^s\omega^\sigma_i, \delta^s\varkappa^\tau_\sigma\}_{s=1}^l$ — решение системы (25). Тогда $\{\delta^s\tau^i, \delta^s\Phi^i_j, \delta^s\omega^\sigma_i, \delta^s\varkappa^\tau_\sigma\}_{s=1}^{l-1}$ — решение этой системы при $s \le l-1$, и, значит, существует б. м. деформация $(l-1)$-го порядка погружения $z$ с вариациями $\delta^1 z, \dots, \delta^{l-1} z$, при которой формы $\delta^s\tau^i, \delta^s\Phi^i_j, \delta^s\omega^\sigma_i, \delta^s\varkappa^\tau_\sigma$, $s = 1, \dots, l-1$, совпадают с вариациями форм локального корепера, связности, погружения и кручения соответственно. Пусть $V^1, \dots, V^{l-1}$ — поля вращений этой б. м. деформации. Положим $P^l = \frac{1}{2}A^{ij}_l [e_i, e_j] + B^{i\sigma}_l [e_i, \nu_\sigma] + \frac{1}{2}C^{\tau\sigma}_l [\nu_\tau, \nu_\sigma]$, где коэффициенты $A^{ij}_l$, $B^{i\sigma}_l$, $C^{\tau\sigma}_l$ определены по решению формулами (19), $i, j = 1, \dots, n$, $\tau, \sigma = 1, \dots, p$. Покажем, что поле $P^l$ обладает обобщенным внешним дифференциалом $dP^l = 0$. Достаточно показать, что для всякой формы $\varphi \in \mathcal{E}^1_0(U, \wedge^2 T^*(U))$

$$\int_U P^l \wedge d(e_i\varphi) = 0, \; \int_U P^l \wedge d(\nu_\sigma\varphi) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \; \sigma = 1, \dots, p. \tag{31}$$

Поскольку $d^2 V^s = 0$ при $s \le l-1$, то первое из этих равенств эквивалентно следующему:

$$\int_U P^l \wedge d(e_i\varphi) + \sum_{\alpha=1}^{l-1} \int_U dV^\alpha \wedge d(\delta^{l-\alpha} e_i \varphi)) = 0.$$

Обозначив левую часть через $A$, используя теорему 2, запишем ее в виде

$$A = \int_U \left( P^l e_i + \sum_{\alpha=1}^{l-1} dV^\alpha \delta^{l-\alpha} e_i \right) \wedge d\varphi + \int_U \left( P^l \wedge de_i + \sum_{\alpha=1}^{l-1} dV^\alpha \wedge d\delta^{l-\alpha} e_i \right) \wedge \varphi. \tag{32}$$

Из определения поля $P^l$ находим

$$P^l e_i = \sum_{\alpha=1}^{l-1} \{ V^\alpha (\delta^{l-\alpha}\Phi^k_i e_k + \Delta^\sigma \delta^{l-\alpha}\omega^\sigma_i \nu_\sigma) - dV^\alpha \delta^{l-\alpha} e_i \} +$$
$$+ \delta^l \Phi^i_j e_j + \Delta^\sigma \delta^l \omega^\sigma_i \nu_\sigma, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \; \sigma = 1, \dots, p.$$

Поэтому (32) принимает вид

$$A=\int_U\left\{\sum_{\alpha=1}^{l-1}V^\alpha(\delta^{l-\alpha}\Phi_i^k e_k+\Delta^\tau\delta^{l-\alpha}\omega_i^\tau\nu_\tau)+\delta^l\Phi_i^j e_j+\Delta^\sigma\delta^l\omega_i^\sigma\nu_\sigma\right\}\wedge d\varphi+$$

$$+\int_U\left\{P^l\wedge(\Phi_i^k e_k+\Delta^\sigma\omega_i^\sigma\nu_\sigma)+\sum_{\alpha=1}^{l-1}dV^\alpha\wedge\sum_{\beta=1}^{l-\alpha}(\delta^\beta\Phi_i^k\delta^{l-\alpha-\beta}e_k+\right.$$

$$\left.+\ \delta^{l-\alpha-\beta}\Phi_i^k\delta^\beta e_k+\Delta^\sigma\delta^\beta\omega_i^\sigma\delta^{l-\alpha-\beta}\nu_\sigma+\Delta^\sigma\delta^{l-\alpha-\beta}\omega_i^\sigma\delta^\beta\nu_\sigma)\right\}\wedge d\varphi.$$

Перегруппировав слагаемые, воспользовавшись тождествами (23) и (24) для полей $V^\alpha$ при $\alpha\le l-1$, а также третьим и пятым уравнениями системы (25), приходим к равенству $A=0$. Аналогично, с использованием пятого и седьмого уравнений системы (25) доказывается второе из равенств (31).

Таким образом, $dP^l=0$, и в силу леммы 4 существует поле $V^l\in\ C^{r-1}(X,\wedge^2\Pi)$ такое, что $dV^l=\ P^l$. Поле $V^l$ определяется с точностью до произвольного слагаемого $\Omega^l$. Положим теперь

$$q^l=\sum_{\alpha=1}^{l}V^\alpha d\delta^{l-\alpha}z+\sum_{\alpha=1}^{l-1}V^\alpha\delta^{l-\alpha}\tau^i e_i+\delta^l\tau^i e_i,\quad i=1,\dots,n. \tag{33}$$

