ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 7 (482)

УДК 517.977

Ю.А. КОНЯЕВ

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КВАЗИРЕГУЛЯРНОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Приводится алгоритм построения квазирегулярной асимптотики решения сингулярно возмущенных задач для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными. В отличие от метода погранфункций [1], [2] алгоритм позволяет описывать сингулярности решения, отражающие структуру пограничных слоев, в замкнутой аналитической форме. При этом в развитие работ [3]–[8] с использованием нового варианта метода расщепления [4]–[9] остальные компоненты асимптотики регулярно зависят от малого параметра ε.

Для системы

$$\begin{gathered} \varepsilon\dot{x} = A_{11}(t)x + A_{12}(t)z + f_1(t); \\ \dot{z} = A_{21}(t)x + A_{22}(t)z + f_2(t) \\ (A_{jk}(t), f_j(t) \in C^\infty[0,1[; \quad x, f_1 \in R^n; \quad z, f_2 \in R^m; \quad j,k = \overline{1,2}; \quad n \geq 3) \end{gathered} \tag{1}$$

с быстрыми и медленными переменными, где спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ матрицы $A_{11}(t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} \sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0, \quad \lambda_{0j}(t) \neq 0 \quad (j \neq k, \quad j,k = \overline{1,n}, \quad t \in [0,1]); \\ \operatorname{Re}\lambda_{01}(t) \leq 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_{0n}(t) \geq 0, \quad t \in [0,1]; \\ \begin{cases} \operatorname{Re}\lambda_{0j}(t) \leq 0, & t \in [t_j, 1] \\ \operatorname{Re}\lambda_{0j}(t) \geq 0, & t \in [0, t_j] \end{cases} \quad (j = \overline{2, n-1}); \\ \operatorname{Re}\int_{t_j}^t \lambda_{0j}(s)ds < 0, \quad t \in [0,1] \setminus t_j \quad (j = \overline{1,n}) \quad (0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1), \end{gathered} \tag{2}$$

рассмотрим "начально краевую" задачу, т. е. систему (1) с условиями

$$\sum_1^n F_j x(t_j, \varepsilon) = x^0, \quad z(0,\varepsilon) = z^0, \tag{3}$$

где F_j, $j = \overline{1,n}$, — постоянные $n \times n$-матрицы.

Отметим, что при выполнении условий (2) всегда существует невырожденная матрица $S_0(t)$ такая, что

$$S_0^{-1}(t)A_{11}(t)S_0(t) = \Lambda_0(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}(t), \dots, \lambda_{0n}(t)\}.$$

Для произвольной квадратной матрицы $A = \{a_{jk}\}_1^n$ введем обозначения $\overline{A} = \operatorname{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$, $\overline{\overline{A}} = A - \overline{A}$.

Теорема. *При выполнении условий* (2) *и неравенства*

$$\det T \neq 0, \tag{4}$$

где $T = (T_{11}, \dots, T_{nn})$, $T_j = F_j S_0(t_j) = (T_{1j}, \dots, T_{nj})$, $j = \overline{1,n}$, *сингулярно возмущенная задача* (1)–(3) *имеет единственное и ограниченное при* $\varepsilon \to +0$ *решение, которое может быть представлено в квазирегулярной форме*

$$x(t,\varepsilon) = S_0(t)\Big(\sum_0^n H_k(t)\varepsilon^k\Big)\Phi(t,\varepsilon)\vec{1} + \sum_0^N \overline{x}_k(t)\varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{5}$$

$$z(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big(\sum_0^N P_k(t)\varepsilon^k\Big)\Phi(t,\varepsilon)\vec{1} + \sum_0^N \overline{z}_k(t)\varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{6}$$

