ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (431)

УДК 514.763

А.В. АМИНОВА, Д.А. КАЛИНИН

H-ПРОЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

1. В 1925 г. П.А. Широков [1] исследовал класс псевдоримановых многообразий, допускающих невырожденное ковариантно постоянное тензорное поле J, удовлетворяющее условиям

$$J_{js}J_k^s = g_{jk}, \quad J_k^s = J_{kl}\, g^{ls}, \quad J_{kl} = -J_{lk}.$$

Эти многообразия, названные П.А.Широковым A-пространствами, были позже заново открыты Э. Келером [2] и стали называться "келеровыми многообразиями". Методы геометрии келеровых многообразий нашли широкое применение в различных областях математики и современной теоретической физики: в общей теории относительности, теории суперструн и нелинейных суперсимметричных сигма-моделей, квантовой теории и т.д. (см., напр., [3]–[6]).

В 1954 г. Оцуки и Тасиро [7] ввели понятие об H-проективном отображении келерова многообразия, которое является обобщением понятия проективного, или геодезического отображения псевдориманова многообразия (см. [8], [9]). Известно, что проблема исследования динамических систем второго порядка с нулевыми внешними силами, имеющих общие траектории, сводится к задаче определения аффинно-связных и псевдоримановых многообразий, допускающих геодезические отображения. Подобно этому, исследование H-проективных отображений келеровых многообразий тесно связано с проблемой траекторной эквивалентности динамических систем второго порядка с ненулевыми внешними силами.

В данной работе определяются все неэйнштейновы четырехмерные келеровы многообразия M, допускающие H-проективные отображения.

В п. 2 приводятся необходимые сведения о почти комплексных многообразиях. В п. 3 доказывается существование инфинитезимальной изометрии в любом келеровом многообразии, допускающем неаффинное H-проективное отображение. Следующий раздел (п. 4) посвящен изучению неэйнштейновых четырехмерных келеровых многообразий, допускающих H-проективные отображения. Теорема 2 определяет метрики всех таких многообразий, названных нами обобщенно эквидистантными. В п. 5 показано, что четырехмерное келерово многообразие допускает инфинитезимальное H-проективное преобразование, только если оно обобщенно эквидистантно.

2. Напомним, что $2n$-мерное[1] вещественное многообразие[2] называется *почти комплексным*, если на нем задана почти комплексная структура J, т. е. дифференцируемое поле линейных операторов $J_p : T_pM \to T_pM$ таких, что $J_p^2 = -\operatorname{id}|_{T_pM}$ для всех точек $p \in M$.

Кручение почти комплексной структуры J на M есть тензорное поле N типа (1,2), определенное равенством

$$N(X,Y) = 2([JX, JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y]),$$

[1]Во всех рассматриваемых в статье случаях предполагается, что $n > 1$.

[2]Под вещественным многообразием, отображением и тензорным полем понимаются далее C^∞-многообразие, C^∞-отображение и бесконечно дифференцируемое тензорное поле.

где $X, Y \in TM$. Если кручение N тождественно равно нулю, то J называется *комплексной структурой*, а почти комплексное многообразие M с комплексной структурой J называется *интегрируемым*.

Пусть M — интегрируемое почти комплексное многообразие с комплексной структурой J. Согласно теореме Ньюлендера и Ниренберга [10] существует единственное комплексное многообразие M^c, совпадающее с M как топологическое пространство, комплексно аналитическая структура которого индуцирует на M комплексную структуру J и структуру дифференцируемого многообразия. Расслоение TM^c $\mathbf{C}$-линейно изоморфно расслоению TM со структурой комплексного расслоения, индуцированной операторами J_p, так что существует канонический $\mathbf{C}$-линейный изоморфизм расслоений

$$TM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong TM^c \oplus \overline{TM^c}, \tag{1}$$

где $TM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ — комплексификация касательного расслоения TM.

Пусть (U, z^α), $z^\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha = 1, \dots, n$, — комплексная координатная система в области $U \subset M^c$. Если M — соответствующее M^c интегрируемое почти комплексное многообразие, то будем говорить, что $(U, z^\alpha, \overline{z^\alpha})$, $\alpha = 1, \dots, n$, является комплексной картой на M. Ввиду изоморфизма (1) векторные поля $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial z^\alpha$, $\partial_{\overline{\alpha}} \equiv \partial/\partial \overline{z^\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n$, определяют базис в $TM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Любое вещественное тензорное поле T на M может быть однозначно продолжено до гладкого поля элементов тензорных алгебр

$$\widetilde{\mathbf{T}}_p M \equiv \bigoplus_{k_i=1}^{\infty} ((T_p M^c)^{\otimes k_1} \otimes (\overline{T_p M^c})^{\otimes k_2} \otimes (T_p^* M^c)^{\otimes k_3} \otimes (\overline{T_p^* M^c})^{\otimes k_4}),$$

которое также будем называть тензорным полем и обозначать T [11], [12]. Его разложение по базису $(\partial_\alpha,\, \partial_{\overline{\alpha}})_{\alpha=1,\dots,n}$ имеет вид

$$T = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dz^{j_1} \otimes \dots \otimes dz^{j_s}, \quad T^{\overline{i_1} \dots \overline{i_r}}_{\overline{j_1} \dots \overline{j_s}} = \overline{T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}},$$

где латинские индексы $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, 2n$ пробегают множество значений надчеркнутых $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \dots)$ и ненадчеркнутых $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ греческих индексов, меняющихся от 1 до n. Функции $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ называются компонентами тензорного поля T в координатах $(z^\alpha, \overline{z^\alpha})$.

