ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 4 (527)

УДК 517.929

К.М. ЧУДИНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПОДПРОСТРАНСТВУ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В данной статье задача о свойствах проекций решений линейных систем с постоянной матрицей и переменным запаздыванием на произвольно заданное подпространство (назовем его исходным) сводится к классической задаче о свойствах нормы решений. Базис исходного подпространства конструктивно дополняется до базиса такого подпространства, что поведение проекций решений на него можно рассматривать независимо от поведения проекций решений на его дополнение. Асимптотические свойства проекций решения системы на исходное и построенное подпространства эквивалентны. Аналогичный алгоритм сведения задачи об устойчивости по части переменных линейных систем к исследованию некоторой вспомогательной системы явился основной идеей [1], где, однако, возможности использования этого алгоритма существенно ограничены тем, что оно фактически опирается на равносильность устойчивости решения системы и устойчивости его производной. Поэтому, в частности, в главе об устойчивости систем с последействием рассматриваются только системы с постоянным запаздыванием.

Полужирным шрифтом обозначаются матрицы (прописными буквами) и векторы (строчными). Произведение вектора и матрицы считается матричным, при этом вектор считается строкой или столбцом в зависимости от того, справа или слева он умножается на матрицу. Для простоты не вводится различия между обозначениями вектора как элемента линейного пространства и обозначением его координатной строки или столбца. Аналогично, когда речь идет о преобразовании $\mathbf{A}$, имеется в виду преобразование линейного пространства, определяемого матрицей $\mathbf{A}$ (в соответствующем базисе). Введем также обозначения $R_+ = [0, +\infty)$, $\Delta = \{(t, s) : t \geq s \geq 0\}$, $C^{k\times k}$ — пространство комплексных матриц размера $k \times k$, $\mathbf{E}$ — единичая матрица.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t - r(t)) = \mathbf{f}(t), & t \geq \tau; \\ \mathbf{x}(\xi) = \mathbf{0}, & \xi < \tau, \end{cases} \tag{1}$$

где $\tau \in R_+$, $\mathbf{A} \in C^{n\times n}$, функция $r : R_+ \to R_+$ измерима, вектор-функция $\mathbf{f}$ суммируема на каждом конечном отрезке $[\tau, \beta]$. Решением системы будем считать вектор-функцию $\mathbf{x} : [\tau, \beta] \to C^n$ с абсолютно непрерывными на каждом конечном отрезке $[\tau, \beta]$ компонентами, удовлетворяющую (1) почти всюду.

Определение 1 ([2]). *Матрицей Коши* системы (1) назовем матрицу-функцию $\mathbf{C} : \Delta \to C^{n\times n}$, являющуюся при каждом фиксированном $s \geq 0$ решением матричной задачи

$$\frac{\partial \mathbf{C}(t, s)}{\partial t} - \mathbf{A}\mathbf{C}(t - r(t), s) = \mathbf{0}, \quad t \geq s,$$
$$\mathbf{C}(s, s) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{C}(\xi, s) = \mathbf{0}, \quad \xi < s.$$

При задании начального условия решение системы (1) существует, единственно и определяется формулой Коши [2]

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}(t, \tau)\mathbf{x}(\tau) + \int_\tau^t \mathbf{C}(t, s)\mathbf{f}(s)ds. \tag{2}$$

Таким образом, матрица Коши, задаваемая семейством однородных систем, содержит в себе всю информацию, необходимую для исследования поведения решений системы (1). В частности, все виды устойчивости системы (1) можно рассматривать как свойства ее матрицы Коши.

Определение 2. Систему (1) назовем *устойчивой по Ляпунову*, если существует такое число $M < \infty$, что $\|\mathbf{C}(t,s)\| \le M$ при всех $(t,s) \in \Delta$; *экспоненциально устойчивой*, если существуют такие положительные постоянные N и α, что $\|\mathbf{C}(t,s)\| \le N \exp[-\alpha(t-s)]$.

Заметим, что приведенное определение подразумевает равномерную устойчивость. В случае $r(t) \equiv 0$ (обыкновенного дифференциального уравнения) ему соответствует классическое определение равномерной устойчивости ([3], сс. 70–72, 254) (соответственно по Ляпунову и экспоненциальной).