Для дифференциала $dq^l$ находим

$$\begin{aligned}dq^l=&\sum_{\alpha=1}^{l}dV^\alpha\delta^{l-\alpha}e_i\wedge\tau^i+2\sum_{\alpha=1}^{l-1}\sum_{\beta=1}^{l-\alpha}dV^\beta\delta^{l-\alpha-\beta}e_i\wedge\delta^\alpha\tau^i+\\&+\sum_{\alpha=1}^{l-1}(V^\alpha e_i\delta^{l-\alpha}\tau^k\wedge\Phi_k^i+V^\alpha e_i\tau^k\wedge\delta^{l-\alpha}\Phi_k^i)+\\&+2\sum_{\alpha=1}^{l-2}\delta^\alpha\tau^k\wedge\sum_{\beta=1}^{l-\alpha-1}\delta^\beta\Phi_k^i V^{l-\alpha-\beta}e_i-\\&-\sum_{\alpha=1}^{l-1}(V^\alpha e_i\delta^{l-\alpha}\tau^k\wedge\Phi_k^i+\Delta^\sigma\omega_i^\sigma\wedge\delta^{l-\alpha}\tau^i V^\alpha\nu_\sigma)+\\&+d\delta^l\tau^i e_i+\Phi_i^k\wedge\delta^l\tau^i e_k+\Delta^\sigma\omega_i^\sigma\wedge\delta^l\tau^i\nu_\sigma.\end{aligned}$$

Используя (22), приходим к равенству

$$\begin{aligned}dq^l=&\sum_{\alpha=1}^{l-1}\Delta^\sigma\delta^\alpha\omega_i^\sigma\wedge\tau^i V^{l-\alpha}\nu_\sigma+\delta^l\Phi_i^k\wedge\tau^i e_k+\Delta^\sigma\delta^l\omega_i^\sigma\wedge\tau^i\nu_\sigma+\\&+2\sum_{\alpha=1}^{l-1}\delta^\alpha\Phi_i^k\wedge\delta^{l-\alpha}\tau^i e_k+2\sum_{\alpha=1}^{l-1}\Delta^\sigma\delta^\alpha\omega_i^\sigma\wedge\delta^{l-\alpha}\tau^i\nu_\sigma+\\&+2\sum_{\alpha=1}^{l-2}V^\alpha\nu_\sigma\Delta^\sigma\sum_{\beta=1}^{l-\alpha-1}\delta^{l-\alpha-\beta}\omega_i^\sigma\wedge\delta^\beta\tau^i+\sum_{\alpha=1}^{l-1}V^\alpha\nu_\sigma\Delta^\sigma\omega_i^\sigma\wedge\delta^{l-\alpha}\tau^i+\\&+d\delta^l\tau^i e_i+\Phi_i^k\wedge\delta^l\tau^i e_k+\Delta^\sigma\omega_i^\sigma\wedge\delta^l\tau^i\nu_\sigma,\quad i,k=1,\dots,n,\quad\sigma=1,\dots,p.\end{aligned}$$

В силу первого и четвертого уравнений системы (25) отсюда следует, что $dq^l=0$. Значит, существует поле $u^l\in C^r(X,\Pi)$, для которого $du^l=q^l$. Поле $u^l$ определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого $\omega^l\in\Pi$.

Рассмотрим б. м. деформацию $l$-го порядка погружения $z$ с вариациями $\delta^1 z, \ldots, \delta^{l-1} z, \delta^l z = u^l$. Из (33) следует

$$d\delta^l z = \sum_{\alpha=1}^{l} V^\alpha d\delta^{l-\alpha} z + \sum_{\alpha=1}^{l-1} V^\alpha \delta^{l-\alpha}\tau^i e_i + \delta^l \tau^i e_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{34}$$

Определим вариации $\delta^l e_i$, $\delta^l \nu_\sigma$ равенствами

$$\delta^l e_i = \sum_{\alpha=1}^{l} V^\alpha \delta^{l-\alpha} e_i, \quad \delta^l \nu_\sigma = \sum_{\alpha=1}^{l} V^\alpha \delta^{l-\alpha} \nu_\sigma, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \sigma = 1, \ldots, p.$$

Пусть $\tilde{\delta}^l \tau^i$ — вариации форм локального корепера при построенной деформации. По теореме 3 имеем

$$d\delta^l z = \sum_{\alpha=1}^{l} V^\alpha d\delta^{l-\alpha} z + \sum_{\alpha=1}^{l-1} V^\alpha \delta^{l-\alpha}\tau^i e_i + \tilde{\delta}^l \tau^i e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Отсюда и из (34) $\tilde{\delta}^l \tau^i = \delta^l \tau^i$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\tilde{\delta}^l \Phi^i_j$, $\tilde{\delta}^l \omega^\sigma_i$, $\tilde{\delta}^l \varkappa^\tau_\sigma$ $l$-е вариации форм связности, погружения и кручения. Записав дифференциал $dV^l$ в соответствии с леммой 6 и воспользовавшись тем, что $dV^l = P^l$, заключаем $\tilde{\delta}^l \Phi^i_j = \delta^l \Phi^i_j$, $\tilde{\delta}^l \omega^\sigma_i = \delta \omega^\sigma_i$, $\tilde{\delta}^l \varkappa^\tau_\sigma = \delta^l \varkappa^\tau_\sigma$, $i, j = 1, \ldots, n$; $\tau, \sigma = 1, \ldots, p$.

Если теперь имеется еще одна б. м. деформация $l$-го порядка погружения $z$ с вариациями $\delta^1 z, \ldots, \delta^{l-1} z$, $\tilde{\delta}^l z$, задающая те же вариации форм локального корепера, связности, погружения и кручения, что и построенная, и имеющая поля вращений $V^1, \ldots, V^{l-1}, \tilde{V}^l$, то по лемме 6 заключаем, что $d\tilde{V}^l = dV^l$. Значит, $\tilde{V}^l = V^l + \Omega^l$, $\Omega^l = \mathrm{const}$. По теореме 3 имеем $d\tilde{\delta}^l dz = \Omega^l dz + d\delta^l z$. Отсюда следует, что $\tilde{\delta}^l z = \delta^l z + \Omega^l z + \omega^l$, $\omega^l = \mathrm{const}$. $\square$

**3.4.** Б. м. деформация $l$-го порядка, $l = 1, \ldots, \infty$, погружения $z : X \to \Pi$ называется б. м. изгибанием $l$-го порядка (аналитическим изгибанием, если $l = \infty$), если при этой деформации $\delta^1 I(z) = \cdots = \delta^l I(z) = 0$. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия на вариации форм локального корепера и связности, при которых соответствующая б. м. деформация является б. м. изгибанием.