В частности, комплексная структура J может быть однозначно продолжена до $\mathbf{C}$-линейного эндоморфизма в $TM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Действие комплексной структуры J на элементы координатного базиса $(\partial_\alpha,\, \partial_{\overline{\alpha}})$, $\alpha = 1, \dots, n$, определяется равенствами $J\partial_\alpha = i\partial_\alpha$, $J\partial_{\overline{\alpha}} = -i\partial_{\overline{\alpha}}$.

Назовем преобразование координат вида $z'^\alpha = w^\alpha(z)$, $z'^{\overline{\alpha}} = \overline{w^\alpha(z)}$, где $w^\alpha(z)$ — комплексно аналитические функции, *голоморфным*. Пусть $X = \xi^i \partial_i$, $\xi^{\overline{\mu}} = \overline{\xi^\mu}$ — вещественное векторное поле на M. X называется *голоморфным векторным полем*, если $L_X J = 0$, где L_X — производная Ли вдоль X. Это условие в комплексной карте $(U, z^\alpha, z^{\overline{\alpha}})_{\alpha=1,\dots,n}$ приводится к равенствам $\partial_{\overline{\nu}} \xi^\mu = \partial_\nu \xi^{\overline{\mu}} = 0$, $\mu, \nu = 1, \dots, n$. Используя голоморфные преобразования координат в окрестности регулярной точки, любое голоморфное векторное поле можно привести к виду $X = \partial_1 + \partial_{\overline{1}}$ [12], [13].

Интегрируемое почти комплексное многообразие M называется *келеровым*, если на нем задана псевдориманова метрика g, удовлетворяющая условиям [9], [11], [12]

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \nabla J = 0 \quad (X, Y \in TM), \tag{2}$$

где ∇ — связность Леви-Чивита метрики g. Билинейная форма ω, определенная равенством

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y), \tag{3}$$

называется *фундаментальной формой* келерова многообразия M. Из (2), (3) и условия $J_p^2 = -\operatorname{id}|_{T_p M}$ следует, что ω является замкнутой дифференциальной формой: $d\omega = 0$.

Пусть $(U,z,\overline{z})$ — комплексная карта на M и ∂_α, $\partial_{\overline{\alpha}}$, $\alpha=1,\dots,n,$ — координатные векторные поля. Компоненты келеровой метрики g, комплексной структуры J и фундаментальной формы ω в этой карте определяются соотношениями

$$g_{\alpha\overline{\beta}}=\overline{g_{\overline{\alpha}\beta}},\quad g_{\alpha\beta}=g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}=0,\quad g^{\alpha\overline{\beta}}=\overline{g^{\overline{\alpha}\beta}},\quad g^{\alpha\beta}=g\overline{\alpha}\overline{\beta}=0, \tag{4}$$

$$J^\alpha_\beta=-J^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}=i\delta^\alpha_\beta,\quad J^{\alpha}_{\overline{\beta}}=J^{\overline{\alpha}}_{\beta}=0, \tag{5}$$

$$\omega_{\alpha\overline{\beta}}=-ig_{\alpha\overline{\beta}},\quad \omega_{\overline{\alpha}\beta}=-\overline{\omega_{\alpha\overline{\beta}}},\quad \omega_{\alpha\beta}=\omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}, \tag{6}$$

а условие $d\omega=0$ замкнутости фундаментальной формы ω выражается равенствами

$$\partial_\alpha g_{\beta\overline{\gamma}}=\partial_\beta g_{\alpha\overline{\gamma}},\quad \partial_{\overline{\alpha}} g_{\overline{\beta}\gamma}=\partial_{\overline{\beta}} g_{\overline{\alpha}\gamma}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что существует вещественнозначная функция Φ на $U\subset M$, определенная в координатах z^α, $z^{\overline{\alpha}}$ условием

$$g_{\alpha\overline{\beta}}=\partial_\alpha\partial_{\overline{\beta}}\Phi. \tag{8}$$

Эта функция, называемая *келеровым потенциалом* метрики g, определена с точностью до преобразований вида

$$\Phi'=\Phi+f(z)+\overline{f(z)}, \tag{9}$$

где $f(z)$ — произвольная голоморфная функция. Будем называть такие преобразования *калибровочными.*

Из (4)–(8) следует, что неравные тождественно нулю символы Кристоффеля метрики g имеют вид

$$\Gamma^\alpha_{\beta\nu}=\overline{\Gamma^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}\overline{\nu}}}=g^{\alpha\overline{\mu}}\partial_\beta g_{\overline{\mu}\nu}, \tag{10}$$

а ненулевые компоненты тензора кривизны и тензора Риччи определяются соотношениями

$$R^\alpha_{\beta\mu\overline{\nu}}=\overline{R^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}\overline{\mu}\nu}}=-R^\alpha_{\beta\overline{\nu}\mu}=-\overline{R^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}\nu\overline{\mu}}}=-\partial_{\overline{\nu}}\Gamma^\alpha_{\beta\mu}, \tag{11}$$

$$R_{\alpha\overline{\beta}}=\partial_\alpha\partial_{\overline{\beta}}\ln(\det(g_{\mu\overline{\nu}})),\quad R_{\alpha\overline{\beta}}=\overline{R_{\overline{\alpha}\beta}}. \tag{12}$$

3. Гладкая кривая $\gamma:[0,1]\to M:t\mapsto x_t$ на келеровом многообразии M вещественной размерности $2n>2$ называется H-планарной, если ее касательный вектор $\chi\equiv dx/dt$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\chi\chi=a(t)\chi+b(t)J(\chi),$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — гладкие функции параметра t.

