ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 10 (545)

УДК 517.929

Л.Б. СМОЛЯКОВА, В.В. ШУРЫГИН

ЛИФТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА РАССЛОЕНИЕ ВЕЙЛЯ $T^{\mu}M$ СЛОЕНОГО МНОГООБРАЗИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЕ ЭПИМОРФИЗМОМ μ АЛГЕБР ВЕЙЛЯ

Применение функтора Вейля $T^{\mathbf{A}}$, определяемого локальной алгеброй $\mathbf{A}$, к полю геометрического объекта σ на гладком многообразии M, представляющему собой сечение $\sigma : M \to E$ расслоения $E \to M$, присоединенного к расслоению реперов B^rM порядка r, приводит к полю геометрического объекта $T^{\mathbf{A}}\sigma : T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}E$, на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}M$, называемому естественным или полным лифтом геометрического объекта σ [1], [2]. А.П. Широковым [2] было обнаружено, что расслоение Вейля $T^{\mathbf{A}}M$ несет на себе структуру гладкого многообразия над алгеброй $\mathbf{A}$. По отношению к этой структуре естественный лифт $T^{\mathbf{A}}\sigma$ является $\mathbf{A}$-гладким отображением. $\mathbf{A}$-гладкое сечение $\Sigma : T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}E$ произвольного вида также определяет некоторое сечение $\sigma : M \to E$, поэтому всякое $\mathbf{A}$-гладкое поле геометрического объекта Σ на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}M$ можно рассматривать как лифт соответствующего поля геометрического объекта σ с многообразия M на расслоение $T^{\mathbf{A}}M$. Следуя терминологии Штуди [3], А.П. Широков называл $\mathbf{A}$-гладкие объекты на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}M$ синектическими расширениями естественных лифтов (напр., [4], с. 161–162). В случае произвольной алгебры Вейля $\mathbf{A}$ строение синектических лифтов тензорных полей и линейных связностей изучалось в [5].

В данной работе исследуются соответствия между геометрическими объектами на слоеном многообразии $(M, \mathcal{F})$ и обобщенном расслоении Вейля $T^{\mu}M$, определяемом эпиморфизмом $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ локальных алгебр Вейля. Расслоения такого типа в случае расслоенных многообразий общего вида $E \to M$ и гомоморфизмов локальных алгебр Вейля $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ изучались в [6] и [7]. В частности, в [6] было показано, что всякий расслоенный функтор на категории расслоенных многообразий, сохраняющий произведение, является обобщенным функтором Вейля, определяемым некоторым гомоморфизмом $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. В работе авторов [11] было показано, что расслоение $T^{\mu}M$ над многообразием M размерности $n + m$ со слоением коразмерности n несет на себе структуру слоеного $\mathbf{A}$-гладкого многообразия, моделируемого $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. Расслоение $T^{\mu}M$, соответствующее эпиморфизму алгебр плюральных чисел, эквивалентно полукасательному расслоению второго порядка, изучавшемуся в [8]. Геометрии полукасательных расслоений и гладких многообразий над алгебрами плюральных чисел посвящена обзорная работа [9].

1. Расслоения Вейля слоеных многообразий

Конечномерная коммутативная ассоциативная унитальная алгебра $\mathbf{A}$ называется *локальной в смысле А. Вейля* (или просто *алгеброй Вейля*) [10], [4], если ее радикал $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}) = \mathring{\mathbf{A}}$ (множество нильпотентных элементов) является максимальным идеалом и фактор-алгебра $\mathbf{A}/\mathring{\mathbf{A}}$ изоморфна алгебре $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Одномерное линейное подпространство в $\mathbf{A}$, натянутое на единицу $1_{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$, образует подалгебру, изоморфную $\mathbf{R}$. Эту подалгебру будем отождествлять с $\mathbf{R}$, считая, что $\mathbf{R} \subset \mathbf{A}$ и $1_{\mathbf{A}} \equiv 1 \in \mathbf{R}$. При этом локальная алгебра $\mathbf{A}$ представляется в виде

полупрямой суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \oplus \mathring{\mathbf{A}}. \tag{1}$$

В соответствии с разложением (1) элемент $X \in \mathbf{A}$ представляется в виде $X = x + \mathring{X}$, где $x \in \mathbf{R}$, $\mathring{X} \in \mathring{\mathbf{A}}$. Пусть $(\mathring{\mathbf{A}})^r$ — r-я степень идеала $\mathring{\mathbf{A}}$. Размерность N фактор-алгебры $\mathring{\mathbf{A}}/(\mathring{\mathbf{A}})^2$ называется шириной алгебры $\mathbf{A}$. Натуральное число q, определяемое соотношениями $(\mathring{\mathbf{A}})^q \neq 0$, $(\mathring{\mathbf{A}})^{q+1} = 0$, называется высотой алгебры $\mathbf{A}$. Алгебра Вейля $\mathbf{A}$ ширины N и высоты q изоморфна фактор-алгебре алгебры $\mathbf{R}[[t^1, \ldots, t^N]]$ формальных степенных рядов от N переменных $t^1, \ldots, t^N$ с коэффициентами в $\mathbf{R}$. Она также изоморфна фактор-алгебре алгебры $\mathbf{R}(N, q) = \mathbf{R}[t^1, \ldots, t^N; q]$ срезанных многочленов степени $\leq q$ от N переменных. Очевидно, что алгебра $\mathbf{A}$ ширины N и высоты q изоморфна некоторым фактор-алгебрам алгебр $\mathbf{R}[[t^1, \ldots, t^{N'}]]$ и $\mathbf{R}(N', q')$ при $N' > N$ и $q' > q$.

Пусть, далее, $\mathbf{I} \subset \mathbf{A}$ — идеал, $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$ — фактор-алгебра и $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — естественный эпиморфизм. $\mathbf{B}$-модуль $\mathbf{B}^n$, образованный n-строками, состоящими из элементов алгебры $\mathbf{B}$, может также рассматриваться как $\mathbf{A}$-модуль, в котором $\alpha X = 0$ для всех $\alpha \in \mathbf{I}$ и $X \in \mathbf{B}^n$. Символом $\mathrm{Ann}(\mathbf{I})$ будем обозначать идеал алгебры $\mathbf{A}$, состоящий из элементов, аннулирующих все элементы идеала $\mathbf{I}$. В алгебре $\mathbf{A}$ можно выбрать базис

$$\{e_a\} = \{e_0 = 1, e_{a^*}, e_{\mathring{a}}\} \tag{2}$$

такой, что элементы $\{e_{a^*}, e_{\mathring{a}}\}$ образуют базис максимального идеала $\mathring{\mathbf{A}}$, а элементы $\{e_{\mathring{a}}\}$ — базис идеала $\mathbf{I}$. При таком выборе базиса в $\mathbf{A}$ набор классов вычетов элементов $\{e_{\overline{a}}\} = \{e_0 = 1, e_{a^*}\}$ является базисом в фактор-алгебре $\mathbf{B}$.

Произвольный элемент $X \oplus Y$ $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$ определяется координатами $X^i = x^i + \mathring{X}^i \in \mathbf{A}$, $Y^\alpha = y^\alpha + \mathring{Y}^\alpha \in \mathbf{B}$, где $x^i, y^\alpha \in \mathbf{R}$, $\mathring{X}^i \in \mathring{\mathbf{A}}$, $\mathring{Y}^\alpha \in \mathring{\mathbf{B}}$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, m$.

Гладкое отображение Φ из области W $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$ в $\mathbf{A}$-модуль $\mathbf{A}^{n'} \oplus \mathbf{B}^{m'}$ называется $\mathbf{A}$-гладким, если для любого $X \in W$ касательное отображение $T_X\Phi$ является $\mathbf{A}$-линейным. В следующей теореме установлено локальное строение $\mathbf{A}$-гладких отображений указанного вида.

Теорема 1 ([11]). *Пусть $W = W_1 \oplus W_2 \subset \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$ — открытый координатный параллелипипед по отношению к вещественным координатам в $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, определяемым базисом* (2) *в $\mathbf{A}$. Отображение $\Phi : W \to \mathbf{A}^{n'} \oplus \mathbf{B}^{m'}$ является $\mathbf{A}$-гладким тогда и только тогда, когда оно имеет вид*

$$X^{i'} = \varphi^{i'}(x^i) + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^{i'}}{Dx^p} \mathring{X}^p + \psi^{i'}(x^i, y^\alpha) + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v}\psi^{i'}}{Dx^u Dy^v} \mathring{X}^u \mathring{Y}^v, \tag{3}$$

$$Y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha) + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v}\varphi^{\alpha'}}{Dx^u Dy^v} \mathring{X}^u \mathring{Y}^v, \tag{4}$$

где u, v и p — мультииндексы, q — высота алгебры $\mathbf{A}$, а функции $\varphi^{i'}(x^i)$, $\varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha)$ и $\psi^{i'}(x^i, y^\alpha)$ принимают значения соответственно в $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathrm{Ann}(\mathbf{I})$.