**Теорема 6.** *Для того чтобы б. м. деформация $l$-го порядка, $l = 1, \ldots, \infty$, $C^r$-погружения $z : X \to \Pi$, $r \geq 2$, была б. м. изгибанием $l$-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы вариации форм локального корепера и связности имели вид*

$$\delta^s \tau^i = \overset{(s)}{H}{}^i_j \tau^j, \quad \delta^s \Phi^i_j = \overset{(s)}{G}{}^i_{jk} \tau^k, \quad s = 1, \ldots, l, \tag{35}$$

*где*

$$\overset{(s)}{H}{}^i_j = \Delta^{ik} v^s_{kj} - \sum_{\alpha=1}^{s-1} \Delta_{\lambda\mu} \Delta^{ik} \overset{(\alpha)}{H}{}^\lambda_k \overset{(s-\alpha)}{H}{}^\mu_j, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \overset{(s)}{G}{}^i_{jk} = \frac{1}{2}\Big[ & \overset{(s)}{H}{}^i_{k,j} - \overset{(s)}{H}{}^i_{j,k} + \Delta^{i\lambda}\Delta_{j\mu}\Big(\overset{(s)}{H}{}^\mu_{\lambda,k} - \overset{(s)}{H}{}^\mu_{k,\lambda}\Big) + \Delta^{i\lambda}\Delta_{k\mu}\Big(\overset{(s)}{H}{}^\mu_{\lambda,j} - \overset{(s)}{H}{}^\mu_{j,\lambda}\Big)\Big] + \\ & + \sum_{\alpha=1}^{s-1}\Big[\overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_k \overset{(s-\alpha)}{G}{}^i_{\nu j} - \overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_j \overset{(s-\alpha)}{G}{}^i_{\nu k} + \Delta^{i\lambda}\Delta_{j\mu}\Big(\overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_\lambda \overset{(s-\alpha)}{G}{}^\mu_{\nu k} - \overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_k \overset{(s-\alpha)}{G}{}^\mu_{\nu\lambda}\Big) + \\ & + \Delta^{i\lambda}\Delta_{k\mu}\Big(\overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_\lambda \overset{(s-\alpha)}{G}{}^\mu_{\nu j} - \overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_j \overset{(s-\alpha)}{G}{}^\mu_{\nu\lambda}\Big)\Big], \end{aligned} \tag{37}$$

$\Delta^{i\lambda} = \Delta_{i\lambda}$, $(v^s_{kj})^n_{k,j=1} \in \mathcal{E}^{r-1}(X, \wedge^2 T^*(X))$, $i, j, k, \lambda, \mu, \nu = 1, \ldots, n$.

**Доказательство.** Допустим, что $\delta^s I(z)=0$, $s=1,\dots,l$. Раскладывая вариации $\delta^s\tau^i$, $\delta^s\Phi^i_j$ по формам корепера $\tau$, приходим к равенствам (35). Остается показать, что коэффициенты $\overset{(s)}{H}{}^i_j$ и $\overset{(s)}{G}{}^i_{jk}$ имеют вид (36) и (37) соответственно. Варьируя равенство (1), используя (35), приходим к следующей системе уравнений относительно $\overset{(s)}{H}{}^i_j$:

$$\Delta_{kj}\overset{(1)}{H}{}^k_i+\Delta_{ki}\overset{(1)}{H}{}^k_j=0,$$
$$\Delta_{kj}\overset{(s)}{H}{}^k_i+\Delta_{ki}\overset{(s)}{H}{}^k_j+2\sum_{\alpha=1}^{s-1}\Delta_{\lambda\mu}\overset{(\alpha)}{H}{}^\lambda_i\overset{(s-\alpha)}{H}{}^\mu_j=0,\quad s\geq 2.$$

Общее решение этой системы имеет вид (36).

Варьируя $s$ раз первое из равенств леммы 2, дифференцируя внешне первое из равенств (35), приравнивая результаты, находим

$$\tau^j\wedge\Big(\overset{(s)}{H}{}^k_j\Phi^i_k+\delta^s\Phi^i_j+2\sum_{\alpha=1}^{s-1}\overset{(\alpha)}{H}{}^k_j\delta^{s-\alpha}\Phi^i_k+d\overset{(s)}{H}{}^i_j-\overset{(s)}{H}{}^i_k\Phi^k_j\Big)=0.$$

Применяя лемму Картана, получаем

$$\delta^s\Phi^i_j=-d\overset{(s)}{H}{}^i_j+\overset{(s)}{H}{}^i_k\Phi^k_j-\overset{(s)}{H}{}^k_j\Phi^i_k-2\sum_{\alpha=1}^{s-1}\overset{(\alpha)}{H}{}^k_j\delta^{s-\alpha}\Phi^i_k+\overset{(s)}{C}{}^i_{j\lambda}\tau^\lambda,$$

где $\overset{(s)}{C}{}^i_{j\lambda}=\overset{(s)}{C}{}^i_{\lambda j}$, $i,j,k,\lambda=1,\dots,n$; $s=1,\dots,l$. Учитывая (35), воспользовавшись определением ковариантной производной, можем записать

$$\overset{(s)}{G}{}^i_{jk}=-\overset{(s)}{H}{}^i_{j,k}-2\sum_{\alpha=1}^{s-1}\overset{(\alpha)}{H}{}^\lambda_j\overset{(s-\alpha)}{G}{}^i_{\lambda k}+\overset{(s)}{C}{}^i_{jk}.\tag{38}$$