Пусть M, M' — два келеровых многообразия с метриками g, g' и комплексными структурами J, J' соответственно. Диффеоморфизм $f:M\to M'$ называется голоморфно-проективным, или, короче, H-проективным отображением, если для любой H-планарной кривой γ в M кривая $f\circ\gamma$ является H-планарной кривой в M'. H-проективное отображение переводит комплексную структуру J в комплексную структуру J', т. е.

$$f_*\circ J=J'\circ f_*, \tag{13}$$

где f_* — дифференциал отображения f [13]. Благодаря этому можно выбрать комплексные карты в M и M' так, чтобы соответствующие точки $p\in M$ и $p'=f(p)\in M'$ имели одинаковые координаты, а компоненты комплексных структур J, J' совпадали и имели вид (5). Такие комплексные системы координат в M и M' будем называть *соответственными.* Аналогично можно определить вещественные соответственные координаты.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы f было H-проективным отображением, в соответственных координатах выражается уравнением [9]

$$\Gamma'^i_{jk}-\Gamma^i_{jk}=2\delta^i_{(j}\psi_{,k)}-2\psi_{,l}J^l_{(j}J^i_{k)}, \tag{14}$$

где ψ есть вещественнозначная функция, Γ'^i_{jk}, Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля метрик g и g' соответственно, $\psi_i = \psi_{,i} \equiv \partial_i\psi$, а запятая означает ковариантную производную относительно метрики g. Если, в частности, $\psi_k = 0$, т. е. функция ψ постоянна, то H-проективное отображение сохраняет связность и называется *аффинным* отображением. В дальнейшем будем рассматривать только неаффинные H-проективные отображения. Уравнение (14) можно записать в виде [14]

$$\begin{aligned}\nabla g'(Y,Z,W) = 2g'(Y,Z)W\psi + g'(Z,W)Y\psi + g'(Y,W)Z\psi -\\ - (JY)(\psi)g'(Z,JW) - (JZ)(\psi)g'(Y,JW) \quad (Y,Z,W \in TM).\end{aligned} \tag{15}$$

Полагая здесь $Y = \partial_\alpha$, $Z = \partial_{\overline{\beta}}$, $W = \partial_\gamma$, с помощью (4), (5) получим

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\overline{\beta},\gamma} &= 2g'_{\alpha\overline{\beta}}\psi_\gamma + 2g'_{\gamma\overline{\beta}}\psi_\alpha, \quad g'_{\alpha\beta,\gamma} = g'_{\alpha\beta,\overline{\gamma}} = 0,\\ g'_{\alpha\overline{\beta},\overline{\gamma}} &= 2g'_{\alpha\overline{\beta}}\psi_{\overline{\gamma}} + 2g'_{\alpha\overline{\gamma}}\psi_{\overline{\beta}}, \quad g'_{\overline{\alpha\beta},\gamma} = g'_{\overline{\alpha\beta},\overline{\gamma}} = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

Используя Г-преобразование Н.С. Синюкова [9]

$$a_{\alpha\overline{\beta}} = \overline{a_{\overline{\alpha}\beta}} = e^{2\psi}g'^{\lambda\overline{\mu}}g_{\alpha\overline{\mu}}g_{\lambda\overline{\beta}}, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\overline{\alpha\beta}} = 0, \quad g^{\alpha\overline{\beta}} = e^{-2\psi}a^{\alpha\overline{\beta}}, \tag{17}$$

где

$$a^{\alpha\overline{\beta}} = a_{\mu\overline{\lambda}}g^{\alpha\overline{\lambda}}g^{\mu\overline{\beta}}, \quad (g'^{\alpha\overline{\beta}}) = (g'_{\alpha\overline{\beta}})^{-1},$$

можно записать уравнения (16) в виде

$$a_{\alpha\overline{\beta},\gamma} = \lambda_\alpha g_{\gamma\overline{\beta}}, \quad a_{\alpha\overline{\beta},\overline{\gamma}} = \lambda_{\overline{\beta}}g_{\gamma\overline{\alpha}}, \tag{18}$$

где

$$\lambda_\alpha = \overline{\lambda_{\overline{\alpha}}} = -2\psi_\nu e^{2\psi}g'^{\nu\overline{\mu}}g_{\alpha\overline{\mu}}.$$

Свертывая (18) с $g^{\alpha\overline{\beta}}$, получим

$$\lambda_\gamma = \frac{1}{2}\partial_\gamma(g^{ij}a_{ij}) = \partial_\gamma(a_{\alpha\overline{\beta}}g^{\alpha\overline{\beta}}), \quad \lambda_{\overline{\gamma}} = \frac{1}{2}\partial_{\overline{\gamma}}(g^{ij}a_{ij}) = \partial_{\overline{\gamma}}(a_{\alpha\overline{\beta}}g^{\alpha\overline{\beta}}) = \lambda_{\overline{\gamma}}. \tag{19}$$

Отсюда следует, что λ_i является градиентом, т. е. существует функция λ такая, что $\lambda_i dz^i = d\lambda$ и $\lambda_i = \lambda_{,i}$. Если эта функция постоянна, то $d\lambda = \lambda_k = \psi_k = 0$, и H-проективное отображение является аффинным.