где $\Phi(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{e^{\varphi_1(t,\varepsilon)}, \dots, e^{\varphi_n(t,\varepsilon)}\}$, $\varphi_j(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\int\limits_{t_j}^{t}\lambda_{0j}(s)ds$, $j = \overline{1,n}$, *а функции* $H_k(t)$, $P_k(t)$, $\overline{x}_k(t)$ *и* $\overline{z}_k(t)$, $k = \overline{0,N}$, $\forall N \geq 1$ *однозначно определяются в ходе доказательства.*

Доказательство. Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$x(t,\varepsilon) = \overline{x}(t,\varepsilon) + \check{x}(t,\varepsilon), \quad z(t,\varepsilon) = \overline{z}(t,\varepsilon) + \check{z}(t,\varepsilon),$$

где регулярные по ε функции

$$\overline{x}(t,\varepsilon) = \sum_0^\infty \overline{x}_k(t)\varepsilon^k, \quad \overline{z}(t,\varepsilon) = \sum_0^\infty \overline{z}_k(t)\varepsilon^k \tag{7}$$

— аналог частного решения, будут удовлетворять неоднородной задаче

$$\varepsilon\dot{\overline{x}} = A_{11}(t)\overline{x} + A_{12}(t)\overline{z} + f_1(t); \tag{1_1}$$
$$\dot{\overline{z}} = A_{21}(t)\overline{x} + A_{22}(t)\overline{z} + f_2(t);$$

$$\overline{z}(0,\varepsilon) = z^0 - \beta(\varepsilon) \quad \Big(\beta(\varepsilon) = \sum_1^\infty \beta_k\varepsilon^k\Big). \tag{3_1}$$

Постоянные векторы β_k будут определены ниже в ходе построения алгоритма, а функции $\check{x}(t,\varepsilon)$ и $\check{z}(t,\varepsilon)$, отражающие наличие сингулярностей решения, будут удовлетворять однородной задаче

$$\varepsilon\dot{\check{x}} = A_{11}(t)\check{x} + A_{12}(t)\check{z}, \tag{1_2}$$
$$\dot{\check{z}} = A_{21}(t)\check{x} + A_{22}(t)\check{z};$$

$$\sum_1^n F_j\check{x}(t_j,\varepsilon) = x^0 - \sum_1^n F_j\overline{x}(t_j,\varepsilon) = \alpha(\varepsilon), \quad \check{z}(0,\varepsilon) = \beta(\varepsilon). \tag{3_2}$$

Как известно [10], [11], для линейных систем (в данном случае для систем (1), (1_1) и (1_2)) всегда существует общее решение, и для решения поставленной задачи (1)–(3) (задач (1_k)–(3_k), $k = 1, 2$) достаточно указать алгоритм подбора постоянных указанного решения и доказать его равномерную ограниченность при $\varepsilon \to +0$ на всем отрезке $[0, 1]$.

Докажем однозначную разрешимость задачи (1_1)–(3_1). После подстановки (7) в (1_1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε, получим набор соотношений (здесь и далее аргументы опущены):

$$
\begin{gathered}
0 = A_{11}\overline{x}_0 + A_{12}\overline{z}_0 + f_1,\\
\dot{\overline{z}} = A_{21}\overline{x}_0 + A_{22}\overline{z}_0 + f_2; \quad \overline{z}_0(0) = z^0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dot{\overline{x}}_{k-1} = A_{11}\overline{x}_k + A_{12}\overline{z}_k, \quad k \geq 1,\\
\dot{\overline{z}}_k = A_{21}\overline{x} + A_{22}\overline{z}_k; \quad \overline{z}_k(0) = -\beta_k,
\end{gathered}
$$

и соответствующий набор начальных задач

$$
\begin{gathered}
\dot{\overline{z}}_0 = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\overline{z}_0 - A_{21}A_{11}^{-1}f_1 + f_2, \quad \overline{z}_0(0) = z^0\\
(\overline{x}_0 = -A_{11}^{-1}(A_{12}\overline{z}_0 + f_1));\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dot{\overline{z}}_k = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\overline{z}_k - A_{21}A_{11}^{-1}\dot{\overline{x}}_{k-1}; \quad \overline{z}_k(0) = -\beta_k;\\
(\overline{x}_k = -A_{11}^{-1}(A_{12}\overline{z}_k - \dot{\overline{x}}_{k-1})), \quad k \geq 1,
\end{gathered}
$$