Варьируя второе из равенств леммы 2, для коэффициентов $\overset{(s)}{G}{}^i_{jk}$ получаем $\Delta_{i\lambda}\overset{(s)}{G}{}^\lambda_{jk}+\Delta_{j\lambda}\overset{(s)}{G}{}^\lambda_{ik}=0$. Подставляя сюда (38), будем иметь

$$\Delta_{i\mu}\overset{(s)}{G}{}^\mu_{jk}+\Delta_{j\mu}\overset{(s)}{G}{}^\mu_{ik}=\Delta_{i\mu}\overset{(s)}{H}{}^\mu_{j,k}+\Delta_{j\mu}\overset{(s)}{H}{}^\mu_{i,k}+2\sum_{\alpha=1}^{s-1}\Big(\Delta_{i\mu}\overset{(\alpha)}{H}{}^\lambda_j\overset{(s-\alpha)}{G}{}^\mu_{\lambda k}+\Delta_{j\mu}\overset{(\alpha)}{H}{}^\lambda_i\overset{(s-\alpha)}{G}{}^\mu_{\lambda k}\Big),\tag{39}$$

$i,j,k,\lambda,\mu=1,\dots,n$. Совершая здесь дважды циклическую перестановку индексов $i$, $j$, $k$, складывая полученные равенства и вычитая из результата (39), находим

$$\begin{aligned}\overset{(s)}{C}{}^i_{jk}=\frac{1}{2}\Big[&\overset{(s)}{H}{}^i_{j,k}+\overset{(s)}{H}{}^i_{k,j}+\Delta^{i\lambda}\Delta_{j\mu}\Big(\overset{(s)}{H}{}^\mu_{\lambda,k}-\overset{(s)}{H}{}^\mu_{k,\lambda}\Big)+\\&+\Delta^{i\lambda}\Delta_{k\mu}\Big(\overset{(s)}{H}{}^\mu_{\lambda,j}-\overset{(s)}{H}{}^\mu_{j,\lambda}\Big)\Big]+\sum_{\alpha=1}^{s-1}\Big[\overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_j\overset{(s-\alpha)}{G}{}^i_{\nu k}+\overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_k\overset{(s-\alpha)}{G}{}^i_{\nu j}+\\&+\Delta^{i\lambda}\Delta_{j\mu}\Big(\overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_\lambda\overset{(s-\alpha)}{G}{}^\mu_{\nu k}-\overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_k\overset{(s-\alpha)}{G}{}^\mu_{\nu\lambda}\Big)++\Delta^{i\lambda}\Delta_{k\mu}\Big(\overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_\lambda\overset{(s-\alpha)}{G}{}^\mu_{\nu j}-\overset{(\alpha)}{H}{}^\nu_j\overset{(s-\alpha)}{G}{}^\mu_{\nu\lambda}\Big)\Big],\end{aligned}$$

$i,j,k,\lambda,\mu,\nu=1,\dots,n$; $s=1,\dots,l$. Подставляя в (38), получаем (37). Обратное утверждение теоремы доказывается простой проверкой. □

## 4. Типовое число и основная система уравнений

**4.1.** Зафиксируем точку $x \in X$ и рассмотрим вторую основную форму $II^\sigma = \omega_i^\sigma \otimes \tau^i = de_i\nu_\sigma \otimes \tau^i \in S^2T_x^*(X)$, $\sigma = 1, \dots, p$; $i = 1, \dots, n$, поверхности $F$ в точке $x$. Поскольку всякое линейное преобразование базиса $(\nu_\sigma(x))_{\sigma=1}^p$ в $T_x^\perp F$ влечет точно такое же преобразование форм $(II^\sigma(x))_{\sigma=1}^p$, то в случае, когда среди форм $II^1, \dots, II^p$ имеется ровно $q$ линейно независимых, $q \le p$, базис $(\nu_\sigma(x))_{\sigma=1}^p$ можно выбрать так, чтобы $II^{q+1} = \dots = II^p = 0$. В дальнейшем базис $(\nu_\sigma(x))_{\sigma=1}^p$ предполагается выбранным таким образом. Относительно этого базиса имеем $\omega_i^{q+1} = \dots = \omega_i^p = 0$, $i = 1, \dots, n$. При этом $q$-мерное пространство $N_x$ в $T_x^\perp F$, порожденное нормалями $\nu_1, \dots, \nu_q$, называется главным нормальным пространством [3].

Для каждого $\chi = 1, \dots, q$ система 1-форм $(\omega_i^\chi)_{i=1}^n$ определяет линейное преобразование $\omega^\chi : T_x(X) \to T_x(X)$ по формуле $\omega^\chi(u) = \Delta^{ij}\langle\omega_i^\chi, u\rangle\xi_j$, где $\langle *, * \rangle$ — спаривание, $u \in T_x(X)$, $i, j = 1, \dots, n$. Типовым числом погружения $z$ в точке $x \in X$ называется максимальное из таких целых чисел $t$, что в $T_x(X)$ имеется $t$ векторов $u_1, \dots, u_t$, для которых $qt$ векторов $\omega^\chi(u_\lambda)$, $\lambda = 1, \dots, t$, $\chi = 1, \dots, q$, линейно независимы ([2], прим. 17, с. 317). Типовым числом погружения $z : X \to \Pi$ будем называть число $t(z) = \min\limits_{x \in X} t(x)$, где $t(x)$ — типовое число в точке $x$.

**Теорема 7.** *Если у $C^3$-погружения $z : X \to \Pi$ размерность главного нормального пространства $q(x) = \mathrm{const}$, и типовое число $t(z) \ge 3$, то всякое решение $\{\delta^s\Phi_j^i, \delta^s\omega_i^\sigma, \delta^s\varkappa_\sigma^\tau\}_{s=1}^l$, $i, j = 1, \dots, n$, $\tau, \sigma = 1, \dots, p$, системы уравнений $(25_3)$, $(25_5)$ является решением уравнения $(25_7)$.*

Доказательство опирается на следующие леммы [1].