Исследование устойчивости линейных систем по части переменных привело к представлению о необходимости естественного обобщения этого термина. Поясним сказанное. Устойчивость системы в смысле определения 1 является устойчивостью всех компонент его решений. Устойчивость системы по части переменных — устойчивость только некоторых компонент его решений, т. е. она является частным случаем устойчивости проекций решений системы на некоторое подпространство. Это свойство отражает

Определение 3. Будем называть систему (1) *устойчивой по подпространству* $S_0 \subset C^n$ (по Ляпунову или экспоненциально), если соответствующее свойство нормы $\|\mathbf{C}(t,s)\|$ матрицы Коши из определения 2 выполняется для нормы вектора $\mathbf{aC}(t,s)$ при любом $\mathbf{a} \in S_0$.

Таким образом, классическая устойчивость и устойчивость по части переменных являются частными случаями устойчивости по подпространству, если соответственно $S_0 = C^n$ и S_0 — линейная оболочка нескольких векторов вида $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$.

Замечание 1. Пусть $\mathbf{T}$ — матрица перехода системы (1) к новому базису, т. е. матрица $\mathbf{A}$ переходит в $\mathbf{TAT}^{-1}$, вектор $\mathbf{x}(t)$ — в $\mathbf{Tx}(t)$. Тогда устойчивость по подпространству S переходит в устойчивость по подпространству $S\mathbf{T}^{-1}$. Таким образом, при рассмотрении устойчивости по подпространству можно переходить к новому базису, заменяя соответствующим образом подпространство.

Лемма 1. *Матрица Коши системы*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{J}\mathbf{y}(t - r(t)) = \mathbf{0}, & t \ge \tau; \\ \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{0}, & \xi < \tau, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_\mu(t)) \in C^\mu$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ *— жорданова клетка размера* $\mu \times \mu$,

имеет треугольный вид

$$\mathbf{C}(t,s) = \begin{pmatrix} C_1(t,s) & C_2(t,s) & \dots & C_{\mu-1}(t,s) & C_\mu(t,s) \\ & C_1(t,s) & & C_{\mu-2}(t,s) & C_{\mu-1}(t,s) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & C_1(t,s) & C_2(t,s) \\ & & & & C_1(t,s) \end{pmatrix},$$

при этом ее элементы связаны соотношениями $C_\varkappa(t,s) = \int\limits_s^t C_1(t,\sigma) C_{\varkappa-1}(\sigma - r(\sigma), s)\,d\sigma$, $\varkappa = \overline{2,\mu}$.

Доказательство. Обозначим элемент матрицы Коши, находящийся в i-й строке и j-м столбце, через $C_{i,j}(t,s)$. Очевидно, $C_{\mu,j}(t,s) = 0$ при $j = 1,\ldots,\mu-1$. Обозначим $C_1(t,s) = C_{\mu,\mu}(t,s)$. Далее применим индукцию: считая, что $(i+1)$-я строка имеет требуемый вид, покажем, что его имеет также i-я строка, где $1 \le i \le \mu-1$. Итак, пусть $(i+1)$-я строка имеет вид $(0\ \ldots\ 0\ C_1(t,s)\ \ldots\ C_{\mu-i}(t,s))$. Тогда в силу формулы (2) $y_{i+1}(t) = \sum\limits_{j=i+1}^{\mu} C_{i+1,j}(t,s)y_j(s)$. Так как $C_1(t,s)$ — функция Коши скалярного уравнения $\dot y(t) - \lambda y(t-r(t)) = 0$, то в силу единственности его решения, формулы (2) и соотношения $\dot y_k(t) - \lambda y_k(t-r(t)) = y_{k+1}(t-r(t))$ при $t \ge s$ имеем

$$y_i(t) = C_1(t,s)y_i(s) + \int_s^t C_1(t,\sigma)y_{i+1}(\sigma - r(\sigma))d\sigma =$$
$$= C_1(t,s)y_i(s) + \int_s^t C_1(t,\sigma)\Big[\sum_{j=i+1}^{\mu} C_{i+1,j}(\sigma - r(\sigma),s)y_j(s)\Big]d\sigma =$$
$$= C_1(t,s)y_i(s) + \sum_{j=i+1}^{\mu}\Big[\int_s^t C_1(t,\sigma)C_{i+1,j}(\sigma - r(\sigma),s)d\sigma\, y_j(s)\Big],$$