Пользуясь тождеством Риччи, запишем первую серию условий интегрируемости уравнений (18)

$$2a_{kl,[ij]} = a_{sl}R^s_{kij} + a_{ks}R^s_{lij}. \tag{20}$$

При $(ijkl) = (\gamma\overline{\nu}\alpha\overline{\beta}), (\gamma\nu\alpha\overline{\beta})$ с помощью (11) отсюда получим

$$a_{\mu\overline{\beta}}R^\mu_{\alpha\gamma\overline{\nu}} + a_{\alpha\overline{\mu}}R^{\overline{\mu}}_{\overline{\beta}\gamma\overline{\nu}} = g_{\gamma\overline{\beta}}\lambda_{\alpha,\overline{\nu}} - g_{\alpha\overline{\nu}}\lambda_{\overline{\beta},\gamma}, \tag{21}$$

$$g_{\gamma\overline{\beta}}\lambda_{\alpha,\nu} - g_{\nu\overline{\beta}}\lambda_{\alpha,\gamma} = 0. \tag{22}$$

Остальные условия интегрируемости получаются из (21), (22) комплексным сопряжением либо сводятся к тождествам. Свертывая (21) с $g^{\alpha\overline{\nu}}$ и учитывая, что $R^\alpha_{\beta\gamma\overline{\nu}}g^{\beta\overline{\nu}} = -R^\alpha_\gamma$, найдем

$$-a_{\mu\overline{\beta}}R^\mu_\gamma + a_{\alpha\overline{\mu}}R^{\overline{\mu}}_{\overline{\beta}\gamma}{}^{\alpha} = g_{\gamma\overline{\beta}}g^{\alpha\overline{\nu}}\lambda_{\alpha,\overline{\nu}} - n\lambda_{\overline{\beta},\gamma}.$$

Вычитая отсюда комплексно сопряженное уравнение, в котором индекс β заменен на γ, с учетом (19) и тождества $a_{\alpha\overline{\mu}}R^{\overline{\mu}}_{\overline{\beta}\gamma}{}^{\alpha} = a_{\alpha\overline{\mu}}R^{\alpha}_{\gamma\overline{\beta}}{}^{\overline{\mu}}$, вытекающего из (11) благодаря вещественности и симметричности тензорного поля a, будем иметь $a_{\mu\overline{\beta}}R^\mu_\gamma - a_{\gamma\overline{\mu}}R^{\overline{\mu}}_{\overline{\beta}} = 0$. Отсюда, свертывая с $g^{\overline{\beta}\nu}$, получим

$$a^\nu_\mu R^\mu_\gamma - a^\mu_\gamma R^\nu_\mu = 0. \tag{23}$$

Заметим, что $a^{\overline{\alpha}}_{\beta} = a^{\alpha}_{\overline{\beta}} = 0$ ввиду (4) и (18). Свертывая (22) с $g^{\gamma\overline{\beta}}$, найдем $(n-1)\lambda_{\alpha,\nu} = 0$, т.е. $\lambda_{\alpha,\nu} = 0$ и $\lambda^{\alpha}_{,\overline{\nu}} = 0$, или ввиду равенств $\Gamma^{\alpha}_{\overline{\nu}i} = 0$

$$\partial_{\overline{\nu}}\lambda^{\alpha} = 0, \quad \partial_{\nu}\lambda^{\overline{\alpha}} = 0. \tag{24}$$

Следовательно, $\Lambda = \lambda^i\partial_i$ является голоморфным векторным полем, обладающим свойством $L_\Lambda J = 0$ (см. п. 2). Голоморфными преобразованиями координат это векторное поле может быть приведено к виду

$$\Lambda = \partial_1 + \partial_{\overline{1}}, \quad \lambda^{\alpha} = \delta^{\alpha}_1, \quad \lambda^{\overline{\alpha}} = \delta^{\alpha}_1. \tag{25}$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть f есть неаффинное H-проективное отображение келерова многообразия (M, g) на келерово многообразие (M', g'). Пусть $d\lambda = \lambda_\alpha dz^\alpha + \lambda_{\overline{\alpha}} dz^{\overline{\alpha}}$ есть точная 1-форма, определенная уравнениями* (16)–(19). *Тогда вещественное векторное поле $J\Lambda = i\lambda^\alpha\partial_\alpha - i\lambda^{\overline{\alpha}}\partial_{\overline{\alpha}}$ является инфинитезимальной изометрией многообразия M, т. е. удовлетворяет уравнению Киллинга $L_{J\Lambda}g = 0$.*

Доказательство. Используя (10), (19) и (24), найдем

$$-i\lambda_{\overline{\beta},\alpha} + i\lambda_{\alpha,\overline{\beta}} = -i\partial_\alpha\partial_{\overline{\beta}}(a_{\nu\overline{\mu}}g^{\nu\overline{\mu}}) + i\partial_{\overline{\beta}}\partial_\alpha(a_{\nu\overline{\mu}}g^{\nu\overline{\mu}}) = 0,$$
$$i\lambda_{\beta,\alpha} + i\lambda_{\alpha,\beta} = 0, \quad -i\lambda_{\overline{\beta},\overline{\alpha}} - i\lambda_{\overline{\alpha},\overline{\beta}} = 0,$$

или

$$L_\mu g_{ij} \equiv \mu_{i,j} + \mu_{j,i} = 0, \quad \mu = J\Lambda, \tag{26}$$

где $\mu_i = g_{il}\mu^l$. Так как Λ и, следовательно, μ не равны нулю в силу неаффинности отображения f и $\mu^i\partial_i = J\Lambda$, то $J\Lambda$ является инфинитезимальной изометрией. □

Если Λ приведено к виду (25), то уравнения Киллинга сводятся к условиям

$$(\partial_1 - \partial_{\overline{1}})g_{\alpha\overline{\beta}} = 0. \tag{27}$$

Лемма 1. *Если келерова метрика g допускает инфинитезимальную изометрию $J\Lambda$, где Λ определено равенствами* (25), *то ее келеров потенциал приводится к виду*

$$\Phi = \Phi(z^1 + z^{\overline{1}}, z^2, z^{\overline{2}}, \dots). \tag{28}$$

Доказательство. Из (27), учитывая (8), получим

$$(\partial_1 - \partial_{\overline{1}})g_{\alpha\overline{\beta}} = \partial_\alpha\partial_{\overline{\beta}}(\partial_1 - \partial_{\overline{1}})\Phi = 0, \tag{29}$$