**Лемма 7.** *Если $q(x) = \mathrm{const}$ на $X$, и $t(z) \ge 2$, то поверхность $z(X)$ содержится в некотором $(n+q)$-мерном плоском подпространстве пространства $\Pi$.*

**Лемма 8.** *Если $\{\psi_1^\sigma, \dots, \psi_h^\sigma\}_{\sigma=1}^p$ — система из $hp$ линейно независимых 1-форм, $\{\varphi^\sigma\}_{\sigma=1}^p$ — система из $p$ $k$-форм, $k < h$, то из равенства $\sum\limits_{\sigma=1}^p \varphi^\sigma \wedge \psi_i^\sigma = 0$, $i = 1, \dots, h$, следует, что все $\varphi^\sigma = 0$.*

Доказательство леммы 7 в римановой ситуации приведено в статье [1]. Распространение его на псевдориманов случай не представляет особого труда. Лемма 8 доказана в [1] полностью.

**Доказательство теоремы 7.** В силу леммы 7 без нарушения общности можем считать, что $q(x) = p$. Допустим сначала, что $l = 1$. Дифференцируя внешне уравнения $(26)_5$, используя (6), приходим к равенству

$$\Delta^\tau\omega_i^\tau \wedge [d\delta\varkappa_\tau^\sigma - \Delta^k(\delta\omega_k^\tau \wedge \omega_k^\sigma + \omega_k^\tau \wedge \delta\omega_k^\sigma) - \Delta^\rho(\delta\varkappa_\tau^\rho \wedge \varkappa_\rho^\sigma + \varkappa_\tau^\rho \wedge \delta\varkappa_\rho^\sigma)] = 0,$$

$i, k = 1, \dots, n$; $\tau, \sigma, \rho = 1, \dots, p$. Так как $t(z) \ge 3$, то существует по крайней мере $3p$ линейно независимых 1-форм $\omega_i^\tau$. По лемме 8 отсюда следует равенство $(26_7)$. При $l = 1$ теорема доказана.

Пусть $l > 1$. По индукции допустим, что теорема доказана для всех $s \le l - 1$, и докажем ее для порядка $s = l$. Дифференцируя внешне уравнение $(25_5)$, используя (6), $(25_3)$ и $(25_5)$, приходим к равенству

$$\Delta^\tau\omega_i^\tau \wedge [-\delta^l\omega_k^\tau \wedge \omega_k^\sigma - \omega_k^\tau \wedge \delta^l\omega_k^\sigma + \Delta^\rho(\delta^l\varkappa_\tau^\rho \wedge \varkappa_\rho^\sigma + \varkappa_\tau^\rho \wedge \delta^l\varkappa_\rho^\sigma) - d\delta^l\varkappa_\tau^\sigma] + 2A, \tag{40}$$

где обозначено

$$A = \sum_{\alpha=1}^{l-1}(d\delta^\alpha\Phi_i^k \wedge \delta^{l-\alpha}\omega_k^\sigma - \delta^\alpha\Phi_i^k \wedge d\delta^{l-\alpha}\omega_k^\sigma + \Delta^\tau d\delta^\alpha\omega_i^\tau \wedge \delta^{l-\alpha}\varkappa_\tau^\sigma -$$
$$- \Delta^\tau\delta^\alpha\omega_i^\tau \wedge d\delta^{l-\alpha}\varkappa_\tau^\sigma + \Delta^\tau\delta^\alpha\Phi_i^k \wedge \delta^{l-\alpha}\omega_k^\tau \wedge \varkappa_\tau^\sigma +$$

$$+ \Delta^\tau \Delta^\rho \delta^\alpha \omega_i^\rho \wedge \delta^{l-\alpha} \varkappa_\rho^\tau \wedge \varkappa_\tau^\sigma - \Phi_i^k \wedge \delta^\alpha \Phi_k^j \wedge \delta^{l-\alpha} \omega_j^\sigma -$$
$$- \Delta^\tau \Phi_i^k \wedge \delta^\alpha \omega_k^\tau \wedge \delta^{l-\alpha} \varkappa_\tau^\sigma - \delta^\alpha \Phi_j^k \wedge \delta^{l-\alpha} \Phi_i^j \wedge \omega_k^\sigma + + \Delta^k \Delta^\tau \delta^\alpha \omega_k^\tau \wedge \delta^{l-\alpha} \omega_i^\tau \wedge \omega_k^\sigma),$$

$i, j, k = 1, \ldots, n$; $\tau, \sigma, \rho = 1, \ldots, p$. С использованием $(25_3)$, $(25_5)$, $(25_7)$ при $s < l$ сумма $A$ приводится к виду

$$A = \sum_{\alpha=1}^{l-1} (\Delta^k \Delta^\tau \delta^\alpha \omega_k^\tau \wedge \omega_i^\tau \wedge \delta^{l-\alpha} \omega_k^\sigma + \Delta^\tau \Delta^\rho \omega_i^\rho \wedge \delta^\alpha \varkappa_\rho^\tau \wedge \delta^{l-\alpha} \varkappa_\tau^\sigma),$$

$i, k = 1, \ldots, n$; $\tau, \sigma, \rho = 1, \ldots, p$. Подставляя это выражение $A$ в (40), приходим к равенству

$$\Delta^\tau \omega_i^\tau \wedge [-\delta^l \omega_k^\tau \wedge \omega_k^\sigma - \omega_k^\tau \wedge \delta^l \omega_k^\sigma + \Delta^\rho (\delta^l \varkappa_\tau^\rho \wedge \varkappa_\rho^\sigma + \varkappa_\tau^\rho \wedge \delta^l \varkappa_\rho^\sigma) -$$
$$- d\delta^l \varkappa_\tau^\sigma + 2 \sum_{\alpha=1}^{l-1} (\Delta^k \delta^\alpha \omega_k^\tau \wedge \delta^{l-\alpha} \omega_k^\sigma + \Delta^\rho \delta^\alpha \varkappa_\tau^\rho \wedge \delta^{l-\alpha} \varkappa_\rho^\sigma)] = 0,$$