откуда последовательно и однозначно могут быть определены все вектор-функции $\overline{x}_k(t)$, $\overline{z}_k(t)$. При этом частичные суммы $\overline{x}_{(N)}(t,\varepsilon) = \sum\limits_0^N \overline{x}_k(t)\varepsilon^k$ и $\overline{z}_{(N)}(t,\varepsilon) = \sum\limits_0^N \overline{z}_k(t)\varepsilon^k$ будут удовлетворять задаче

$$
\begin{gathered}
\varepsilon\dot{\overline{x}}_{(N)} = A_{11}\overline{x}_{(N)} + A_{12}\overline{z}_{(N)} + f_1 + \varepsilon^{N+1}b_1,\\
\dot{\overline{z}}_{(N)} = A_{21}\overline{x}_{(N)} + A_{22}\overline{z}_{(N)} + f_2,\\
\overline{z}_{(N)}(0,\varepsilon) = z^0 - \sum_1^N \beta_k\varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}), \quad b_1(t) = \dot{\overline{x}}_N(t).
\end{gathered}
$$

Чтобы доказать справедливость для достаточно малых $\varepsilon > 0$ асимптотического представления решений задачи (1_1)–(3_1)

$$
\begin{gathered}
\overline{x}(t,\varepsilon) = \overline{x}_{(N)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}r_1(t,\varepsilon),\\
\overline{z}(t,\varepsilon) = \overline{z}_{(N)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}r_2(t,\varepsilon)\\
(|r_j(t,\varepsilon)| \leq C, \quad j = 1,2, \quad t \in [0,1]),
\end{gathered}
\tag{8}
$$

рассмотрим уравнения для остаточных членов $r_1(t,\varepsilon)$ и $r_2(t,\varepsilon)$

$$
\begin{gathered}
\varepsilon\dot{r}_1 = A_{11}(t)r_1 + A_{12}(t)r_2 - \varepsilon^{N+1}b_1(t),\\
\dot{r}_2 = A_{21}(t)r_1 + A_{22}(t)r_2,\\
\sum_1^n F_j r_1(t_j,\varepsilon) = \rho(\varepsilon); \quad r_2(0,\varepsilon) = \mu(\varepsilon).
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Покажем, что эта задача, аналогичная задаче (1_1)–(3_1), имеет равномерно ограниченное на $[0,1]$ решение при $\varepsilon \to +0$ (существование и единственность такого решения доказывается по описанной выше схеме). С помощью преобразования сдвига

$$
r_1 = v_0 + v_1 \quad (v_0 = -A_{11}^{-1}(A_{12}r_2 + f_1) \equiv A_0 r_2 + \varphi_0)
$$

упростим задачу (9):

$$\begin{gathered}\varepsilon(\dot v_0+\dot v_1)=A_{11}(v_0+v_1)+A_{12}r_2+f_1;\\ \dot r_2=A_{21}(v_0+v_1)+A_{22}r_2+f_2=A_{21}(A_0r_2+\varphi_0)+A_{21}v_1+A_{22}r_2+f_2=\\ (=A_{21}v_1+(A_{21}A_0+A_{22})r_2+A_{21}\varphi_0+f_1=)\\ =\widetilde A_{21}v_1+\widetilde A_{22}r_2+\varphi_2;\end{gathered}$$