Гладкое многообразие $M^{\mathbf{L}}$ с максимальным атласом, карты которого принимают значения в $\mathbf{A}$-модуле $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, с функциями склейки, являющимися $\mathbf{A}$-гладкими диффеоморфизмами, называется $\mathbf{A}$-гладким многообразием, моделируемым $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{L}$, или $\mathbf{L}$-*многообразием.*

В дальнейшем символ $\mathbf{L}$ всегда используется для обозначения $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. $\mathbf{A}$-модуль $\mathbf{L}$ несет на себе два слоения: слоение $\mathring{\mathcal{F}}$, образованное слоями проекции $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m \to \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m$, $\{X^i, Y^\alpha\} \mapsto \{x^i, y^\alpha\}$, и слоение $\mathcal{F}^\mu$, образованное слоями проекции $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m \to \mathbf{A}^n$, $\{X^i, Y^\alpha\} \mapsto \{X^i\}$. Из формул (3) и (4) следует, что $\mathbf{A}$-гладкое отображение Φ из области W $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$ в $\mathbf{A}$-модуль $\mathbf{L}' = \mathbf{A}^{n'} \oplus \mathbf{B}^{m'}$ является морфизмом слоений по отношению

к слоениям $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ (т. е. отображает слои одного слоения в слои другого), однако отображение Φ в общем случае не является морфизмом слоений по отношению к слоениям $\mathcal{F}^\mu$. Отображение Φ является морфизмом слоений по отношению к слоениям $\mathcal{F}^\mu$ в том и только том случае, когда функции $\psi^{i'}(x^i, y^\alpha)$ в (3) равны нулю. Такое $\mathbf{A}$-гладкое отображение Φ называется [11] *слоеным*.

$\mathbf{L}$-многообразие $M^{\mathbf{L}}$ с максимальным атласом, функции склейки которого являются слоеными $\mathbf{A}$-гладкими диффеоморфизмами, называется *слоеным* $\mathbf{L}$-*многообразием*.

Слоеное $\mathbf{L}$-многообразие $M^{\mathbf{L}}$ несет на себе канонические слоения $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}^\mu$, индуцированные соответствующими слоениями на $\mathbf{A}$-модуле $\mathbf{L}$.

Из формул (3) и (4) следует, что слои слоения $\mathcal{F}^\mu$ несут на себе индуцированные структуры $\mathbf{B}$-гладких многообразий, моделируемых $\mathbf{B}$-модулем $\mathbf{B}^m$.

$\mathbf{A}$-гладкое отображение $\Phi : M^{\mathbf{L}} \to N^{\mathbf{L}'}$ между слоеными многообразиями называется *слоеным*, если оно является морфизмом слоений по отношению к слоениям $\mathcal{F}^\mu$ на $M^{\mathbf{L}}$ и $N^{\mathbf{L}'}$.

Слоеные $\mathbf{A}$-гладкие многообразия, моделируемые $\mathbf{A}$-модулями вида $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, где $n = 0, 1, \ldots$, $m = 0, 1, \ldots$, и слоеные $\mathbf{A}$-гладкие отображения образуют категорию. Будем обозначать эту категорию символом $(\mathbf{A}, \mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}an$.

Примером слоеного $\mathbf{L}$-многообразия является расслоение μ-скоростей $T^\mu M$ [11] слоеного многообразия $(M, \mathcal{F})$. Стандартное слоение $\mathcal{F}^{(n)}$ коразмерности n на пространстве $\mathbf{R}^{n+m}$ представляет собой разбиение этого пространства на слои субмерсии

$$p : \mathbf{R}^{n+m} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \ni \{x^i, y^\alpha\} \mapsto \{x^i\} \in \mathbf{R}^n \quad (i = 1, \ldots, n, \quad \alpha = n+1, \ldots, n+m). \tag{5}$$

Локальный диффеоморфизм

$$\varphi : U \ni \{x^i, y^\alpha\} \mapsto \{\varphi^j(x^i, y^\alpha), \varphi^\beta(x^i, y^\alpha)\} \in U'$$

между открытыми подмножествами в $\mathbf{R}^{n+m}$ называется локальным автоморфизмом стандартного слоения $\mathcal{F}^{(n)}$, если $\partial\varphi^j/\partial y^\alpha = 0$. Множество всех локальных автоморфизмов слоения $\mathcal{F}^{(n)}$ образует псевдогруппу $\Gamma_{n,m}$. Слоение $\mathcal{F}$ коразмерности n на $(n+m)$-мерном многообразии M определяется максимальным атласом (атласом слоения) на M с функциями склейки, принадлежащими псевдогруппе $\Gamma_{n,m}$ ([12], с. 3). Карты из атласа слоения называются *слоеными* картами. Многообразие со слоением $(M, \mathcal{F})$ называется слоеным многообразием. Слоем слоения, проходящим через точку x, называется максимальное связное подмногообразие $L_x \ni x$ в M, определяющееся локально в слоеных картах уравнениями вида $x^i = x_0^i = \mathrm{const}$.

Гладкое отображение $\varphi : M \to M'$ между слоеными многообразиями $(M, \mathcal{F})$ и $(M', \mathcal{F}')$ называется *морфизмом слоений*, если оно отображает слои слоения $\mathcal{F}$ в слои слоения $\mathcal{F}'$. В локальных координатах (x^i, y^α) и $(x^{i'}, y^{\alpha'})$ на M и M', определяемых слоеными картами, морфизм слоений φ задается уравнениями

$$x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i, y^\alpha), \quad y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha), \tag{6}$$

где функции $\varphi^{i'}$ удовлетворяют условию $\partial\varphi^{i'}/\partial y^\alpha = 0$. Слоеные многообразия и морфизмы слоений образуют категорию $\mathcal{F}ol$.

Пусть, далее, $\mathbf{A}$ — алгебра Вейля ширины N и высоты q, $h : \mathbf{R}(N, q) \to \mathbf{A}$ — некоторый эпиморфизм алгебры $\mathbf{R}(N, q) = \mathbf{R}[t^1, \ldots, t^N; q]$ срезанных многочленов степени $\leq q$ от N переменных на алгебру $\mathbf{A}$, $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$ — эпиморфизм локальных алгебр, а $(M, \mathcal{F})$ — слоеное многообразие. Будем предполагать, что алгебры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ отождествлены с фактор-алгебрами алгебры $\mathbf{R}(N, q)$, так что $h : \mathbf{R}(N, q) \to \mathbf{A}$ и $\mu \circ h : \mathbf{R}(N, q) \to \mathbf{B}$ — канонические эпиморфизмы. Два ростка $f, g : (\mathbf{R}^N, 0) \to (M, x)$ называются μ-эквивалентными [11], если они определяют одну и ту же трансверсальную $\mathbf{A}$-скорость $j^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr},x} f = j^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr},x} g$ и одну и ту же $\mathbf{B}$-скорость $j^{\mathbf{B}}_x f = j^{\mathbf{B}}_x g$ в точке $x \in M$. Класс μ-эквивалентности $j^\mu_x f$ называется *μ-скоростью* в точке x на многообразии M.

Множество $T^\mu M$ всех μ-скоростей на многообразии M несет на себе естественную структуру гладкого многообразия, расслоенного над M, и расслоение $\pi_\mu : T^\mu M \to M$ естественно эквивалентно расслоенному произведению $T^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr}} M \times_{T^{\mathbf{B}}_{\mathrm{tr}} M} T^{\mathbf{B}} M \to M$. Карта (U, h), где

$h{:}U \ni x \mapsto \{x^i, y^\alpha\} \in \mathbf{R}^{n+m}$ из атласа слоения на M, индуцирует на $T^\mu M$ карту $(\pi_\mu^{-1}(U), h^\mu)$, $h^\mu : \pi_\mu^{-1}(U) \ni X \mapsto \{X^i, Y^\alpha\} \in \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. При преобразовании координат (6) на M индуцированные координаты $\{X^i, Y^\alpha\}$ на $T^\mu M$ преобразуются следующим образом:

$$X^{i'} = \varphi^{i'}(x^i) + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^{i'}}{Dx^p} \overset{\circ}{X}{}^p, \tag{7}$$

$$Y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha) + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v} \varphi^{\alpha'}}{Dx^u Dy^v} \overset{\circ}{X}{}^u \overset{\circ}{Y}{}^v, \tag{8}$$

т. е. имеют вид (3), (4) с $\mathbf{R}$-значными функциями $\varphi^{i'}$ и $\varphi^{\alpha'}$ и с $\psi^{i'}(x^i, y^\alpha) = 0$. Таким образом, многообразие $T^\mu M$ несет на себе естественную структуру слоеного $\mathbf{A}$-гладкого многообразия, моделируемого $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. Морфизм слоений $\varphi : M \to M'$ индуцирует слоеное $\mathbf{A}$-гладкое отображение $T^\mu \varphi : T^\mu M \ni j^\mu f \mapsto j^\mu(\varphi \circ f) \in T^\mu M'$. Если в локальных координатах морфизм $\varphi : M \to M'$ имеет уравнения (6), то отображение $T^\mu \varphi$ в индуцированных координатах определяется соответствующими уравнениями (7), (8). Таким образом, имеем функтор $T^\mu : \mathcal{F}ol \to (\mathbf{A}, \mathbf{B})_f\text{-}\mathcal{M}an$. Функтор T^μ будем называть (обобщенным) функтором Вейля.