следовательно,$(\partial_1 - \partial_{\overline{1}})\Phi = f(z) + h(\overline{z})$, где f — голоморфная, а h — антиголоморфная функции. Так как $(\partial_1 - \partial_{\overline{1}})\Phi = -\overline{(\partial_1 - \partial_{\overline{1}})\Phi}$ в силу вещественности функции Φ, то $h(\overline{z}) = -\overline{f(z)}$. Используя калибровочные преобразования (9), произведем замену келерова потенциала

$$\Phi = \Phi' + \int f(z)dz^1 + \overline{\int f(z)dz^1} = \int f(z)dz^1 - \int h(\overline{z})d\overline{z^1}.$$

Подставив это выражение в (29), найдем $(\partial_1 - \partial_{\overline{1}})\Phi' = 0$, отсюда, опустив штрихи, получим (28). □

В дальнейшем всегда будем предполагать, что келеров потенциал приведен к виду, указанному в лемме 1, если условия этой леммы выполнены.

Если келерово многообразие (M, g) допускает неаффинное H-проективное отображение, то в соответствии с теоремой 1 и леммой 1 оно допускает инфинитезимальную изометрию $J\Lambda = i(\partial_1 - \partial_{\overline{1}})$ и его келеров потенциал приводится к виду (28), а уравнения (18) сводятся к соотношениям

$$a^{\alpha}_{\beta,\overline{\gamma}} = \partial_{\overline{\gamma}} a^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_1 g_{\beta\overline{\gamma}}, \quad a^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\overline{\sigma}} a_{\beta\overline{\sigma}}, \tag{30}$$

$$a^{\alpha}_{\beta,\gamma} = \lambda_{,\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma} \tag{31}$$

и комплексно сопряженным равенствам. Из (31) следует $\lambda = a^{\alpha}_{\alpha} = a^{\overline{\alpha}}_{\overline{\alpha}} = a_{\alpha\overline{\beta}} g^{\alpha\overline{\beta}}$. Интегрируя (30), найдем

$$a^{\alpha}_{\beta} = \overline{a^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}} = \delta^{\alpha}_1 \partial_{\beta}\Phi + h^{\alpha}_{\beta}, \tag{32}$$

где h^{α}_{β} — произвольные голоморфные функции. Отсюда следует $\lambda = \partial_1\Phi + h^{\alpha}_{\alpha}$. Так как λ и $\partial_1\Phi$ вещественны, а голоморфная функция вещественна тогда и только тогда, когда она постоянна, то

$$h^{\alpha}_{\alpha} = h^{\overline{\alpha}}_{\overline{\alpha}} \equiv n\rho = \mathrm{const}, \quad \lambda = \partial_1\Phi + n\rho. \tag{33}$$

Подставив это равенство в (31), найдем

$$a^{\alpha}_{\beta,\gamma} = g_{\beta\overline{1}}\delta^{\alpha}_{\gamma}. \tag{34}$$

4. Пусть (M_4, g) — неэйнштейново келерово многообразие ($R^i_j \neq \kappa\delta^i_j$) вещественной размерности $\dim_{\mathbf{R}} M_4 = 4$ с келеровым потенциалом Φ, допускающее неаффинное H-проективное отображение на келерово многообразие (M'_4, g'), и пусть тензорное поле a определено равенствами (17). Введем тензорное поле $b^i_j = L_{J\Lambda} a^i_j$, где $J\Lambda$ — инфинитезимальная изометрия (см. теорему 1).

Выберем систему координат так, что

$$\Lambda = \lambda^i\partial_i = \partial_1 + \partial_{\overline{1}}, \quad J\Lambda = i(\partial_1 - \partial_{\overline{1}}). \tag{35}$$

В этой системе координат согласно (32) и лемме 1

$$a^{\alpha}_{\beta} = \overline{a^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}} = \delta^{\alpha}_1\partial_{\beta}\Phi + f^{\alpha}_{\beta}(z^1, z^2) + \rho\delta^{\alpha}_{\beta}, \quad f^{\alpha}_{\alpha} = f^{\overline{\alpha}}_{\overline{\alpha}} = 0, \tag{36}$$

$$\Phi = \Phi(z^1 + z^{\overline{1}}, z^2, z^{\overline{2}}), \tag{37}$$

где $f^{\alpha}_{\beta} \equiv h^{\alpha}_{\beta} - \rho\delta^{\alpha}_{\beta}$ — голоморфные функции. Отсюда получим

$$b^{\alpha}_{\beta} = i(\partial_1 - \partial_{\overline{1}})a^{\alpha}_{\beta} = i\partial_1 f^{\alpha}_{\beta} = \overline{b^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}}, \quad b^{\overline{\alpha}}_{\beta} = b^{\alpha}_{\overline{\beta}} = 0, \quad b^{\sigma}_{\sigma} = b^{\overline{\sigma}}_{\overline{\sigma}} = 0. \tag{38}$$

Допустимые преобразования координат, не меняющие вида векторного поля $\Lambda = \partial_1 + \partial_{\overline{1}}$ (и, следовательно, (36)) и допустимые преобразования (9), не меняющие формы (37) келерова потенциала, определяются равенствами

$$z'^1 = z^1 + l(z^2), \quad z'^2 = m(z^2), \tag{39}$$

$$\Phi' = \Phi + r\cdot(z^1 + \overline{z^1}) + p(z^2) + \overline{p(z^2)}, \quad r \in \mathbf{R}, \tag{40}$$

где l, m, p — голоморфные функции z^2. Взяв производную Ли вдоль $J\Lambda$ от обеих частей равенства (23), получим

$$b^{\nu}_{\mu}R^{\mu}_{\gamma} - b^{\mu}_{\gamma}R^{\nu}_{\mu} = 0, \tag{41}$$

или

$$
\begin{aligned}
b^1_2 R^2_1 - b^2_1 R^1_2 &= 0,\\
2b^1_1 R^1_2 + b^1_2(R^2_2 - R^1_1) &= 0,\\
2b^1_1 R^2_1 + b^2_1(R^2_2 - R^1_1) &= 0.
\end{aligned} \tag{42}
$$

Из (38) видно, что b^α_β зависят лишь от z. Голоморфные преобразования координат не меняют этого результата и могут быть использованы для того, чтобы обратить в нуль b^1_2.