при этом

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot v_1&=A_{11}v_1-\varepsilon\dot v_0=A_{11}v_1-\varepsilon(A_0r_2+\varphi_0)^{\cdot}=A_{11}v_1-\varepsilon(\dot A_0r_2+A_0\dot r_2+\dot\varphi_0)=\\ &=A_{11}v_1-\varepsilon\dot A_0r_2-\varepsilon A_0(\widetilde A_{21}v_1+\widetilde A_{22}r_2+\varphi_2)-\varepsilon\dot\varphi_0=\widetilde A_{11}v_1+\varepsilon\widetilde A_{12}r_2+\varepsilon\varphi_1\end{aligned}$$

(где, в частности, $\widetilde A_{11}=A_{11}-\varepsilon A_0\widetilde A_{21}$), откуда после введенных переобозначений имеем

$$\begin{gathered}\varepsilon\dot v_1=\widetilde A_{11}v_1+\varepsilon\widetilde A_{12}r_2+\varepsilon\varphi_1,\\ \dot r_2=\widetilde A_{21}v_1+\widetilde A_{22}r_2+\varphi_2,\\ \sum_1^n F_jv_1(t_j,\varepsilon)=\rho(\varepsilon)-\sum_1^n F_jv_0(t_j,\varepsilon)\equiv\nu(\varepsilon),\\ r_2(0,\varepsilon)=\mu(\varepsilon).\end{gathered}$$

В условиях теоремы всегда существует невырожденная матрица $S(t)$ такая, что $S^{-1}(t)A_{11}(t)S(t)=\Lambda_0(t)=\operatorname{diag}\{\lambda_{01}(t),\dots,\lambda_{0n}(t)\}$. Невырожденная замена $v_1=S(t)v$ позволяет перейти к более удобной для анализа задаче

$$\begin{gathered}\varepsilon\dot v=(\Lambda_1+\varepsilon B)v+\varepsilon B_{12}r_2+\varepsilon h_1,\\ \dot r_2=B_{21}v+B_{22}r_2+h_2,\\ \sum_1^n T_jv(t_j,\varepsilon)=\nu(\varepsilon),\quad r_2(0,\varepsilon)=\mu(\varepsilon),\end{gathered}\tag{10}$$

и записать специальное интегральное уравнение, алгоритм построения которого без использования функции Грина указан в [4], [7], для многоточечной краевой задачи для функции $v(t,\varepsilon)$

$$v=\Phi(t,\varepsilon)C_{01}+\sum_1^n\Phi_j(t,\varepsilon)\int_{t_j}^t\Phi^{-1}(s,\varepsilon)(B(s)v+B_{12}(s)r_2+h_1(s))ds,\tag{11}$$

где C_{01} однозначно определяется краевыми условиями с учетом (4), а фундаментальная матрица

$$\begin{gathered}\Phi(t,\varepsilon)=\operatorname{diag}\left\{\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^t\lambda_{01}(s)ds\right),\dots,\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_n}^t\lambda_{0n}(s)ds\right)\right\}=\sum_1^n\Phi_j(t,\varepsilon);\\ \Phi_j(t,\varepsilon)=\operatorname{diag}\left\{\underbrace{0,\dots,0}_{j-1\text{ раз}},\ \exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_j}^t\lambda_{0j}(s)ds\right)0,\dots,0\right\}\end{gathered}$$

удовлетворяет соотношению $\varepsilon\dot\Phi=\Lambda_0(t)\Phi$. Соответствующее интегральное уравнение, эквивалентное начальной задаче для функции $r_2(t,\varepsilon)$, принимает вид

$$r_2=\Psi(t)\left(\beta(\varepsilon)+\int_0^t\Psi^{-1}(s)(B_{21}(s)v+h_2(s))ds\right),\tag{12}$$

где фундаментальная матрица $\Psi(t)$ определяется соотношением $\dot\Psi=B_{22}(t)\Psi$, $\Psi(0)=E$.