Как всякое слоеное $\mathbf{L}$-многообразие, многообразие $T^\mu M$ несет на себе каноническое слоение $\mathcal{F}^\mu$, слои которого в локальных координатах определяются уравнениями $X^i = \mathrm{const}$. Рассматривая в дальнейшем $T^\mu M$ как объект категории $\mathcal{F}ol$, всегда имеем в виду слоение $\mathcal{F}^\mu$. Расслоение трансверсальных $\mathbf{A}$-скоростей $T^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr}} M$ можно рассматривать как частный случай расслоения $T^\mu M$, соответствующий эпиморфизму $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$. Соответствующее этому случаю слоение $\mathcal{F}^\mu$ будем обозначать символом $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}$.

Предложение 1. *Слой L_X слоения $\mathcal{F}^\mu$ на $T^\mu M$, рассматриваемый как $\mathbf{B}$-гладкое многообразие, $\mathbf{B}$-диффеоморфен расслоению $T^{\mathbf{B}} L_Z$, где L_Z, $Z = \pi^\mu_{\mathrm{tr}}(X)$, — слой слоения $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}$ на расслоении $T^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr}} M$.*

Доказательство. Проекция $\pi^\mu_{\mathrm{tr}} : T^\mu M \to T^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr}} M$ является морфизмом слоений. Ограничение проекции π^μ_{tr} на слой L_X слоения $\mathcal{F}^\mu$ отображает L_X на слой L_Z, $Z = \pi^\mu_{\mathrm{tr}}(X)$, слоения $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}$ на $T^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr}} M$ и является субмерсией. Поскольку слои этой субмерсии односвязны, то доказываемое утверждение является следствием теоремы 3 работы [13]. $\square$

2. Аналитические продолжения морфизмов слоений $\varphi : M \to T^\mu M'$

Относя каждой точке $x \in M$ μ-струю $j^\mu \widetilde{x}$ ростка $\widetilde{x} : (\mathbf{R}^N, 0) \to (M, x)$ постоянного отображения, получим вложение

$$i : M \ni x \mapsto j^\mu \widetilde{x} \in T^\mu M \tag{9}$$

многообразия M в расслоение $T^\mu M$, являющееся сечением расслоения $\pi_\mu : T^\mu M \to M$. Сечение (9) будем называть *нулевым сечением* расслоения $T^\mu M$. Вложение (9) многообразия M в расслоение $T^\mu M$ будем называть также *каноническим* вложением. Образ $i(M) \subset T^\mu M$ будем отождествлять с многообразием M.

На расслоении $T^\mu \mathbf{R}^{n+m}$, где $\mathbf{R}^{n+m}$ рассматривается как многообразие со стандартным слоением (5), структура многообразия из категории $(\mathbf{A}, \mathbf{B})_f\text{-}\mathcal{M}an$ задается единственной картой h^μ для $h = \mathrm{id} : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^{n+m}$. Учитывая это, в дальнейшем будем отождествлять $T^\mu \mathbf{R}^{n+m}$ с $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$.

Теорема 2. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ и $(M', \mathcal{F}')$ — слоеные многообразия и $\varphi : M \to T^\mu M'$ — морфизм слоений. Тогда*

a) *существует единственное слоеное $\mathbf{A}$-гладкое отображение $\varphi^\mu : T^\mu M \to T^\mu M'$, ограничение которого на многообразие M (отождествляемое с образом нулевого сечения (9)) совпадает с φ;*

b) *в частности, сечение* $s : M \to T^\mu M$, *являющееся морфизмом слоений, единственным образом продолжается до изоморфизма* $s^\mu : T^\mu M \to T^\mu M$ *в категории* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}an$;

c) *если образ* $\varphi(M)$ *содержится в* $M' \subset T^\mu M'$, *то* $\varphi^\mu = T^\mu(\pi_\mu \circ \varphi)$.

Доказательство. a) Пусть сначала $M = U$ — простое открытое подмножество в $\mathbf{R}^{n+m}$, а $M' = \mathbf{R}^{n_1+m_1}$, где $\mathbf{R}^{n+m}$ и $\mathbf{R}^{n_1+m_1}$ рассматриваются как многообразия со стандартными слоениями (5). Поскольку $T^\mu\mathbf{R}^{n+m}$ отождествляется с $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, то в этом случае отображение φ принимает вид $\varphi : U \to \mathbf{A}^{n_1} \oplus \mathbf{B}^{m_1}$ и задается уравнениями

$$X^{i_1} = \varphi^{i_1}(x^i), \quad Y^{\alpha_1} = \varphi^{\alpha_1}(x^i, y^\alpha), \tag{10}$$

где $i = 1, \dots, n$, $\alpha = n+1, \dots, n+m$, $i_1 = 1, \dots, n_1$, $\alpha_1 = n_1+1, \dots, n_1+m_1$. В соответствии с теоремой 1 (формулы (3) и (4)), имеется только одно слоеное $\mathbf{A}$-гладкое отображение

$$\varphi^\mu : (\pi_\mu)^{-1}(U) \subset \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m \to \mathbf{A}^{n_1} \oplus \mathbf{B}^{m_1}, \tag{11}$$

где символом π_μ обозначена проекция $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$ на $\mathbf{R}^{n+m}$, а именно, отображение, имеющее уравнения

$$X^{i_1} = \varphi^{i_1}(x^i) + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^{i_1}}{Dx^p} \overset{\circ}{X}{}^p, \tag{12}$$

$$Y^{\alpha_1} = \varphi^{\alpha_1}(x^i, y^\alpha) + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v}\varphi^{\alpha_1}}{Dx^u Dy^v} \overset{\circ}{X}{}^u \overset{\circ}{Y}{}^v. \tag{13}$$

Из единственности продолжения отображения (10) до слоеного $\mathbf{A}$-гладкого отображения (11) вытекает следующее свойство продолжений.

Пусть $U_2 \subset \mathbf{R}^{n_2+m_2}$ *и* $U \subset \mathbf{R}^{n+m}$ *— открытые подмножества,* $\psi : U_2 \to (\pi_\mu)^{-1}(U) \subset \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$ *и* $\varphi : U \to \mathbf{A}^{n_1} \oplus \mathbf{B}^{m_1}$ *— морфизмы слоений, тогда*

$$(\varphi^\mu \circ \psi)^\mu = \varphi^\mu \circ \psi^\mu. \tag{14}$$

Используя свойство (14), докажем утверждение a) в общем виде.

Рассмотрим слоеные карты $h : U \to U^* \subset \mathbf{R}^{n+m}$ на $(M, \mathcal{F})$ и $h_1 : U_1 \to U_1^* \subset \mathbf{R}^{n_1+m_1}$ на $(M', \mathcal{F}')$ такие, что $\varphi(U) \subset (\pi_\mu)^{-1}(U_1)$, и определим φ^μ на $(\pi_\mu)^{-1}(U) \subset T^\mu M$ формулой

$$\varphi^\mu = (h_1^\mu)^{-1} \circ (h_1^\mu \circ \varphi \circ h^{-1})^\mu \circ h^\mu. \tag{15}$$

Ограничение $\varphi^\mu|U$ отображения (15) на $U \subset (\pi_\mu)^{-1}(U)$ совпадает с $\varphi|U$. Действительно,

$$\varphi^\mu|U = ((h_1^\mu)^{-1} \circ (h_1^\mu \circ \varphi \circ h^{-1})^\mu \circ h^\mu)|U = (h_1^\mu)^{-1} \circ (h_1^\mu \circ \varphi \circ h^{-1})^\mu|U^* \circ h = (h_1^\mu)^{-1} \circ h_1^\mu \circ \varphi \circ h^{-1} \circ h = \varphi|U.$$