$i, k = 1, \ldots, n$; $\tau, \sigma, \rho = 1, \ldots, p$. Применением леммы 8 отсюда выводится равенство $(25_7)$ при $s = l$. □

**4.2.** Докажем, что при $t(z) \geq 4$ уравнения $(25_5)$ и $(25_7)$ являются следствиями системы $(25_2)$, $(25_3)$.

**Теорема 8.** *Если у $C^3$-погружения $z : X \to \Pi$ размерность главного нормального пространства $q(x) = \mathrm{const}$ на $X$, и $t(z) \geq 4$, то для всякого решения $\{\delta^s \Phi_j^i, \delta^s \omega_i^\sigma\}_{s=1}^l$ системы уравнений $(25_2)$, $(25_3)$ существует решение $\{\delta^s \Phi_j^i, \delta^s \omega_i^\sigma, \delta^s \varkappa_\sigma^\tau\}_{s=1}^l$, $i, j = 1, \ldots, n$; $\tau, \sigma = 1, \ldots, p$, системы уравнений $(25_2)$, $(25_3)$, $(25_5)$, $(25_7)$ с той же парой первых элементов $\delta^s \Phi_j^i, \delta^s \omega_i^\sigma$.*

Для доказательства этой теоремы необходима

**Лемма 9.** *Пусть у погружения $z : X \to \Pi$ в точке $x \in X$ размерность главного нормального пространства $q(x) = p$, и типовое число $t(z) \geq 4$. Тогда для всякой системы форм $\Omega_i^\sigma \in \wedge^2 T_x^*(X)$, удовлетворяющей условию*

$$\Delta^\sigma (\omega_i^\sigma \wedge \Omega_j^\sigma - \omega_j^\sigma \wedge \Omega_i^\sigma) = 0, \quad \sigma = 1, \ldots, p; \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{41}$$

*существует система форм $\lambda_\tau^\sigma \in T_x^*(X)$, $\tau, \sigma = 1, \ldots, p$, такая, что*

$$\Omega_i^\sigma = \Delta^\tau \lambda_\tau^\sigma \wedge \omega_i^\tau, \quad \lambda_\tau^\sigma = -\lambda_\sigma^\tau. \tag{42}$$

**Доказательство.** Поскольку $t(z) \geq 4$, то в точке $x$ среди форм $\omega_i^\sigma$, $i = 1, \ldots, n$; $\sigma = 1, \ldots, p$, существует по крайней мере $4p$ линейно независимых. Пусть это будут $(\omega_1^\sigma, \omega_2^\sigma, \omega_3^\sigma, \omega_4^\sigma)_{\sigma=1}^p$. Полагая в (41) $i = 1$, $j = 2$, умножая внешне на $(2p-1)$-форму $\omega_1^1 \wedge \cdots \wedge \omega_1^p \wedge \omega_2^1 \wedge \cdots \wedge \omega_2^{\sigma-1} \wedge \omega_2^{\sigma+1} \wedge \cdots \wedge \omega_2^p$, получим $\Delta^\sigma \Omega_1^\sigma \wedge \omega_1^1 \wedge \cdots \wedge \omega_1^p \wedge \omega_2^1 \wedge \cdots \wedge \omega_2^p = 0$, $\sigma = 1, \ldots, p$. Аналогично можем записать еще два равенства: $\Delta^\sigma \Omega_1^\sigma \wedge \omega_1^1 \wedge \cdots \wedge \omega_1^p \wedge \omega_3^1 \wedge \cdots \wedge \omega_3^p = 0$, $\Delta^\sigma \Omega_1^\sigma \wedge \omega_1^1 \wedge \cdots \wedge \omega_1^p \wedge \omega_4^1 \wedge \cdots \wedge \omega_4^p = 0$. Из этих трех равенств следует, что если формы $\omega_1^\sigma$, $\omega_2^\sigma$, $\omega_3^\sigma$, $\omega_4^\sigma$, $\sigma = 1, \ldots, p$, дополнить до базиса в $T_x^*(\mathrm{X})$, то в разложении $\Omega_1^\sigma$ по этому базису каждый член содержит множителем $\omega_1^\sigma$, т. е. это разложение имеет вид $\Omega_1^\sigma = k_{\tau 1}^\sigma \wedge \omega_1^\tau$, $k_{\tau 1}^\sigma \in T_x^*(X)$, $\tau, \sigma = 1, \ldots, p$. Проведя аналогичные рассуждения с формами $\Omega_2^\sigma$, $\Omega_3^\sigma$, $\Omega_4^\sigma$, получим

$$\Omega_h^\sigma = k_{\tau h}^\sigma \wedge \omega_h^\tau, \quad \sigma, \tau = 1, \ldots, p, \quad h = 1, \ldots, 4, \tag{43}$$

где $k_{\tau h}^\sigma \in T_x^*(X)$, суммирования по $h$ нет. Подставляя (43) в (41), получаем следующее условие на формы $k_{\tau h}^\sigma$:

$$(\Delta^\sigma k_{\tau h}^\sigma + \Delta^\tau k_{\sigma g}^\tau) \wedge \omega_h^\sigma \wedge \omega_g^\tau = 0, \quad \sigma, \tau = 1, \ldots, p, \quad g, h = 1, \ldots, 4, \tag{44}$$

суммирования по $h, g$ нет. Следовательно, форма $\Delta^\sigma k_{\tau h}^\sigma + \Delta^\tau k_{\sigma g}^\tau$ имеет вид

$$\Delta^\sigma k_{\tau h}^\sigma + \Delta^\tau k_{\sigma g}^\tau = a_{\rho h g}^\sigma \omega_h^\rho + b_{\rho h g}^\tau \omega_g^\rho, \quad \tau, \sigma, \rho = 1, \ldots, p, \quad h, g = 1, \ldots, 4. \tag{45}$$