В условиях теоремы с учетом соотношений (2) и оценок

$$|e^{\frac{\varphi_j(t)}{\varepsilon}}| \le C \quad \Big(\varphi_j(t) = \int_{t_j}^t \lambda_{0j}(s)ds, \ \ \dot{\varphi}_j = \lambda_{0j}(t), \ \ \varphi_j(t_j) = 0, \ \ j = \overline{1,n}\Big);$$

$$\Big|e^{\frac{\varphi_j(t)}{\varepsilon}} \int_{t_j}^t e^{-\frac{\varphi_j(s)}{\varepsilon}} ds\Big| = \varepsilon\Big|e^{\frac{\varphi_j(t)}{\varepsilon}} \int_{t_j}^t \lambda_{0j}^{-1}(s) de^{-\frac{\varphi_j(s)}{\varepsilon}}\Big| \le \varepsilon C_1 \Big|e^{\frac{\varphi_j(s)}{\varepsilon}} \int_{t_j}^t d(e^{-\frac{\varphi_j(s)}{\varepsilon}})\Big| =$$

$$= \varepsilon C_1 |e^{\frac{\varphi_j(s)}{\varepsilon}}(e^{-\frac{\varphi_j(t)}{\varepsilon}} - 1)| = \varepsilon C_1 |(1 - e^{\frac{\varphi_j(t)}{\varepsilon}})| \le \varepsilon C_2,$$

где C, C_1 и C_2 — некоторые постоянные, интегральные уравнения (11), (12) позволяют записать неравенства

$$\|r_2\| \le K_1 + K_2\|v\|; \quad \|v\| \le K_3 + \varepsilon K_4\|v\| + \varepsilon K_5\|r_2\| \le$$

$$\le K_3 + \varepsilon K_4\|v\| + \varepsilon K_5(K_1 + K_2\|v\|) \le K_6 + \varepsilon K_7\|v\|,$$

$$\|v\| \le \frac{K_6}{1 - \varepsilon K_7} \le K_8; \quad \|r_2\| \le K_1 + K_2\|v\| \le K_9$$

($\|r(t)\| = \max\limits_{[0,1]} |r(t)|$; K_j, $j = \overline{1,9}$, — некоторые постоянные), что с учетом проделанных замен и доказывает существование единственного и равномерно ограниченного на всем отрезке $[0,1]$ при $\varepsilon \to +0$ решения задачи (9) и исходной задачи (1)–(3), а также справедливость асимптотических представлений (8).

При доказательстве асимптотической оценки (8) и при выводе интегрального уравнения (11) была использована лемма [4], [7], позволяющая рассматривать начальные и многоточечные краевые задачи с единой точки зрения с помощью их сведéния к эквивалентному специальному интегральному уравнению, не требующему построения функции Грина.

Лемма. *Многоточечная краевая задача в* R^n $(n \ge 2)$

$$\dot{x} = A(t)x + f(t); \quad \sum_1^n F_j x(t_j) = x^0,$$

$$x, f \in R^n; \quad A(t), f(t) \in C[0,1]; \quad 0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1,$$

F_j, $j = \overline{1,n}$, *— некоторые постоянные квадратные матрицы, при условии* $\det F \ne 0$, *где* $F = \sum\limits_1^n F_j \Phi(t_j)$, $\Phi(t)$ *— произвольная фундаментальная матрица соответствующей однородной системы, однозначно разрешима и ее решение может быть представлено в виде*

$$x(t) = \Phi(t)C + \sum_1^n \Phi_k(t) \int_{t_k}^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds,$$

$$C = F^{-1}\Big(x^0 - \sum_{j=1}^n F_j \sum_{k=1}^n \Phi_k(t_j) \int_{t_k}^{t_j} \Phi^{-1}(s) f(s) ds\Big),$$

$$\dot{\Phi}_k = A(t)\Phi_k \quad (k = \overline{1,n}); \quad \sum_1^n \Phi_k(t) = \Phi(t).$$

Идея доказательства становится понятной, если проверить, что выражение $\sum\limits_1^n \Phi_k(t) \int\limits_{t_k}^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds$ является частным решением неоднородной системы.