В локальных координатах отображение $\varphi^\mu|U$ задается уравнениями (12) и (13) и является единственным $\mathbf{A}$-гладким отображением, продолжающим отображение $\varphi|U$. Необходимо теперь убедиться, что отображение $\varphi^\mu|U$ не зависит от выбора локальных координат на U и U_1. Рассмотрим другие слоеные карты $\widehat{h} : U \to \widehat{U}^* \subset \mathbf{R}^{n+m}$ на $(M, \mathcal{F})$ и $\widehat{h}_1 : U_1 \to \widehat{U}_1^* \subset \mathbf{R}^{n_1+m_1}$ на $(M', \mathcal{F}')$ такие, что $\varphi(U) \subset (\pi_\mu)^{-1}(U_1)$, и пусть $\widehat{\varphi}^\mu = (\widehat{h}_1^\mu)^{-1} \circ (\widehat{h}_1^\mu \circ \varphi \circ \widehat{h}^{-1})^\mu \circ \widehat{h}^\mu$. Перепишем отображение $\widehat{\varphi}^\mu$ в виде

$$\widehat{\varphi}^\mu = (h_1^\mu)^{-1} \circ h_1^\mu \circ (\widehat{h}_1^\mu)^{-1} \circ (\widehat{h}_1^\mu \circ \varphi \circ \widehat{h}^{-1})^\mu \circ \widehat{h}^\mu \circ (h^\mu)^{-1} \circ h^\mu. \tag{16}$$

Отображения (15) и (16) совпадают, если

$$(h_1^\mu \circ \varphi \circ h^{-1})^\mu = h_1^\mu \circ (\widehat{h}_1^\mu)^{-1} \circ (\widehat{h}_1^\mu \circ \varphi \circ \widehat{h}^{-1})^\mu \circ \widehat{h}^\mu \circ (h^\mu)^{-1}. \tag{17}$$

Из (7) и (8) следует, что $\widehat{h}^\mu \circ (h^\mu)^{-1} = (\widehat{h} \circ h^{-1})^\mu$. Учитывая это, перепишем правую часть соотношения (17) следующим образом: $h_1^\mu \circ (\widehat{h}_1^\mu)^{-1} \circ (\widehat{h}_1^\mu \circ \varphi \circ \widehat{h}^{-1})^\mu \circ (\widehat{h} \circ h^{-1})^\mu = h_1^\mu \circ (\widehat{h}_1^\mu)^{-1} \circ (\widehat{h}_1^\mu \circ \varphi \circ \widehat{h}^{-1} \circ \widehat{h} \circ h^{-1})^\mu = h_1^\mu \circ (\widehat{h}_1^\mu)^{-1} \circ (\widehat{h}_1^\mu \circ \varphi \circ h^{-1})^\mu$. По доказанному выше, отображения в левой и правой

частях соотношения (17) совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их ограничения на $U^* \subset \mathbf{R}^{n+m}$. Ограничение левой части на U^* имеет вид $h_1^\mu \circ \varphi \circ h^{-1}$, а ограничение правой части представляет собой отображение $h_1^\mu \circ (\widehat{h}_1^\mu)^{-1} \circ (\widehat{h}_1^\mu \circ \varphi \circ h^{-1})$, которое после сокращения взаимно обратных отображений совпадает с $h_1^\mu \circ \varphi \circ h^{-1}$.

Утверждения b) и c) являются прямыми следствиями рассуждений, проведенных при доказательстве утверждения a). $\square$

Определение. Отображение φ^μ будем называть μ-продолжением отображения φ.

Пусть $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — алгебры Вейля, заданные как фактор-алгебры алгебр срезанных многочленов $\mathbf{R}(N_1, q_1) = \mathbf{R}[u^1, \ldots, u^{N_1}; q_1]$ и $\mathbf{R}(N_2, q_2) = \mathbf{R}[s^1, \ldots, s^{N_2}; q_2]$ соответственно, а $\psi_1 : \mathbf{R}(N_1, q_1) \to \mathbf{A}_1$, $\psi_2 : \mathbf{R}(N_2, q_2) \to \mathbf{A}_2$ — соответствующие канонические эпиморфизмы. Рассмотрим алгебру срезанных многочленов $\mathbf{R}(N_1 + N_2, q_1 + q_2) = \mathbf{R}[t^1, \ldots, t^{N_1+N_2}; q_1 + q_2]$. Имеется канонический эпиморфизм $\varkappa : \mathbf{R}(N_1 + N_2, q_1 + q_2) \to \mathbf{R}(N_1, q_1) \otimes \mathbf{R}(N_2, q_2)$, определенный на элементах псевдобазиса $\{u^A\}$, $A = 1, \ldots, N_1 + N_2$, следующим образом: $t^A \mapsto u^A$ при $A \le N_1$, $t^A \mapsto s^{A-N_1}$ при $A > N_1$. Алгебру $\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2$ будем отождествлять с фактор-алгеброй алгебры $\mathbf{R}(N_1 + N_2, q_1 + q_2)$ посредством эпиморфизма

$$\psi_1 \otimes \psi_2 \circ \varkappa : \mathbf{R}(N_1 + N_2, q_1 + q_2) \to \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2.$$

Пусть, далее, $\mu_1 : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}_1$ и $\mu_2 : \mathbf{A}_2 \to \mathbf{B}_2$ — эпиморфизмы локальных алгебр Вейля, а $\lambda : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ и $\overline{\lambda} : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — гомоморфизмы локальных алгебр такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{\lambda} & \mathbf{A}_2 \\ {\scriptstyle \mu_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_2} \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{\overline{\lambda}} & \mathbf{B}_2. \end{array} \tag{18}$$

Из уравнений (7), (8) следует, что применение гомоморфизмов λ и $\overline{\lambda}$ к локальным координатам $\{X^i, Y^\alpha\}$ на расслоении $T^{\mu_1}M$ корректно определяет морфизм слоений $\Psi_M : T^{\mu_1}M \to T^{\mu_2}M$. Из уравнений (12), (13) затем следует, что морфизму слоений $\varphi : M \to M'$ соответствует коммутативная диаграмма морфизмов слоений

$$\begin{array}{ccc} T^{\mu_1}M & \xrightarrow{\Psi_M} & T^{\mu_2}M \\ {\scriptstyle T^{\mu_1}\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^{\mu_2}\varphi} \\ T^{\mu_1}M' & \xrightarrow{\Psi_{M'}} & T^{\mu_2}M'. \end{array}$$

Таким образом, коммутативная диаграмма (18) определяет естественное преобразование функторов $\Psi : T^{\mu_1} \to T^{\mu_2}$.

В частности, коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} & \xrightarrow{m_{\mathbf{A}}} & \mathbf{A} \\ {\scriptstyle \mu\otimes\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} & \xrightarrow{m_{\mathbf{B}}} & \mathbf{B}, \end{array}$$

где $m_{\mathbf{A}}$ и $m_{\mathbf{B}}$ — отображения, индуцируемые операциями умножения в алгебрах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно ($\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha\beta$), определяет естественное преобразование функторов $m : T^{\mu\otimes\mu} \to T^\mu$. Из уравнений (12), (13), записанных для эпиморфизмов μ и $\mu \otimes \mu$, вытекает следующее представление для μ-продолжения φ^μ морфизма слоений $\varphi : M \to T^\mu M'$.

Предложение 2. *Имеет место следующая коммутативная диаграмма*:

$$\begin{tikzcd} T^\mu M \arrow[r, "T^\mu\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^\mu"'] & T^{\mu\otimes\mu} M' \arrow[d, "m_{M'}"] \\ & T^\mu M'. \end{tikzcd}$$

3. Действие функтора T^μ на категории расслоенных векторных пространств

Введем категорию $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}od$. Объектами этой категории будем называть пары (L,K), состоящие из $\mathbf{A}$-модуля L и его подмодуля K таких, что K изоморфен $\mathbf{A}$-модулю $\mathbf{B}^m$ при некотором m, а фактор-модуль L/K изоморфен $\mathbf{A}$-модулю $\mathbf{A}^n$ при некотором n. При этом $\mathbf{A}$-модуль L изоморфен $\mathbf{A}$-модулю $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. Действительно, имеем короткую точную последовательность $\mathbf{A}$-линейных отображений

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} L/K \longrightarrow 0,$$

где i — вложение подмодуля, а p — канонический эпиморфизм на фактор-модуль. Выберем $\mathbf{A}$-базис $\{\overline{E}_i\}$, $i=1,2,\dots,n$, в L/K и пусть $\{E_i\}$, $i=1,2,\dots,n$, — произвольный набор элементов из L таких, что $p(E_i)=\overline{E}_i$. $\mathbf{A}$-линейная оболочка W набора $\{E_i\}$ изоморфна $L/K \cong \mathbf{A}^n$ и $L \cong W \oplus K \cong \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. Если $\{F_\alpha\}$, $\alpha=1,2,\dots,m$, — $\mathbf{B}$-базис в K, рассматриваемом как m-мерный $\mathbf{B}$-модуль, то всякий элемент $X \in L$ однозначно представляется в виде линейной комбинации

$$X = X^i E_i + Y^\alpha F_\alpha, \quad X^i \in \mathbf{A}, \quad Y^\alpha \in \mathbf{B}.$$

Соответствие $X \mapsto \{X^i; Y^\alpha\}$ и осуществляет изоморфизм $L \cong \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$.