Заметим, что при одновременной перестановке индексов $h$, $g$ и $\sigma$, $\tau$ левая часть (45) не меняется. Совершая дважды такую перестановку, пользуясь линейной независимостью форм $\omega^\rho_h$ и $\omega^\rho_g$ при $h \neq g$, находим $b^\sigma_{\rho gh} = a^\sigma_{\rho hg}$. Следовательно, (45) можем записать в виде

$$\Delta^\sigma k^\sigma_{\tau h} + \Delta^\tau k^\tau_{\sigma g} = a^\sigma_{\rho hg}\omega^\rho_h + a^\tau_{\rho gh}\omega^\rho_g, \quad \tau,\sigma,\rho = 1,\ldots,p, \quad h,g = 1,\ldots,4. \tag{46}$$

Заменив здесь индекс $h$ на индекс $f \neq g,h$; $f \in \{1,2,3,4\}$, вычитая полученные результаты, будем иметь

$$\Delta^\sigma(k^\sigma_{\tau h} - k^\sigma_{\tau f}) = a^\sigma_{\rho hg}\omega^\rho_h - a^\sigma_{\rho fg}\omega^\rho_f + (a^\tau_{\rho gh} - a^\tau_{\rho gf})\omega^\rho_g.$$

Заменив здесь индекс $g$ на индекс $r \neq h,g,f$; $r \in \{1,2,3,4\}$, и вычитая результаты, получим

$$\begin{aligned}(a^\sigma_{\rho hg} - a^\sigma_{\rho hr})\omega^\rho_h - (a^\sigma_{\rho fg} - a^\sigma_{\rho fr})\omega^\rho_f + (a^\tau_{\rho gh} - a^\tau_{\rho gf})\omega^\rho_g -& \\ - (a^\tau_{\rho rh} - a^\tau_{\rho rf})\omega^\rho_r = 0, \quad \sigma,\tau,\rho = 1,\ldots,p, \quad f,g,h,r = 1,\ldots,4.&\end{aligned}$$

В силу линейной независимости форм $\omega^\rho_h, \omega^\rho_g, \omega^\rho_f, \omega^\rho_r$ при отсутствии совпадающих $h$, $g$, $f$, $r$ отсюда следует, что $a^\sigma_{\rho hg} = a^\sigma_{\rho hr}$, и значит, можем положить $a^\sigma_{\rho hg} = a^\sigma_{\rho h}$. Положим

$$\lambda^\sigma_{\tau h} = \Delta^\tau k^\sigma_{\tau h} - \Delta^\sigma\Delta^\tau a^\tau_{\rho g}\omega^\rho_g, \quad \sigma,\tau,\rho = 1,\ldots,p, \quad h,g = 1,\ldots,4, \tag{47}$$

суммирования по $g$ нет. Из (46) следует, что $\lambda^\sigma_{\tau h} + \lambda^\tau_{\sigma g} = 0$. Заменяя здесь индекс $h$ на индекс $f \neq g,h$; $f \in \{1,2,3,4\}$ и вычитая результаты, находим $\lambda^\sigma_{\tau h} - \lambda^\sigma_{\tau f} = 0$. Следовательно, $\lambda^\sigma_{\tau 1} = \cdots = \lambda^\sigma_{\tau 4}$, и мы можем положить $\lambda^\sigma_{\tau h} = \lambda^\sigma_\tau$, $\sigma,\tau = 1,\ldots,p$. При этом выполнится второе из равенств (42).

Если теперь в (47) заменить индекс $g$ на индекс $f \neq g$; $f \in \{1,2,3,4\}$, вычесть результат из (47) и воспользоваться линейной независимостью форм $\omega^\rho_g$ и $\omega^\rho_f$ при $f \neq g$, получим $a^\tau_{\rho g} = 0$. Подставляя $k^\sigma_{\tau h} = \Delta^\tau\lambda^\sigma_\tau$ в (43), находим $\Omega^\sigma_h = \Delta^\tau\lambda^\sigma_\tau \wedge \omega^\tau_h$, $\sigma,\tau = 1,\ldots,p$, $h = 1,\ldots,4$. Если в (41) положить $i = 1,\ldots,n$, а $j \in \{1,2,3\}$, то будем иметь

$$\Delta^\sigma\omega^\sigma_j \wedge (\Omega^\sigma_i + \Delta^\tau\omega^\tau_i \wedge \lambda^\sigma_\tau) = 0, \quad \sigma,\tau = 1,\ldots,p.$$

По лемме 8 отсюда вытекает первое из равенств (42). □

**Доказательство теоремы 8.** В силу теоремы 7, достаточно показать, что для всякого решения $\{\delta^s\Phi^i_j, \delta^s\omega^\sigma_i\}^l_{s=1}$ системы $(25_2)$, $(25_3)$ найдется решение $\{\delta^s\Phi^i_j, \delta^s\omega^\sigma_i, \delta^s\varkappa^\tau_\sigma\}^l_{s=1}$ уравнения $(25_5)$. Рассмотрим сначала случай $l = 1$. Дифференцируя внешне равенство $(25_3)$, будем иметь

$$\begin{gathered}-d\delta\Phi^i_k \wedge \Phi^k_j + \delta\Phi^i_k \wedge d\Phi^k_j - d\Phi^i_k \wedge \delta\Phi^k_j + \Phi^i_k \wedge d\delta\Phi^k_j + \\ +\Delta^j\Delta^\sigma d\delta\omega^\sigma_i \wedge \omega^\sigma_j - \Delta^i\Delta^\sigma\delta\omega^\sigma_i \wedge d\omega^\sigma_j + \Delta^i\Delta^\sigma d\omega^\sigma_i \wedge \delta\omega^\sigma_j - \\ -\Delta^i\Delta^\sigma\omega^\sigma_i \wedge d\delta\omega^\sigma_j = 0, \quad i,j,k = 1,\ldots,n, \quad \sigma = 1,\ldots,p.\end{gathered}$$

Используя (6), $(25_2)$ и $(25_3)$, приходим к равенству (41), в котором

$$\Omega^\sigma_i = \delta\Phi^k_i \wedge \omega^\sigma_k + \Phi^k_i \wedge \delta\omega^\sigma_k + \Delta^\tau\delta\omega^\tau_i \wedge \varkappa^\sigma_\tau - d\delta\omega^\sigma_i, \tag{48}$$

$i,k = 1,\ldots,n$; $\sigma,\tau = 1,\ldots,p$. Пусть $\lambda^\sigma_\tau$ — 1-формы, определяемые леммой 9. Обозначив $\delta\varkappa^\sigma_\tau = -\lambda^\sigma_\tau$, из (42) и (48) получаем (26), что доказывает теорему 8 при $l = 1$.