откуда $C_{i,i}(t,s)=C_1(t,s)$, $C_{i,j}(t,s)=0$ при $j=1,\ldots,i-1$ и $C_{i,j}(t,s)=\int\limits_s^t C_1(t,\sigma)C_{i+1,j}(\sigma-r(\sigma),s)d\sigma$ при $j = i+1,\ldots,\mu$. $\square$

Следствие. Если матрица $\mathbf{J}$ в системе (3) жорданова, состоит из p клеток, то матрица Коши системы имеет вид $\mathbf{C}(t,s) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1(t,s) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{C}_p(t,s)\end{pmatrix}$, где $\mathbf{C}_k(t,s)$, $k = \overline{1,p}$, — матрицы вида, указанного в лемме 1.

Теперь опишем построение, имеющее основное значение для получения результатов исследования.

Пусть исследуется устойчивость системы (1) по подпространству $S_0 \subset C^n$ размерности d_0, заданному своим базисом $E_0 = \{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{d_0}$. Приведем алгоритм построения такого подпространства S, что 1) $S_0 \subset S$, 2) если $\mathbf{x} \in S$, то $\mathbf{xA} \in S$, 3) размерность S минимальна. Заметим, что строящаяся в ([1], с. 27–29) для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вспомогательная μ-система является, по сути, сужением системы (1) на обладающее свойствами 1)–3) подпространство S в случае, когда S_0 является линейной оболочкой нескольких первых компонент базиса, в котором задано линейное преобразование.

Положим $F_0 = \{\mathbf{f} : \mathbf{f} = \mathbf{eA},\ \mathbf{e} \in E_0\}$. Если $F_0 \not\subset S_0$, то обозначим через S_1 линейную оболочку множества векторов $E_0 \cup F_0$ и дополним множество E_0 до базиса $E_1 = \{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{d_1}$ пространства S_1. Положим $F_1 = \{\mathbf{f} : \mathbf{f} = \mathbf{eA},\ \mathbf{e} \in E_1\}$. Если $F_1 \not\subset S_1$, дополним множество E_1 до базиса $E_2 = \{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{d_2}$ линейной оболочки S_2 множества векторов $E_1 \cup F_1$. Положим $F_2 = \{\mathbf{f} : \mathbf{f} = \mathbf{eA},\ \mathbf{e} \in E_2\}$ и, если $F_2 \not\subset S_2$, продолжим описанный процесс построения базисов $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ пространств $S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset C^n$. Очевидно, для некоторого натурального $m \le n - d_0$ получим $F_m \subset S_m$. Положим $S = S_m$. Из представленного алгоритма построения S_m очевидно, что условия 1)–3) выполнены.

В соответствии с теоремой о жордановой форме матрицы ([4], с. 384) существует базис пространства C^n, в котором матрица преобразования $\mathbf{A}$ имеет жорданов вид. Назовем этот базис жордановым.

Основой для получения результатов исследования обоих рассматриваемых видов устойчивости по подпространству является

Лемма 2. *Система* (1) *устойчива по подпространству* S_0 *тогда и только тогда, когда она устойчива по подпространству* S.

Доказательство. Рассмотрим случай устойчивости по Ляпунову. Случай экспоненциальной устойчивости вполне аналогичен.

Достаточность очевидна. Докажем необходимость.

Пусть при любом $\mathbf{a} \in S_0$ функция $\|\mathbf{aC}(t,s)\|$ ограничена. Поскольку любой вектор подпространства S является линейной комбинацией векторов вида $\mathbf{aA}^k$, где $\mathbf{a} \in S_0$ и $k \geq 0$, достаточно показать ограниченность функций $\|\mathbf{aA}^k\mathbf{C}(t,s)\|$. В соответствии с замечанием 1 систему (1) можно рассмотреть в жордановом базисе. Для простоты будем считать, что матрица $\mathbf{J}$, задающая преобразование $\mathbf{A}$ в этом базисе, — жорданова клетка. Применим индукцию: покажем, что ограниченность $\|\mathbf{aC}(t,s)\|$ при $(t,s) \in \Delta$ влечет ограниченность $\|\mathbf{aJC}(t,s)\|$. Действительно,

$$\|\mathbf{aJC}(t,s)\| = \|\lambda\mathbf{aC}(t,s) + \mathbf{aNC}(t,s)\| \leq |\lambda|\, \|\mathbf{aC}(t,s)\| + \|\mathbf{aNC}(t,s)\|,$$