Набор $\{E_i, F_\alpha\}$, $i=1,2,\dots,n$, $\alpha=1,2,\dots,m$, будем называть $(\mathbf{A},\mathbf{B})$-*базисом* в $\mathbf{A}$-модуле (L,K).

Морфизмом в категории $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}od$ из (L,K) в (L',K') будем называть $\mathbf{A}$-линейное отображение $\varphi: L \to L'$, удовлетворяющее условию $\varphi(K) \subset K'$. Морфизм φ индуцирует $\mathbf{A}$-линейное отображение $\overline{\varphi}: (L/K) \to L'/K'$. Морфизмы категории $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}od$ будем также называть *расслоенными* $\mathbf{A}$-линейными отображениями. Когда это не вызывает недоразумения, объекты (L,K) категории $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}od$ будем обозначать одним символом L и называть *расслоенными* $\mathbf{A}$-*модулями*.

Всякий $\mathbf{A}$-модуль $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$ будем рассматривать как объект категории $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}od$ по отношению к естественному вложению $\mathbf{B}^m \ni \{Y^\alpha\} \mapsto \{0; Y^\alpha\} \in \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. При этом $\mathbf{A}$-линейное отображение $\xi: \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m \to \mathbf{A}^{n'} \oplus \mathbf{B}^{m'}$ является расслоенным, если оно проектируется в $\mathbf{A}$-линейное отображение $\overline{\xi}: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^{n'}$, т. е. если существует $\mathbf{A}$-линейное отображение $\overline{\xi}$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathbf{A}^{n'} \oplus \mathbf{B}^{m'} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \\ \mathbf{A}^n \arrow[r, "\overline{\xi}"] & \mathbf{A}^{n'}. \end{tikzcd}$$

Аналогично категории $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}od$ расслоенных $\mathbf{A}$-модулей введем категорию $\mathbf{R}_f$-$\mathcal{V}ect$ расслоенных векторных пространств. Объектами этой категории будем называть пары (V,W), состоящие из конечномерного векторного пространства V и его подпространства W. Морфизмом в категории $\mathbf{R}_f$-$\mathcal{V}ect$ из (V,W) в (V',W') будем называть линейное отображение $\varphi: V \to V'$, удовлетворяющее условию $\varphi(W) \subset W'$. Морфизм φ индуцирует линейное отображение фактор-пространств $\overline{\varphi}: V/W \to V'/W'$. Морфизмы категории $\mathbf{R}_f$-$\mathcal{V}ect$ будем также называть *расслоенными* линейными отображениями. Объект (V,W) категории $\mathbf{R}_f$-$\mathcal{V}ect$ будем обозначать также как линейный эпиморфизм $p: V \to V/W$ и, когда это не вызывает недоразумений, одним символом V. Расслоенные векторные пространства можно рассматривать и как объекты категории $\mathcal{F}ol$.

Символом $\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m$ будем обозначать расслоенное векторное пространство $p : \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $\{x^i, y^\alpha\} \mapsto \{x^i\}$.

Пусть (V, W) — расслоенное векторное пространство. Базис $\{E_i, F_\alpha\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, в векторном пространстве V такой ,что набор $\{F_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, является базисом в W, а набор $\{E_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, проектируется в базис $\{\overline{E}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, пространства V/W, будем называть *адаптированным*. Отображение, относящее элементу из V его координаты относительно адаптированного базиса, является изоморфизмом (V, W) на $\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m$.

Пространство $\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0$ представляет собой множество вещественных чисел, расслоенное над самим собой. Пусть $a : \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0 \times \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0 \to \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0$ и $m : \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0 \times \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0 \to \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0$ — отображения, представляющие собой сложение и умножение вещественных чисел. Применяя к этим отображениям функтор T^μ и учитывая, что этот функтор сохраняет произведение, получим отображения $T^\mu a : T^\mu(\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0) \times T^\mu(\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0) \to T^\mu(\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0)$ и $T^\mu m : T^\mu(\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0) \times T^\mu(\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0) \to T^\mu(\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0)$.

Предложение 3. *Отображения $T^\mu a$ и $T^\mu m$ задают на $T^\mu(\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0)$ структуру локальной алгебры Вейля, изоморфной алгебре $\mathbf{A}$.*

Доказательство. Рассмотрим глобальную карту на $\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0$, определяемую тождественным отображением $h = \mathrm{id} : \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0 \to \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0$ и порождаемую ей $\mathbf{A}^1 \oplus \mathbf{B}^0$-карту h^μ. Поскольку $\mathbf{A}^1 \oplus \mathbf{B}^0 \equiv \mathbf{A}$, то h^μ представляет собой глобальную $\mathbf{A}$-карту $h^\mu : T^\mu \mathbf{R} \to \mathbf{A}$, задающую на $T^\mu(\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0)$ структуру одномерного $\mathbf{A}$-гладкого многообразия, $\mathbf{A}$-диффеоморфного регулярному $\mathbf{A}$-модулю $\mathbf{A}$. В координатах, определяемых картой h, отображения a и m имеют соответственно вид $a : \{x_1, x_2\} \mapsto x_1 + x_2$, $m : \{x_1, x_2\} \mapsto x_1 x_2$. В соответствии с формулой (12), μ-продолжения отображений a и m имеют вид $T^\mu a : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \ni \{X_1, X_2\} \mapsto X_1 + X_2 \in \mathbf{A}$ и $T^\mu m : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \ni \{X_1, X_2\} \mapsto X_1 X_2 \in \mathbf{A}$ и совпадают соответственно с операциями сложения и умножения в алгебре $\mathbf{A}$. $\square$

Аналогично предложению 3 из теоремы 2 и уравнений (3) следует

Предложение 4. *Пусть $a : \mathbf{R}^0 \oplus \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^0 \oplus \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^0 \oplus \mathbf{R}^1$ и $m : \mathbf{R}^0 \oplus \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^0 \oplus \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^0 \oplus \mathbf{R}^1$ — отображения, представляющие собой сложение и умножение вещественных чисел. Тогда отображения $T^\mu a$ и $T^\mu m$ задают на $T^\mu(\mathbf{R}^0 \oplus \mathbf{R}^1)$ структуру локальной алгебры Вейля, изоморфной алгебре $\mathbf{B}$.*

Пусть, далее, отображение $\ell : \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0 \times \mathbf{R}^0 \oplus \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^0 \oplus \mathbf{R}^1$ также представляет собой умножение вещественных чисел, $\ell : \{x \oplus 0, 0 \oplus y\} \to 0 \oplus xy$. Тогда отображение $T^\mu \ell$ задает на $T^\mu(\mathbf{R}^0 \oplus \mathbf{R}^1) \cong \mathbf{B}$ структуру модуля над алгеброй $T^\mu(\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0) \cong \mathbf{A}$.

В дальнейшем будем отождествлять алгебры $T^\mu(\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0)$ и $\mathbf{A}$, $T^\mu(\mathbf{R}^0 \oplus \mathbf{R}^1)$ и $\mathbf{B}$.

Пусть теперь (V, W) — расслоенное векторное пространство, $\dim V = n + m$, $\dim W = m$, и пусть $a : V \times V \to V$ и $m : \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0 \times V \to V$ — отображения, представляющие собой сложение векторов и умножение вещественного числа на вектор.

Предложение 5. *Отображения $T^\mu a$ и $T^\mu m$ задают на паре $(T^\mu V, T^\mu W)$ структуру расслоенного $\mathbf{A}$-модуля, изоморфного $\mathbf{A}$-модулю $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$.*

Пусть (V', W') — еще одно расслоенное векторное пространство, а $\varphi : V \to V'$ — расслоенное линейное отображение, тогда $T^\mu \varphi$ — расслоенное $\mathbf{A}$-линейное отображение, т. е. действие функтора T^μ на категории $\mathbf{R}_f$-$\mathcal{V}ect$ определяет функтор $T^\mu : \mathbf{R}_f$-$\mathcal{V}ect \to (\mathbf{A}, \mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}od$.