Рассмотрим далее задачу (1_2)–(3_2), которая после невырожденного преобразования $\check{x} = S(t)\check{y}$ может быть записана в виде

$$\varepsilon\dot{\check{y}} = (\Lambda_0 + \varepsilon B)\check{y} + B_{12}\check{z}, \qquad (13)$$
$$\dot{\check{z}} = B_{21}\check{y} + B_{22}\check{z},$$

$$\sum_1^n T_j\check{y}(t_j,\varepsilon) = \alpha(\varepsilon), \quad \check{z}(0,\varepsilon) = \beta(\varepsilon), \quad T_j = F_jS(t_j), \ \ j = \overline{1,n}. \qquad (13_1)$$

Решение задачи (13) будем искать в виде

$$\check{y} = H(t,\varepsilon)\Phi(t,\varepsilon)\vec{1}, \quad \check{z} = \varepsilon P(t,\varepsilon)\Phi(t,\varepsilon)\vec{1},$$

где $\vec{1} = (1,1,\ldots,1)^\top$, а фундаментальная матрица $\Phi(t,\varepsilon)$ определена выше. При этом регулярные по ε матричные функции $H(t,\varepsilon) = \sum\limits_0^\infty H_k(t)\varepsilon^k$ и $P(t,\varepsilon) = \sum\limits_0^\infty P_k(t)\varepsilon^k$ будут удовлетворять системе матричных уравнений (далее везде аргументы опущены):

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{H} &= \Lambda_0\overline{\overline{H}} - \overline{\overline{H}}\Lambda_0 + \varepsilon BH + \varepsilon B_{12}P, \\ \varepsilon\dot{P} &= B_{21}H - P\Lambda_0 + \varepsilon B_{22}P, \end{aligned} \qquad (14)$$

а “начально краевые условия” (13_1) преобразуются к виду

$$\sum_1^n T_j\overline{H}(t_j,\varepsilon)\Phi(t_j,\varepsilon)\vec{1} = \alpha(\varepsilon) - \sum_1^n T_j\overline{\overline{H}}(t_j,\varepsilon)\Phi(t_j,\varepsilon)\vec{1} = \delta(\varepsilon),$$
$$\varepsilon P(0,\varepsilon)\Phi(0,\varepsilon)\vec{1} = \beta(\varepsilon).$$

Здесь следует отметить, что при достаточно малых ε, $0 < \varepsilon \ll 1$, имеют место соотношения $\Phi(t_j,\varepsilon)\vec{1} = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^\top + O(\varepsilon^{N+1})$, где $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,)^\top$ — j-й орт, $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$. Приравнивая в (14) коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим системы матричных уравнений для последовательного и однозначного определения всех матриц $H_k(t)$ и $P_k(t)$, $k \geq 0$:

$$\begin{cases} 0 = \Lambda_0\overline{\overline{H}}_0 - \overline{\overline{H}}_0\Lambda_0, \\ 0 = B_{21}H_0 - P_0\Lambda_0 - P_0\Lambda_0, \quad P_0(0)\Phi(0,\varepsilon)\vec{1} = \beta_1, \end{cases} \qquad (15)$$

. . . .

$$\begin{cases} \dot{H}_{k-1} = \Lambda_0\overline{\overline{H}}_k - \overline{\overline{H}}_k\Lambda_0 + BH_{k-1} + B_{12}P_{k-1}, \\ \dot{P}_{k-1} = B_{21}H_k - P_k\Lambda_0 + B_{22}P_{k-1}, \quad k \geq 1, \end{cases} \qquad (16_k)$$

$$\sum_1^n T_jH_k(t_j)\Phi(t_j,\varepsilon)\vec{1} = \alpha_k,$$
$$P_k(0)\Phi(0,\varepsilon)\vec{1} = \beta_{k+1},$$

откуда при ε^0 имеем $\overline{\overline{H}}_0 \equiv 0$, $P_0 = B_{21}\overline{H}_0\Lambda_0^{-1} \equiv P_0(\overline{H}_0)$.