где $\mathbf{N}$ — матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}$, при этом ограниченность $\|\mathbf{aNC}(t,s)\|$ следует из вида матрицы Коши системы (3) в жордановом базисе (см. лемму 1). Доказательство аналогично, если $\mathbf{J}$ состоит из нескольких жордановых клеток. $\square$

Вернемся к алгоритму построения пространства $S = S_m$. Обозначим $d = d_m$. Дополним множество $E_m = \{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^d$ до базиса $E = \{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n$ пространства C^n. Пусть $\mathbf{T}$ — $n \times n$-матрица, k-й столбец которой, $1 \leq k \leq n$, задается вектором $\mathbf{e}_k$. Тогда преобразование $\mathbf{A} : C^n \to C^n$ задается в базисе E матрицей $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$. При этом, т. к. элементами подпространства S в базисе E являются векторы, последние $n - d$ координат которых нулевые, и $\mathbf{x} \in S \Rightarrow \mathbf{xA} \in S$, то

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\mathbf{P}$ — $d \times d$-матрица.

Доказательства следующих двух утверждений дословно совпадают.

Теорема 1. *Система* (1) *устойчива по Ляпунову по подпространству* S_0 *тогда и только тогда, когда устойчива по Ляпунову система*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{Pu}(t - r(t)) = \mathbf{0}, & t \geq \tau; \\ \mathbf{u}(\xi) = \mathbf{0}, & \xi < \tau. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. *Система* (1) *экспоненциально устойчива по подпространству* S_0 *тогда и только тогда, когда экспоненциально устойчива система* (5).

Доказательство. В базисе E однородная система, соответствующая системе (1), имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{By}(t - r(t)) = \mathbf{0}, & t \geq \tau; \\ \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{0}, & \xi < \tau. \end{cases} \tag{6}$$

В силу (4) и однозначной разрешимости задачи Коши для системы (6) вектор-функция $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_d(t))$ является решением системы (5) тогда и только тогда, когда существует решение системы (6) вида $\mathbf{y}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_d(t), u_{d+1}(t), \ldots, u_n(t))$. Другими словами, решениями системы (5) являются проекции на подпространство S решений системы (6) и только они. Применение леммы 2 завершает доказательство. $\square$

Замечание 2. В соответствии с алгоритмом построения базиса E у матрицы $\mathbf{P}$ $d-d_0$ строк имеют вид $(0\ \dots\ 0\ 1\ 0\ \dots\ 0)$ с единицей правее главной диагонали. В частности, если $d_0=1$, то

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_d \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. В отличие от систем обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с постоянным запаздыванием, для системы (1) свойства устойчивости и равномерной устойчивости не равносильны. Например, пусть в системе (3) $\tau=0$, $\mathbf{J}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $r(t)=\begin{cases} t, & t<1;\\ t-1, & t\geq 1.\end{cases}$ Имеем $y_2(t)=\begin{cases} y_2(0)(1-t), & t<1;\\ 0, & t\geq 1,\end{cases}$ $y_1(1)=y_1(0)-\int\limits_0^1[y_2(0)+y_1(0)]ds=-y_2(0)$. Если $y_2(0)\neq 0$, то $y_1(t)=y_1(1)-\int\limits_1^t[y_2(1)+y_1(1)]ds=y_2(0)(t-2)\to\infty$ при $t\to\infty$. Тривиальное решение системы устойчиво по y_2 и неустойчиво по y_1.

Признак экспоненциальной устойчивости системы (1) получим, применив к системе (4) теорему 2 из [5].