Доказательство. Выполнение аксиом $\mathbf{A}$-модуля для $T^\mu V$ с операциями $T^\mu a$ и $T^\mu m$ следует из выполнения соответствующих аксиом векторного пространства для V с операциями a и m. Например, применяя функтор T^μ к совпадающим отображениям $\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0 \times V \times V \ni (\lambda, x_1, x_2) \to \lambda(x_1 + x_2) \in V$ и $\mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^0 \times V \times V \ni (\lambda, x_1, x_2) \to \lambda x_1 + \lambda x_2 \in V$, получаем совпадающие отображения

$$\mathbf{A} \times T^\mu V \times T^\mu V \ni (\Lambda, X_1, X_2) \to \Lambda(X_1 + X_2) \in T^\mu V$$

и

$$\mathbf{A} \times T^\mu V \times T^\mu V \ni (\Lambda, X_1, X_2) \to \Lambda X_1 + \Lambda X_2 \in T^\mu V.$$

Рассмотрим теперь глобальную карту на $\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m$, определяемую тождественным отображением $h = \mathrm{id}$, и порождаемую ей глобальную $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$-карту h^μ на $T^\mu(\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m)$. Применяя функтор T^μ к операциям a и m, которые в данном случае имеют вид $a : \{x_1^i, y_1^\alpha; x_2^i, y_2^\alpha\} \mapsto \{x_1^i + x_2^i; y_1^\alpha + y_2^\alpha\}$, $m : \{\lambda; x^i, y^\alpha\} \mapsto \{\lambda x^i, \lambda y^\alpha\}$, и используя уравнения (12) и (13), получим, что μ-продолжения операций a и m имеют соответственно вид $T^\mu a : \{X_1^i, Y_1^\alpha; X_2^i, Y_2^\alpha\} \mapsto \{X_1^i + X_2^i; Y_1^\alpha + Y_2^\alpha\}$ и $T^\mu m : \{\Lambda; X^i, Y^\alpha\} \mapsto \{\Lambda X^i, \Lambda Y^\alpha\}$, т. е. на расслоении $T^\mu(\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m)$ индуцируется естественная структура $\mathbf{A}$-модуля, изоморфного $\mathbf{A}$-модулю $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. В дальнейшем $\mathbf{A}$-модуль $T^\mu(\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m)$ будем отождествлять с $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$.

Применяя функтор T^μ к расслоенному изоморфизму векторных пространств

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ V/W & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \mathbf{R}^n, \end{array} \tag{19}$$

получим изоморфизм расслоенных $\mathbf{A}$-модулей

$$\begin{array}{ccc} T^\mu V & \xrightarrow{T^\mu\varphi} & \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T^{\mathbf{A}}(V/W) & \xrightarrow{T^{\mathbf{A}}\overline{\varphi}} & \mathbf{A}^n. \end{array} \tag{20}$$

Аналогично диаграммам (19) и (20), следующие две диаграммы показывают, что функтор T^μ переводит расслоенное линейное отображение в расслоенное $\mathbf{A}$-линейное отображение

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ V/W & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & V'/W' \end{array} \quad \overset{T^\mu}{\longmapsto} \quad \begin{array}{ccc} T^\mu V & \xrightarrow{T^\mu\varphi} & T^\mu V' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ T^{\mathbf{A}}(V/W) & \xrightarrow{T^{\mathbf{A}}\overline{\varphi}} & T^{\mathbf{A}}(V'/W'). \end{array} \quad \square \tag{21}$$

Соответствие между диаграммами (21) представляет собой частный случай соответствия более общего вида, а именно, имеет место следующее предложение, доказательство которого аналогично доказательству предложения 5.

Предложение 6. *Расслоенное линейное отображение*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & T^\mu V' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ V/W & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & T^{\mathbf{A}}(V'/W') \end{array} \tag{22}$$

единственным образом продолжается до морфизма

$$\begin{array}{ccc} T^\mu V & \xrightarrow{\varphi^\mu} & T^\mu V' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ T^{\mathbf{A}}(V/W) & \xrightarrow{\overline{\varphi}^{\mathbf{A}}} & T^{\mathbf{A}}(V'/W') \end{array} \tag{23}$$

в категории $(\mathbf{A}, \mathbf{B})_f$*-*$\mathcal{M}od$.

В частности, в диаграммах (22) *и* (23) *в качестве расслоенного* $\mathbf{A}$*-модуля* $p' : T^\mu V' \to T^{\mathbf{A}}(V'/W')$ *можно взять* $\mathbf{A}$*-модуль* $p' : \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m \to \mathbf{A}^n$.

4. Продолжения слоеных геометрических объектов

Локально тривиальным расслоением в категории слоений $\mathcal{F}ol$ или *слоеным расслоением* будем называть локально тривиальное расслоение (E, M, F, p) такое, что тотальное пространство E, база M и стандартный слой F — слоеные гладкие многообразия, а проекция p и диффеоморфизмы тривиализации $p^{-1}(U) \to U \times F$ — изоморфизмы в категории слоений.

Вертикальным расслоением Вейля $V^\mu E$ будем называть подрасслоение в $T^\mu E$, состоящее из μ-скоростей ростков $f : (\mathbf{R}^N, 0) \to E$, образы которых лежат в слоях расслоения E. Таким образом, $V^\mu E = (T^\mu p)^{-1}(M)$. Естественные проекции $V^\mu E$ на E и на M обозначим соответственно следующим образом: $\pi_{v\mu} : V^\mu E \to E$ и $V^\mu p : V^\mu E \to M$. Расслоение $V^\mu E$ над M можно рассматривать также как обратный образ (pull-back) $i^{-1}(T^\mu E)$ расслоения $T^\mu E$ по отношению к каноническому вложению $i : M \to T^\mu M$. Слоение $\mathcal{F}^\mu$ многообразия $T^\mu E$ индуцирует слоение $\mathcal{F}^\mu_v$ на $V^\mu E$. Если $\{x^{i_1}, y^{\alpha_1}\}$ — локальные координаты на M, $\{x^{i_1}, x^{i_2}; y^{\alpha_1}, y^{\alpha_2}\}$ — локальные координаты на E, то на $T^\mu E$ и $V^\mu E$ индуцируются соответственно локальные координаты $\{X^{i_1}, X^{i_2}; Y^{\alpha_1}, Y^{\alpha_2}\}$ и $\{x^{i_1}, X^{i_2}; y^{\alpha_1}, Y^{\alpha_2}\}$. В локальных координатах слои слоения $\mathcal{F}^\mu_v$ имеют уравнения $x^{i_1} = x_0^{i_1}, X^{i_2} = X_0^{i_2}$.

Предложение 7. *Сечение $\sigma : M \to V^\mu E$, являющееся морфизмом слоений, единственным образом продолжается до $\mathbf{A}$-гладкого сечения $\sigma^\mu : T^\mu M \to T^\mu E$ в категории $(\mathbf{A}, \mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}an$.*

Доказательство. Если $E = M \times F$, то $V^\mu E \cong M \times T^\mu F$ и сечение $\sigma : M \to V^\mu E$, являющееся морфизмом слоений, однозначно определяется морфизмом слоений $\varphi = \mathrm{pr}_2 \circ \sigma : M \to T^\mu F$. По теореме 2 морфизм φ однозначно продолжается до слоеного $\mathbf{A}$-гладкого отображения $\varphi^\mu : T^\mu M \to T^\mu F$, которое определяет сечение $\sigma^\mu = \mathrm{id}_M \times \varphi^\mu : T^\mu M \to T^\mu M \times T^\mu F$. В случае локально тривиального расслоения утверждение следует из однозначной определенности продолжения сечения над областями тривиализации расслоения $E \to M$. $\square$

Предложение 8. *Пусть $\varphi : V^\mu E \to T^\mu M'$ — слоеное отображение, являющееся слоеным $\mathbf{A}$-гладким отображением на слоях расслоения $V^\mu E \to M$. Тогда существует единственное слоеное $\mathbf{A}$-гладкое отображение $\varphi^\mu : T^\mu E \to T^\mu M'$, ограничение которого на $V^\mu E$ совпадает с φ.*

Доказательство. Пусть $i : E \to V^\mu E$ — вложение, являющееся ограничением нулевого сечения $i : E \to T^\mu E$, тогда отображение $\psi = \varphi \circ i : E \to T^\mu M'$ является морфизмом слоений. По теореме 2 это отображение единственным образом продолжается до слоеного $\mathbf{A}$-гладкого отображения $\psi^\mu : T^\mu E \to T^\mu M'$. Из единственности продолжений ограничений отображения ψ на слои расслоения E (являющиеся также слоеными многообразиями) следует $\psi^\mu | V^\mu E = \varphi$. Таким образом, $\varphi^\mu = \psi^\mu$. $\square$