Далее при ε^1 рассмотрим задачу для системы дифференциальных матричных уравнений

$$\dot{H}_0 = \Lambda_0\overline{\overline{H}}_1 - \overline{\overline{H}}_1\Lambda_0 + BH_0 + B_{12}P_0, \qquad (17_1)$$
$$\sum_1^n T_j\overline{H}_0(t_j)\Phi(t_j,\varepsilon)\vec{1} = \alpha_0,$$
$$\dot{P}_0 = B_{21}H_1 - P_1\Lambda_0 + B_{22}P_0, \quad P_1(0)\Phi(0,\varepsilon)\vec{1} = \beta_2. \qquad (17_2)$$

Условия однозначной разрешимости системы (17_1) позволяют записать задачу для определения "диагональной" матрицы $\overline{H}_0(t)$:

$$\dot{\overline{H}}_0 = \overline{B}\,\overline{H}_0 + (\overline{B_{12}B_{21}\Lambda_0^{-1}})\overline{H}_0;$$
$$\sum_1^n T_j \overline{H}_0(t_j)\Phi(t_j,\varepsilon)\vec{1} = \alpha_0,$$

откуда единственным образом определяются матрицы $\overline{H}_0(t)$, $P_0(t)$, $\overline{\overline{H}}_1(t) = \overline{\overline{H}}_1(\overline{H}_0, P_0)$ и постоянный вектор $\beta_1 = P_0(0)\Phi(0,\varepsilon)\vec{1}$, при этом $P_1 = (B_{21}H_1 + B_{22}P_0 - \dot{P}_0)\Lambda_0^{-1} \equiv P_1(P_0, H_1)$.

Анализ аналогичных задач при ε^k, $k \geq 2$, позволяет и далее единственным образом (аналогично предыдущему) определить, придерживаясь алгоритма

$$\overline{z}_k(t) \to \overline{x}_k(t) \to \alpha_k \to \overline{\overline{H}}_k(t) \to \overline{H}_k(t) \to P_k(t) \to \beta_{k+1} \to \overline{z}_{k+1}(t), \quad k \geq 0,$$

все составляющие решения

$$x(t,\varepsilon) = \sum_0^\infty \overline{x}_k(t)\varepsilon^k + S(t)\Big(\sum_0^\infty H_k(t)\varepsilon^k\Big)\Phi(t,\varepsilon)\vec{1},$$
$$z(t,\varepsilon) = \sum_0^\infty \overline{z}_k(t)\varepsilon^k + \Big(\sum_0^\infty P_k(t)\varepsilon^k\Big)\Phi(t,\varepsilon)\vec{1}$$

исходной задачи (1) с учетом "начально краевых" условий (3). Суммируя матричные уравнения (15) и (16_k) с соответствующими степенями ε, можно записать задачи для частичных сумм $H_{(N)}(t,\varepsilon) = \sum\limits_0^N H_k(t)\varepsilon^k$ и $P_{(N)}(t,\varepsilon) = \sum\limits_0^N P_k(t)\varepsilon^k$:

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{H}_{(N)} &= \Lambda_0\overline{\overline{H}}_{(N)} - \overline{\overline{H}}_{(N)}\Lambda_0 + \varepsilon BH_{(N)} + B_{12}P_{(N)} + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \varepsilon\dot{P}_{(N)} &= B_{21}H_{(N)} - P_{(N)}\Lambda_0 + B_{22}P_{(N)} + O(\varepsilon^{N+1}) \end{aligned} \tag{18}$$

с соответствующими "начально краевыми условиями".