Теорема 3. *Если для собственных чисел λ_i матрицы* $\mathbf{P}$ *и функции r справедливо хотя бы одно из условий*:

а) $\lambda_i\in\mathbf{R},\ 0<\lambda_i \operatorname{vrai}\varlimsup\limits_{t\to\infty} r(t)<3/2$;

б) $\lambda_i\in\mathbf{R},\ 0<\lambda_i \operatorname{vrai}\varlimsup\limits_{t\to\infty} r(t)<\pi/2$;

в) $|\lambda_i|^2 \operatorname{vrai}\varlimsup\limits_{t\to\infty} r(t)<\operatorname{Re}\lambda_i$;

г) $\lambda_i \operatorname{vrai}\varlimsup\limits_{t\to\infty} r(t)\in\{z\in\mathbf{C}:|z|<|\arg z|-\pi/2\}$,

то система (1) *экспоненциально устойчива по подпространству* S_0.

Наконец, получим два результата о связи между устойчивостью системы (1) по подпространству и оценками на ее функцию Коши, аналогичные в некотором смысле теоремам о соответствующей связи для устойчивости всех компонент линейной системы, называемым теоремами Боля–Перрона ([6], сс. 105, 106, теоремы 3.3.1–3.3.3).

Через L_p, где $1\leq p<\infty$, будем обозначать линейное пространство вектор-функций $\mathbf{f}:R_+\to T$, $\mathbf{f}:R_+\to C^n$, суммируемых с p-й степенью; через L_∞ — пространство функций $f:R_+\to C$, ограниченных в существенном. Через $\mathbf{K}$ будем обозначать *оператор Коши*, определенный равенством $(\mathbf{Kf})(t)=\int\limits_0^t\mathbf{C}(t,s)\mathbf{f}(s)ds$ на пространстве суммируемых на каждом конечном отрезке $[\tau,\beta]$ функций $\mathbf{f}:R_+\to C^n$.

Лемма 3. *Чтобы* $\mathbf{aKf}\in L_\infty$ *при любом* $\mathbf{a}\in S_0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{aKf}\in\mathbf{L}_\infty$ *при любом* $\mathbf{a}\in S$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость.

Пусть $\mathbf{aKf}\in L_\infty$ при любом $\mathbf{a}\in S_0$. Поскольку любой вектор пространства S является линейной комбинацией векторов вида $\mathbf{aA}^k$, где $\mathbf{a}\in S_0$ и $k\geq 0$, достаточно показать, что $\mathbf{aA}^k\mathbf{Kf}\in L_\infty$. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 2, рассмотрим систему (1) в жордановом базисе и будем для простоты изложения и без ограничения общности изложения считать, что матрица $\mathbf{J}$, задающая преобразование $\mathbf{A}$, — жорданова клетка. Применим индукцию: покажем, что если $\mathbf{aKf}\in L_\infty$, то $\mathbf{aJKf}\in L_\infty$. Действительно, $\mathbf{aJKf}=\lambda\mathbf{aKf}+\mathbf{aNKf}$, где

$\mathbf{N}$ — матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}$, при этом из вида матрицы Коши в жордановом базисе (см. лемму 1) следует, что $\mathbf{aNKf} \in L_\infty$. $\square$

Теорема 4. *Для того чтобы система* (1) *была устойчива по Ляпунову по подпространству* S_0*, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{aKf} \in L_\infty$ *при любом* $\mathbf{a} \in S$.

Доказательство представляет собой применение теоремы 1, теоремы 3.3.3 из [6] и леммы 3.

Теорема 5. *Чтобы при* $r(t) \le \delta < \infty$, $t \in R_+$, *система* (1) *была экспоненциально устойчива по подпространству* S_0*, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{aKf} \in L_\infty$ *при любом* $\mathbf{a} \in S$.

Теорема сразу следует из теоремы 2, теоремы 3.3.2 из [6] и леммы 3.

Литература

1. Воротников В.И. *Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных.* – М.: Наука, 1991. – 288 с.
2. Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *О представлении решения линейного функционально-дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 6. – С. 1026–1036.
3. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М: Изд-во МГУ, 1998. – 480 с.
4. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 400 с.
5. Малыгина В.В. *Об оценке матрицы Коши некоторых систем с последействием* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 6. – С. 42–44.
6. Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными.* – Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. – 230 с.

Пермский государственный
технический университет

Поступила
12.03.2004