Пусть G^r_n обозначает группу Ли r-струй всех ростков диффеоморфизмов $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$, $G^r_{n,m}$ — группу Ли r-струй всех ростков изоморфизмов $(\mathbf{R}^{n+m}, 0) \to (\mathbf{R}^{n+m}, 0)$ стандартного слоения $\mathcal{F}^{(n)}$ коразмерности n на $\mathbf{R}^{n+m}$. Каноническая проекция $p : G^r_{n,m} \to G^r_n$ позволяет рассматривать группу Ли $G^r_{n,m}$ как слоеное многообразие. Для слоеного многообразия $(M, \mathcal{F})$ ($\dim M = n + m$, $\operatorname{codim} \mathcal{F} = n$) множество $B^r_{\mathrm{fol}} M$ r-струй всех ростков изоморфизмов слоений $f : (\mathbf{R}^{n+m}, 0) \to (M, x)$ несет на себе структуру главного расслоения над M со структурной группой $G^r_{n,m}$, называемого расслоением слоеных r-реперов многообразия $(M, \mathcal{F})$ [14]. В соответствии с определениями, многообразие $B^r_{\mathrm{fol}} M$ является открытым подмногообразием в $T^\nu M$, где $\nu : \mathbf{R}(n+m, r) \to \mathbf{R}(n, r)$ — канонический эпиморфизм. Естественная эквивалентность функторов $T^\mu \circ T^\nu$, $T^{\mu \otimes \nu}$ и $T^\nu \circ T^\mu$, которая является следствием естественных эквивалентностей функторов [10] $T^{\mathbf{A}_1} \circ T^{\mathbf{A}_2} \cong T^{\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2} \cong T^{\mathbf{A}_2} \circ T^{\mathbf{A}_1}$ и $T^{\mathbf{B}_1}_{\mathrm{tr}} \circ T^{\mathbf{B}_2}_{\mathrm{tr}} \cong T^{\mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2}_{\mathrm{tr}} \cong T^{\mathbf{B}_2}_{\mathrm{tr}} \circ T^{\mathbf{B}_1}_{\mathrm{tr}}$ (см. также [7]), влечет эквивалентность главных расслоений $T^\mu B^r_{\mathrm{fol}} M (T^\mu G^r_{n,m}, T^\mu M)$ и $B^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L}) T^\mu M (G^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L}), T^\mu M)$, где $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, $G^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})$ — группа Ли r-струй слоеных $\mathbf{A}$-гладких ростков $(\mathbf{L}, 0) \to (\mathbf{L}, 0)$, а $B^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L}) T^\mu M$ — расслоение слоеных $\mathbf{A}$-гладких r-реперов на $T^\mu M$, т. е. расслоение r-струй

слоеных $\mathbf{A}$-гладких ростков диффеоморфизмов $(\mathbf{L},0)\to T^\mu M$ [11]. Расслоение $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M$ естественно эквивалентно расслоению слоеных $\mathbf{A}$-линейных реперов на $T^\mu M$ [11].

Обратный образ $i^{-1}(B^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M)$ расслоения $B^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M$ по отношению к каноническому вложению $i : M \to T^\mu M$ (см. (9)) является главным расслоением над M со структурной группой $G^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})$. Это расслоение будем называть расслоением слоеных $\mathbf{A}$-гладких r-реперов на M, для его обозначения будем использовать символ $B^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M(G^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L}),M)$. Главное расслоение слоеных $\mathbf{A}$-гладких r-реперов на M можно также построить как присоединенное к расслоению $B^r_{\mathrm{fol}}M$ относительно действия $G^r_{n,m}$ на $G^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})$, определяемого естественным вложением $G^r_{n,m}\subset T^\mu G^r_{n,m}\cong G^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})$. Расслоение $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M$ будем называть также расслоением $\mathbf{A}$-линейных слоеных реперов на M.

Пусть, далее, $\rho : F \to \overline{F}$ — локально тривиальное расслоение, а $\alpha : G^r_{n,m}\times F\to F$ и $\overline{\alpha} : G^r_n\times\overline{F}\to\overline{F}$ — правые действия групп Ли такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G^r_{n,m}\times F & \xrightarrow{\alpha} & F \\ {\scriptstyle p\times\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ G^r_n\times\overline{F} & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & \overline{F}. \end{array} \tag{24}$$

Рассматривая диаграмму (24) как морфизм слоений, применим к ней функтор T^μ. В результате получим действие

$$G^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})\times T^\mu F\to T^\mu F. \tag{25}$$

Пусть $(E,M,G^r_{n,m},F)$ — расслоение, присоединенное к $B^r_{\mathrm{fol}}M$, соответствующее действию (24), а $(T^\mu E,T^\mu M,G^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L}),T^\mu F)$ — расслоение, присоединенное к $B^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M$, соответствующее действию (25). Вертикальное расслоение Вейля $V^\mu p : V^\mu E\to M$ несет на себе структуру расслоения $(V^\mu E,M,G^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L}),T^\mu F)$, присоединенного к главному расслоению $B^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M(G^r_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L}),M)$. Сечения $s : M\to E$ и $\sigma : M\to V^\mu E$ расслоений $p : E\to M$ и $V^\mu p : V^\mu E\to M$, являющиеся морфизмами слоений, будем называть полями *проектируемых слоеных геометрических объектов* на M типа F и $T^\mu F$ соответственно. Если $\sigma : M\to V^\mu E$ — поле проектируемого слоеного геометрического объекта типа $T^\mu F$ на M, то $s=\pi_{v\mu}\circ\sigma : M\to E$ — поле проектируемого слоеного геометрического объекта типа F.

Следствием теоремы 2, предложения 7 и предыдущих рассуждений является

Предложение 9. *Поле $\sigma : M\to V^\mu E$ проектируемого геометрического объекта типа $T^\mu F$ на M единственным образом продолжается до поля слоеного $\mathbf{A}$-гладкого в категории $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}ап$ геометрического объекта $\sigma^\mu : T^\mu M\to T^\mu E$ типа $T^\mu F$ на $T^\mu M$.*

Если образ отображения σ содержится в $E\subset V^\mu E$, то $\sigma^\mu = T^\mu\sigma$.

Поле геометрического объекта $T^\mu s : T^\mu M\to T^\mu E$, получающееся применением функтора T^μ к полю проектируемого слоеного геометрического объекта $s : M\to E$ типа F на слоеном многообразии M, естественно называть *полным лифтом* поля s с M на $T^\mu M$, а всякое поле слоеного $\mathbf{A}$-гладкого в категории $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f$-$\mathcal{M}ап$ геометрического объекта $\sigma^\mu : T^\mu M\to T^\mu E$ типа $T^\mu F$ на $T^\mu M$ такого, что $s=\pi_{v\mu}\circ\sigma$ (следуя [4], с. 161–162), — *синектическим расширением в смысле А.П. Широкова* полного лифта $T^\mu s$ поля объекта s.

4.1. Полный лифт проектируемого векторного поля. В локальных координатах в простой [12] по отношению к слоению $\mathcal{F}$ окрестности проектируемое векторное поле $v : M\to TM$ на многообразии $(M,\mathcal{F})$ имеет уравнения $v^i = v^i(x^j)$, $v^\alpha = v^\alpha(x^j,y^\beta)$. Применение к слоеному отображению функтора T^μ дает отображение $v^C = T^\mu v : T^\mu M\to T^\mu TM\cong TT^\mu M$, имеющее

локальные уравнения

$$V^i = v^i(x^j) + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p v^i(x^j)}{Dx^p} \overset{\circ}{X}{}^p, \tag{26}$$

$$V^\alpha = v^\alpha(x^j, y^\alpha) + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v} v^\alpha(x^j, y^\beta)}{Dx^u Dy^v} \overset{\circ}{X}{}^u \overset{\circ}{Y}{}^v. \tag{27}$$

Синектические расширения полного лифта $T^\mu v$ имеют в локальных координатах аналогичный вид (26), (27), где $\mathbf{R}$-значные функции $v^i(x^j)$ заменяются на $\mathbf{A}$-значные функции $v^i(x^j) + \overset{\circ}{v}{}^i(x^j)$, а $\mathbf{R}$-значные функции $v^\alpha(x^j, y^\beta)$ заменяются на $\mathbf{B}$-значные функции $v^\alpha(x^j, y^\beta) + \overset{\circ}{v}{}^\alpha(x^j, y^\beta)$.

Полный лифт проектируемого векторного поля обладает следующими легко проверяемыми свойствами.

Если f — проектируемая функция на M, то $(fv)^C = f^{\mathbf{A}} v^C$, где $f^{\mathbf{A}}$ — $\mathbf{A}$-лифт функции f.

Если f — произвольная функция на M, а w — векторное поле, касательное к слоям слоения $\mathcal{F}$, то $(fw)^C = f^{\mathbf{B}} w^C$, где $f^{\mathbf{B}}$ — $\mathbf{B}$-лифт функции f.

4.2. Продолжения A-линейных связностей. Обозначим символами $\mathfrak{g}^1_n$, $\mathfrak{g}^1_{n,m}$ и $\mathfrak{g}^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})$ алгебры Ли групп Ли G^1_n, $G^1_{n,m}$ и $G^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})$ соответственно. Алгебра Ли $\mathfrak{g}^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})$ естественно изоморфна алгебре Ли $T^\mu \mathfrak{g}^1_{n,m}$.

Связность в расслоении $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M$ слоеных $\mathbf{A}$-линейных реперов на M будем называть *слоеной $\mathbf{A}$-линейной связностью* на M, если ее форма связности

$$\omega : TB^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M \to \mathfrak{g}^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L}) \tag{28}$$

представляет собой морфизм слоений. Связность в расслоении $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M$ называется слоеной $\mathbf{A}$-гладкой ($\mathbf{A}$-линейной) связностью на $T^\mu M$ [11], если ее форма связности

$$\omega^\mu : TB^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M \to \mathfrak{g}^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L}) \tag{29}$$

представляет собой слоеное $\mathbf{A}$-гладкое отображение.