При $l > 1$ доказательство теоремы 8 проведем по индукции. Допустим, что она доказана для всех порядков $s \leq l-1$, и докажем ее для $s = l$. Дифференцируя внешне $(25_3)$ при $s = l$, используя (6), $(25_3)$ и $(25_2)$, приходим к равенству

$$\begin{aligned}\Delta^i\Delta^\sigma\omega^\sigma_i \wedge (\Phi^k_j \wedge \delta^l\omega^\sigma_k + \delta^l\Phi^k_j \wedge \omega^\sigma_k + \Delta^\tau\delta^l\omega^\tau_j \wedge \varkappa^\sigma_\tau - d\delta^l\omega^\sigma_j) -& \\ - \Delta^i\Delta^\sigma\omega^\sigma_j \wedge (\delta^l\Phi^k_i \wedge \omega^\sigma_k + \Phi^k_i \wedge \delta^l\omega^\sigma_k + \Delta^\tau\delta^l\omega^\tau_i \wedge \varkappa^\sigma_\tau - d\delta^l\omega^\sigma_i) + 2B = 0,&\end{aligned} \tag{49}$$

где обозначено

$$B = \sum_{\alpha=1}^{l-1} (\delta^\alpha \Phi^i_\lambda \wedge \delta^{l-\alpha} \Phi^\lambda_k \wedge \Phi^k_j - \Delta^i \Delta^\sigma \delta^\alpha \omega^\sigma_i \wedge \delta^{l-\alpha} \omega^\sigma_k \wedge \Phi^k_j -$$
$$- \Phi^i_k \wedge \delta^\alpha \Phi^k_j \wedge \delta^{l-\alpha} \Phi^\lambda_j + \Delta^k \Delta^\sigma \Phi^i_k \wedge \delta^\alpha \omega^\sigma_k \wedge \delta^{l-\alpha} \omega^\sigma_j -$$
$$- d\delta^\alpha \Phi^i_k \wedge \delta^{l-\alpha} \Phi^k_j + \delta^\alpha \Phi^i_k \wedge d\delta^{l-\alpha} \Phi^k_j +$$
$$+ \Delta^i \Delta^\sigma d\delta^\alpha \omega^\sigma_i \wedge \delta^{l-\alpha} \omega^\sigma_j - \Delta^i \Delta^\sigma \delta^\alpha \omega^\sigma_i \wedge d\delta^{l-\alpha} \omega^\sigma_j)$$
$$i, j, k, l, \lambda = 1, \ldots, n, \quad \sigma = 1, \ldots, p.$$

Применяя $(25_3)$ и $(25_5)$ для $s < l$, приведем сумму $B$ к виду

$$B = \Delta^i \Delta^\sigma \omega^\sigma_i \wedge \sum_{\alpha=1}^{l-1} (\delta^{l-\alpha} \Phi^k_j \wedge \delta^\alpha \omega^\sigma_k + \Delta^\tau \delta^{l-\alpha} \omega^\tau_j \wedge \delta^\alpha \varkappa^\sigma_\tau) -$$
$$- \Delta^i \Delta^\sigma \omega^\sigma_j \wedge \sum_{\alpha=1}^{l-1} (\delta^{l-\alpha} \Phi^k_i \wedge \delta^\alpha \omega^\sigma_k + \Delta^\tau \delta^{l-\alpha} \omega^\tau_i \wedge \delta^\alpha \varkappa^\sigma_\tau).$$

Подставляя найденное $B$ в (49), приходим к равенству (41), в котором

$$\Omega^\sigma_i = \sum_{\alpha=1}^{l} (\delta^\alpha \Phi^k_i \wedge \delta^{l-\alpha} \omega^\sigma_k + \delta^{l-\alpha} \Phi^k_i \wedge \delta^\alpha \omega^\sigma_k +$$
$$+ \Delta^\tau \delta^\alpha \omega^\tau_i \wedge \delta^{l-\alpha} \varkappa^\tau_\sigma) + \sum_{\alpha=1}^{l-1} \Delta^\tau \delta^{l-\alpha} \omega^\tau_i \wedge \delta^\alpha \varkappa^\tau_\sigma - d\delta^l \omega^\sigma_i, \tag{50}$$
$$i, j, k = 1, \ldots, n, \quad \tau, \sigma = 1, \ldots, p.$$

Если теперь $\lambda^\sigma_\tau$ — 1-формы, определяемые леммой 9, то, полагая $\delta^l \varkappa^\sigma_\tau = -\lambda^\sigma_\tau$, из (50) и (42) получаем $(25_5)$ при $s = l$. $\square$

## Литература


1. Chern S.-S., Osserman R. *Remarks on the Riemannian metric of a minimal submanifold* // Lect. Notes Math. – 1981. – № 894. – P. 49–90.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
3. Перепелкин Д.И. *Кривизна и нормальные пространства многообразия $V_m$ в $R_n$* // Матем. сб. – 1935. – Т. 42. – № 1–3. – С. 100–120.



*Ростовский государственный университет*



*Поступила*
27.03.1995