Умножая справа каждое из матричных уравнений системы (18) на ограниченный вектор $\Phi(t,\varepsilon)\vec{1}$, получим задачи для $\check{y}_{(N)}(t,\varepsilon) = H_{(N)}(t,\varepsilon)\Phi(t,\varepsilon)\vec{1}$, $\check{z}_{(N)}(t,\varepsilon) = \varepsilon P_{(N)}(t,\varepsilon)\Phi(t,\varepsilon)\vec{1}$:

$$\varepsilon\dot{\check{y}}_{(N)} = (\Lambda_0 + \varepsilon B)\check{y}_{(N)} + B_{12}\check{z}_{(N)} + O(\varepsilon^{N+1}),$$
$$\dot{\check{z}}_{(N)} = B_{21}\check{y}_{(N)} + B_{22}\check{z}_{(N)} + O(\varepsilon^{N+1}),$$
$$\sum_1^n T_j\check{y}_{(N)}(t_j,\varepsilon) = \alpha(\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}),$$
$$\check{z}_{(N)}(0,\varepsilon) = \beta(\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}).$$

Для доказательства справедливости асимптотических представлений $\check{y}(t,\varepsilon) = \check{y}_{(N)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}R_1(t,\varepsilon)$, $\check{z}(t,\varepsilon) = \check{z}_{(N)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}R_2(t,\varepsilon)$ достаточно рассмотреть соответствующие задачи для функций $R_1(t,\varepsilon)$ и $R_2(t,\varepsilon)$

$$\varepsilon\dot{R}_1 = (\Lambda_0 + \varepsilon B)R_1 + B_{12}R_2 + q_1(t,\varepsilon),$$
$$\dot{R}_2 = B_{21}R_1 + B_{22}R_2 + q_2(t,\varepsilon),$$
$$\sum_1^n T_jR_1(t_j,\varepsilon) = a(\varepsilon) = \sum_0^\infty a_k\varepsilon^k, \quad R_2(0,\varepsilon) = b(\varepsilon) = \sum_0^\infty b_k\varepsilon^k,$$

аналогичные задачам (10) и имеющие в силу этого единственные и равномерно ограниченные на $[0,1]$ при $\varepsilon \to +0$ решения $R_1(t,\varepsilon)$ и $R_2(t,\varepsilon)$. Таким образом, доказана однозначная разрешимость и равномерная ограниченность на $[0,1]$ решений исходной задачи (1)–(3) при $\varepsilon \to +0$ и справедливость асимптотических представлений (5) и (6).

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.* – М.: Высш. школа, 1990. – 108 с.
2. Панфилов Н.Г. *О многоточечных краевых задачах для линейных систем дифференциальных сингулярно возмущенных уравнений* // Укр. матем. журн. – 1980. – Т. 32. – № 2. – С. 234–239.
3. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.
4. Коняев Ю.А. *Конструктивные методы исследования многоточечных краевых задач* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 57–61.
5. Коняев Ю.А. *Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений* // Матем. сб. – 1993. – № 12. – С. 133–144.
6. Коняев Ю.А. *Контрастные решения сингулярно возмущенных многоточечных краевых задач с особенностями* // Матем. заметки. – 1994. – Т. 56. – Вып. 4. – С. 95–102.
7. Коняев Ю.А. *Сингулярно возмущенные нелинейные краевые задачи при наличии тождественных и нетождественных резонансов* // Вестн. Моск. энерг. ин-та. – 1996. – № 6. – С. 96–102.
8. Коняев Ю.А. *Об однозначной разрешимости некоторых классов регулярных и сингулярно возмущенных краевых задач* // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 8. – С. 1028–1035.
9. Коняев Ю.А. *Метод расщепления в теории регулярных и сингулярных возмущений* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 10–15.
10. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – М.: Наука, 1976. – 576 с.
11. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1986. – 272 с.

Российский университет
Дружбы Народов

Поступили
первый вариант 03.10.2000
окончательный вариант 28.12.2001