Расслоение $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M \to M$ является обратным образом расслоения $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M \to T^\mu M$ по отношению к вложению $i : M \to T^\mu M$, а расслоение $V^\mu B^1_{\mathrm{fol}} M \to M$ является обратным образом расслоения $T^\mu B^1_{\mathrm{fol}} M \to T^\mu M$ по отношению к этому же вложению $i : M \to T^\mu M$. Естественная эквивалентность расслоений $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M \to T^\mu M$ и $T^\mu B^1_{\mathrm{fol}} M \to T^\mu M$ влечет естественную эквивалентность расслоений $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M \to M$ и $V^\mu B^1_{\mathrm{fol}} M \to M$. Локальные координаты $\{x^i, y^\alpha\}$ на многообразии M индуцируют локальные координаты $\{x^i, y^\alpha; X^i_j, Y^\alpha_j, Y^\alpha_\beta\}$ на расслоениях $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M$ и $V^\mu B^1_{\mathrm{fol}} M$, по отношению к которым указанная естественная эквивалентность определяется соответствием точек с одинаковыми координатами. Для слоеного расслоения $p : E \to M$ расслоение $TV^\mu E \to TM$ является обратным образом расслоения $TT^\mu E \to TT^\mu M$ относительно касательного отображения $Ti : TM \to TT^\mu M$ к каноническому вложению (9), а расслоение $V^\mu TE \to TM$ является обратным образом расслоения $T^\mu TE \to T^\mu TM$ относительно отображения $i : TM \to T^\mu TM$, являющегося каноническим вложением вида (9) для слоеного многообразия TM. Естественная эквивалентность слоеных расслоений $TT^\mu E \to TT^\mu M$ и $T^\mu TE \to T^\mu TM$ влечет естественную эквивалентность расслоений $TV^\mu E \to TM$ и $V^\mu TE \to T^\mu TM$. Учитывая указанные естественные эквивалентности и естественный изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g}^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L}) \cong T^\mu \mathfrak{g}^1_{n,m}$, форму связности (28) можно рассматривать как форму на расслоении $V^\mu B^1_{\mathrm{fol}} M$, т. е. как отображение

$$\omega : TV^\mu B^1_{\mathrm{fol}} M \to T^\mu \mathfrak{g}^1_{n,m}. \tag{30}$$

По предложению 8 отображение (30) единственным образом продолжается до слоеного $\mathbf{A}$-гладкого отображения

$$\omega^\mu : TT^\mu B^1_{\mathrm{fol}} M \to T^\mu \mathfrak{g}^1_{n,m},$$

эквивалентного слоеному **A**-гладкому отображению

$$\omega^\mu : TB^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M \to \mathfrak{g}^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L}),$$

представляющему собой форму связности (29) слоеной **A**-гладкой **A**-линейной связности на расслоении $T^\mu M$.

Таким образом, имеет место

Предложение 10. *Слоеная* **A**-*линейная связность на слоеном многообразии M единственным образом продолжается до слоеной* **A**-*гладкой* **A**-*линейной связности на $T^\mu M$.*

Рассмотрим главное расслоение $B^1_{\mathrm{tr}}M$ трансверсальных реперов на слоеном многообразии M ([12], с. 44). Слоеный **A**-гладкий росток диффеоморфизма $F : (\mathbf{L}, 0) \to T^\mu M$ проектируется в росток $f : (\mathbf{R}^n, 0) \to M$ ранга n, трансверсальный к слоению $\mathcal{F}$ на M. Соответствие $j^1F \mapsto j^1_{\mathrm{tr}}f$ определяет канонический эпиморфизм главных расслоений $\varkappa : B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M \to B^1_{\mathrm{tr}}M$. В локальных координатах $\{x^i, y^\alpha; X^i_j, Y^\alpha_j, Y^\alpha_\beta\}$ на $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M$ и $\{x^i, y^\alpha; x^i_j\}$ на $B^1_{\mathrm{tr}}M$, индуцируемых локальными координатами $\{x^i, y^\alpha\}$ на многообразии M, отображение $\varkappa$ имеет вид $\{x^i, y^\alpha; X^i_j, Y^\alpha_j, Y^\alpha_\beta\} \mapsto \{x^i, y^\alpha; x^i_j\}$, где $X^i_j = x^i_j + \overset{\circ}{X}{}^i_j$ — разложение в соответствии с (1).

При эпиморфизме $\varkappa$ слоеная **A**-линейная связность с формой связности (28) индуцирует проектируемую ([12], с. 57) (слоеную) связность в расслоении $B^1_{\mathrm{tr}}M$ с формой связности $\omega_{\mathrm{tr}} : B^1_{\mathrm{tr}}M \to \mathfrak{g}^1_n$, значение которой в точке $\varkappa(X)$ на векторе $T\varkappa(v_X)$ совпадает с $\mathfrak{g}^1_n$-компонентой значения формы ω в точке X. Если задана проектируемая связность в расслоении $B^1_{\mathrm{tr}}M$ с формой связности $\omega_{\mathrm{tr}} : B^1_{\mathrm{tr}}M \to \mathfrak{g}^1_n$, то локально, над простой координатной окрестностью $U_A \subset M$, можно определить форму слоеной **A**-линейной связности $\omega : B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})U_A \to \mathfrak{g}^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})$, которая при эпиморфизме $\varkappa$ проектируется в форму ω_{tr}. Разбиение единицы $\{f_A\}$ на M, подчиненное покрытию $\{U_A\}$, индуцирует разбиение единицы $\{f'_A = f_A \circ \pi\}$, где $\pi : B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M \to M$ — проекция расслоения на базу. С помощью разбиения единицы $\{f'_A\}$ формы ω_A склеиваются в форму ω слоеной связности в расслоении $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M$. Продолжение ω^μ связности ω является слоеной **A**-гладкой **A**-линейной связностью в расслоении $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M$ слоеных **A**-линейных реперов на $T^\mu M$.

Поскольку проектируемая связность в расслоении $B^1_{\mathrm{tr}}M$ существует тогда и только тогда, когда обращается в нуль класс Атьи $A(M, \mathcal{F})$ слоеного многообразия M в d_F-когомологиях $H^{1,1}_{\mathrm{adj}\,F}(B^1_{\mathrm{tr}}M, \mathfrak{g}^1_n)$ ([12], с. 60), а всякая слоеная **A**-гладкая связность в расслоении $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M$ определяет слоеную связность в расслоении $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})M$ слоеных **A**-линейных реперов, то имеет место

Теорема 3. *Слоеная* **A**-*гладкая* **A**-*линейная связность в расслоении $B^1_{\mathrm{fol}}(\mathbf{L})T^\mu M$ существует тогда и только тогда, когда $A(M, \mathcal{F}) = 0$.*

Литература

1. Morimoto A. *Prolongation of connections to bundles of infinitely near points* // J. Different. Geom. – 1976. – V. 11. – № 4. – P. 479–498.
2. Широков А.П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1981. – Т. 12. – С. 61–95.
3. Study E. *Geometrie der Dynamen.* – Leipzig, 1902. – 603 S.
4. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1984. – 264 с.
5. Султанов А.Я. *Продолжения тензорных полей и связностей на расслоения Вейля* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 81–90.
6. Mikulski W.M. *Product preserving bundle functors on fibered manifolds* // Archiv. Math. – 1996. – V. 32. – P. 307–316.
7. Tomáš J.V. *Natural operators transforming projectable vector fields to product preserving bundles* // Rendiconti circ. mat. Palermo. Ser. II. – 1999. – V. 59. – P. 181–187.

8. Вишневский В.В., Пантелеева Т.А. *Голоморфные продолжения объектов в полукасательное расслоение второго порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 9. – С. 3–10.
9. Вишневский В.В. *Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. Современ. матем. и ее прилож. Тематические обзоры. – М.: ВИНИТИ. – 2002. – Т. 73. – С. 5–64.
10. Kolář I., Michor P.W., Slovák J. *Natural operations in differential geometry.* – Springer, 1993. – 434 p.
11. Shurygin V.V., Smolyakova L.B. *An analog of the Vaisman–Molino cohomology for manifolds modelled on some types of modules over Weil algebras and its application* // Lobachevskii J. of Math. – 2001. – V. 9. – P. 55–75.
12. Molino P. *Riemannian foliations.* – Birkhäuser, 1988. – 339 p.
13. Шурыгин В.В. *О строении полных многообразий над алгебрами Вейля* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 11. – С. 88–97.
14. Шурыгин В.В. *Применение теории многообразий над алгебрами в трансверсальной геометрии слоений* // Памяти Лобачевского посвящается. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1992. – Вып. 2. – С. 119–140.

Казанский государственный университет

Поступила 29.01.2007