Будем считать, что $b^1_2 = 0$ и рассмотрим следующие возможности. Пусть $b^2_1 = 0$ и тензорное поле b^i_j отлично от нуля, тогда либо $b^1_1 = b^2_2 = 0$, что противоречит предположению о неравенстве нулю тензора b^i_j, либо $R^1_2 = R^2_1 = 0$ и $R^1_1 \neq R^2_2$ в силу условия неэйнштейновости. В последнем случае найдутся такие (вообще говоря, комплекснозначные) функции v_1 и v_2 переменных $z, \overline{z}$, что

$$
b^\alpha_\beta = v_1 R^\alpha_\beta + v_2 \delta^\alpha_\beta. \tag{43}
$$

Если $b^2_1 \neq 0$ и $b^1_1 \neq 0$, то из (42) имеем

$$
R^1_2 = 0, \quad \frac{R^1_1 - R^2_2}{2b^1_1} = \frac{R^2_1}{b^2_1},
$$

т. е. $b^1_1 - b^2_2 = v_1(R^1_1 - R^2_2)$, $b^2_1 = v_1 R^2_1$, $b^1_2 = v_1 R^1_2$ для некоторой функции v_1. Отсюда, положив $b^\alpha_\beta = v_1 R^\alpha_\beta + \widetilde{b}^\alpha_\beta$, найдем $\widetilde{b}^1_1 - \widetilde{b}^2_2 = \widetilde{b}^1_2 = \widetilde{b}^2_1 = 0$ или $\widetilde{b}^\alpha_\beta = v_2 \delta^\alpha_\beta$, где v_2 — функция в области U.

Наконец, в случае $b^2_1 \neq 0$, $b^1_1 = b^2_2 = 0$ имеем $R^1_2 = R^1_1 - R^2_2 = 0$. Следовательно, найдутся v_1, v_2 такие, что выполняется (43). Подставив в (43) $v_1 = v_2 = 0$, получим $b^i_j = 0$. Таким образом, формула (43) охватывает все возможные случаи. Так же получаются соотношения

$$
b^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}} = \overline{v_1} R^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}} + \overline{v_2} \delta^\alpha_\beta, \quad b^{\overline{\alpha}}_\beta = v_1 R^{\overline{\alpha}}_\beta + v_2 \delta^{\overline{\alpha}}_\beta \equiv 0. \tag{44}
$$

Отсюда в силу вещественности и симметричности тензоров a^i_j, b^i_j, R^i_j следует, что v_1, v_2 — вещественные функции, т. е. (43), (44) можно записать в виде тензорного соотношения

$$
b^i_j = v_1 R^i_j + v_2 \delta^i_j. \tag{45}
$$

Отсюда

$$
v_1 \frac{R}{2} + n v_2 = 0, \quad v_2 = -\frac{v_1 R}{2n},
$$

где $R = R^\mu_\mu + R^{\overline{\mu}}_{\overline{\mu}}$ — скалярная кривизна. Из (45) выводим

$$
\begin{aligned}
b^\alpha_\beta &= v_1 (R^\alpha_\beta - \frac{R}{2n}\delta^\alpha_\beta),\\
b^\alpha_{\beta,j} &= v_{1,j}(R^\alpha_\beta - \frac{R}{2n}\delta^\alpha_\beta) + v_1 (R^\alpha_\beta - \frac{R}{2n}\delta^\alpha_\beta)_{,j}.
\end{aligned} \tag{46}
$$

Так как $b^\alpha_{\beta,j} = 0$ ввиду (10), (34) и (38), то, обозначив $A = \ln v_1$, получим

$$
A_{,j} = \frac{(R^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta R/2n)_{,j}}{R^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta R/2n}.
$$

Поскольку правая часть этого соотношения не зависит от переменной $z^1 - z^{\overline{1}}$, то и левая часть не зависит от этой переменной, отсюда в силу вещественности функции A следует

$$
\begin{aligned}
A &= \widetilde{f}(z^1 + z^{\overline{1}}, z^2, z^{\overline{2}}) + i\widetilde{\tau} \cdot (z^1 - z^{\overline{1}}), \quad \widetilde{\tau} \in \mathbf{R},\\
v_1 = \exp A &= f(z^1 + z^{\overline{1}}, z^2, z^{\overline{2}}) \exp(i\tau \cdot (z^1 - z^{\overline{1}})), \quad \tau \in \mathbf{R},
\end{aligned}
$$

и (из (46)) $b^\alpha_\beta = \exp(2i\tau z^1)\widetilde{c}^\alpha_\beta(z^2)$. Из этого равенства, учитывая (38), найдем

$$f^\alpha_\beta = -i\int b^\alpha_\beta dz^1 = \exp(2i\tau z^1)c^\alpha_\beta(z^2) + d^\alpha_\beta(z^2), \tag{47}$$

где $c^\alpha_\alpha = d^\alpha_\alpha = 0$ в силу условия $f^\alpha_\alpha = 0$.

Из (36), (47) и (23) следует

$$\delta^\alpha_1\partial_\mu\Phi R^\mu_\beta - \partial_\beta\Phi R^\alpha_1 + d^\alpha_\mu R^\mu_\beta - d^\mu_\beta R^\alpha_\mu = 0, \tag{48}$$

$$c^\alpha_\mu R^\mu_\beta - c^\mu_\beta R^\alpha_\mu = 0. \tag{49}$$

Рассмотрим по отдельности два случая: $c^2_1 \neq 0$ и $c^2_1 = 0$. При допустимых преобразованиях координат (39), не меняющих вида векторного поля $\Lambda = \partial_1 + \partial_{\overline{1}}$, компоненты t^α_β тензорного поля t типа (1,1) преобразуются по закону

$$\begin{gathered} t^{1'}_{1'} = t^1_1 + \frac{dl}{dz^2}t^2_1, \\ t^{1'}_{2'} = \left(\frac{dm}{dz^2}\right)^{-1}\left(-\frac{dl}{dz^2}t^1_1 - \left(\frac{dl}{dz^2}\right)^2 t^2_1 + \frac{dl}{dz^2}t^2_2 + t^1_1\right), \\ t^{2'}_{1'} = \frac{dm}{dz^2}t^2_1, \quad t^{2'}_{2'} = -\frac{dl}{dz^2}t^2_1 - t^2_2. \end{gathered} \tag{50}$$

Отсюда видно, что в случае $c^2_1 \neq 0$ компоненты тензорного поля c можно привести к виду

$$c^\alpha_\beta = \delta^\alpha_1\delta^2_\beta\phi + \delta^\alpha_2\delta^1_\beta,$$

где ϕ — голоморфная функция z^2 и штрихи опущены. Подставив это выражение в (49), получим $\phi R^2_1 = R^1_2$, $R^1_1 = R^2_2$, отсюда с помощью (48) найдем

$$(\partial_1\Phi + 2d^1_1)R^1_2 = 0, \quad (\partial_1\Phi + 2d^1_1)R^2_1 = 0.$$

Если $R^1_2 \neq 0$ или $R^2_1 \neq 0$, то $\partial_1\Phi = -2d^1_1$ — голоморфная функция и $g_{1\overline{1}} = g_{1\overline{2}} = 0$, т. е. метрика оказывается вырожденной. Следовательно, $R^1_2 = R^2_1 = R^1_1 - R^2_2 = 0$, что противоречит нашему предположению о неэйнштейновости многообразия M_4. Поэтому $c^2_1 = 0$. В этом случае с помощью допустимых преобразований координат тензорные поля c, d можно привести к виду

$$\begin{gathered} c^\alpha_\beta = \overline{c^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}} = c^1_1\delta^\alpha_\beta\varepsilon_\beta, \quad \varepsilon_\beta = (-1)^{\beta+1}, \\ d^\alpha_\beta = \overline{d^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}} = d^1_1\delta^\alpha_\beta\varepsilon_\beta + \gamma(z^2)\delta^\alpha_1\delta^2_\beta + \zeta\delta^\alpha_2\delta^1_\beta, \end{gathered} \tag{51}$$

где $\zeta = 0, 1$ и штрихи опущены. После калибровочного преобразования $\Phi' = \Phi + \int\gamma(z^2)dz^2 + \overline{\int\gamma(z^2)dz^2}$ с учетом (36) и (47) получим

$$d^\alpha_\beta = \overline{d^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}} = d^1_1\delta^\alpha_\beta\varepsilon_\beta + \zeta\delta^\alpha_2\delta^1_\beta. \tag{52}$$

Подставив (51) в (49), найдем $c^1_1 R^1_2 = 0$, $c^1_1 R^2_1 = 0$, следовательно, $c^1_1 = 0$ либо $R^1_2 = R^2_1 = 0$. В последнем случае из (48), (52) имеем $\partial_2\Phi(R^2_2 - R^1_1) = 0$, или $R^2_2 - R^1_1 = 0$ ввиду $\partial_2\Phi \neq 0$. Мы вновь пришли к пространству Эйнштейна. Следовательно, $c^1_1 = 0$: $f^\alpha_\beta = d^\alpha_\beta(z^2)$. Подставив этот результат в (36), получим следующее утверждение.

Лемма 2. *Если неэйнштейново четырехмерное келерово многообразие M_4 допускает неаффинное H-проективное отображение, то в окрестности каждой точки $p \in M_4$ существуют комплексные координаты, в которых выполняются соотношения*

$$a^\alpha_\beta = \delta^\alpha_1\partial_\beta\Phi + f^\alpha_\beta(z^2) + \rho\delta^\alpha_\beta, \quad (\partial_1 - \partial_{\overline{1}})\Phi = 0. \tag{53}$$

Допустимые преобразования координат и калибровочные преобразования, не меняющие вида соотношений (53), определяются формулами (39), (40). Используя эти преобразования, можно привести f^α_β к виду 1) $f^\alpha_\beta = \delta^\alpha_2 \delta^1_\beta$ при $f^2_1 \neq 0$ или 2) $f^\alpha_\beta = \mu\varepsilon_\beta\delta^\alpha_\beta$, $\varepsilon_\beta = (-1)^{\beta+1}$, при $f^2_1 = 0$ (штрихи опущены). Рассмотрим эти случаи по отдельности.

В случае 1) из (53) и (23) найдем

$$R^1_2 = \partial_2\Phi R^2_1, \quad R^1_2\partial_1\Phi + \partial_2\Phi(R^2_2 - R^1_1) = 0. \tag{54}$$

Записав условия симметричности $a_{\alpha\overline{\beta}} = a^\mu_\alpha g_{\mu\overline{\beta}} = a_{\beta\overline{\alpha}} = a^{\overline{\mu}}_{\overline{\beta}} g_{\alpha\overline{\mu}}$ тензорного поля a, с помощью (53) получим

$$g_{2\overline{1}} = g_{1\overline{2}}, \quad g_{1\overline{1}}\partial_2\Phi = g_{2\overline{1}}\partial_{\overline{1}}\Phi + g_{2\overline{2}}, \tag{55}$$

$$g_{1\overline{2}}\partial_1\Phi + g_{2\overline{2}} = g_{1\overline{1}}\partial_2\Phi, \tag{56}$$

$$g_{1\overline{2}}\partial_2\Phi - g_{2\overline{1}}\partial_{\overline{2}}\Phi \equiv g_{1\overline{2}}(\partial_2\Phi - \partial_{\overline{2}}\Phi) = 0.$$

Из последнего уравнения вытекает $\partial_2\Phi = \partial_{\overline{2}}\Phi$ либо $g_{1\overline{2}} = g_{2\overline{1}} = 0$.

Пусть сначала $g_{2\overline{1}} = 0$. Тогда из (7) следует равенство $\partial_1 g_{2\overline{2}} = \partial_2 g_{1\overline{1}} = 0$, из которого ввиду (12) получим $R^2_1 = R^1_2 = 0$. Учитывая, что $\partial_2\Phi \neq 0$, из (54) найдем $R^1_2 = R^2_1 = 0$, $R^1_1 - R^2_2 = 0$, т. е. многообразие M_4 эйнштейново, что противоречит нашему предположению. Следовательно, $\partial_2\Phi = \partial_{\overline{2}}\Phi$ в дополнение к $\partial_1\Phi = \partial_{\overline{1}}\Phi$. Отсюда, пользуясь (8)–(12), можно вывести, что все компоненты метрического тензора, символов Кристоффеля и тензоров кривизны вещественны. Тогда (23) можно записать в виде

$$R_{\alpha\overline{\sigma}} a^{\overline{\sigma}}_{\overline{\beta}} - R_{\sigma\overline{\beta}} a^\sigma_\alpha = 0.$$

Полагая в этой формуле $\alpha, \beta = 1, 2$ и пользуясь тем, что $\partial_2\Phi \neq 0$, $a^\alpha_\beta = a^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}$ и $R_{\alpha\overline{\beta}} = R_{\overline{\alpha}\beta}$, отсюда найдем $R_{\alpha\overline{\beta}} = 0$, т.е. многообразие M_4 является Риччи-плоским, что противоречит предположению о его неэйнштейновости.

В случае 2) ($c^2_1 = 0$) имеем

$$a^\alpha_\beta = \delta^\alpha_1\partial_\beta\Phi + \mu\varepsilon_\beta\delta^\alpha_\beta + \rho\delta^\alpha_\beta, \quad \varepsilon_\beta = (-1)^{\beta+1}, \quad \mu = \mu(z^2),$$

и из уравнений (23)

$$R^2_1 = 0, \quad (\partial_1\Phi + 2\mu)R^1_2 + \partial_2\Phi(R^2_2 - R^1_1) = 0. \tag{57}$$

Из условия симметричности и вещественности тензора a найдем

$$g_{1\overline{1}}(\mu - \overline{\mu}) = 0, \tag{58}$$

$$g_{2\overline{1}}\partial_{\overline{2}}\Phi - g_{1\overline{2}}\partial_2\Phi = g_{2\overline{2}}(\overline{\mu} - \mu),$$

$$g_{1\overline{1}}\partial_{\overline{2}}\Phi - g_{1\overline{2}}\partial_1\Phi = g_{1\overline{2}}(\overline{\mu} + \mu). \tag{59}$$

Из (58) следует, что $\mu = \overline{\mu}$ при $g_{1\overline{1}} \neq 0$. В случае $g_{1\overline{1}} = 0$ из (59) получим $\partial_1\Phi = -(\mu + \overline{\mu})$. Так как в силу условия невырожденности метрики $g_{1\overline{2}} \neq 0$, то, учитывая (8) и (7), получим

$$\partial_1 g_{1\overline{2}} = \partial_1 g_{2\overline{1}} = \partial_1 g_{2\overline{2}} = 0. \tag{60}$$

Следовательно, $R^1_1 = 0$ (см. (12)) и (из (57)) $\partial_2\Phi R^2_2 + R^1_2(\mu - \overline{\mu}) = 0$. Если $R^2_2 \neq 0$, то отсюда с помощью (60) следует $\partial_{\overline{1}}\partial_2\Phi = g_{\overline{1}2} = 0$ и метрика g оказывается вырожденной. Поэтому $R^2_2 = 0$ и $R^1_2 = 0$ при $\mu \neq \overline{\mu}$, т. е. $R^i_j = 0$ и многообразие M_4 является пространством Эйнштейна, что противоречит нашему предположению. Следовательно, $\mu = \overline{\mu} = \mathrm{const}$ в силу голоморфности функции μ.

Выполнив замену $\rho' = \rho - \mu$, $\Phi' = \Phi + 2\mu(z^1 + \overline{z^1})$ и опустив штрихи, приведем a^α_β к виду

$$a^\alpha_\beta = \delta^\alpha_1\partial_\beta\Phi + \rho\delta^\alpha_\beta. \tag{61}$$

Условия вещественности и симметричности тензора a имеют вид $g_{2\overline{1}}\partial_{\overline{2}}\Phi - g_{1\overline{2}}\partial_2\Phi = 0$, $g_{1\overline{1}}\partial_{\overline{2}}\Phi - g_{1\overline{2}}\partial_1\Phi = 0$, что равносильно

$$\partial_2\Phi = \varphi\partial_1\Phi, \tag{62}$$

где $\varphi = \varphi(z^2, \overline{z^2})$ — гладкая функция переменных $x^2 = z^2 + \overline{z^2}$ и $y^2 = i(z^2 - \overline{z^2})$. Отсюда с помощью (8) получим

$$g_{2\overline{1}} = \varphi g_{1\overline{1}}, \quad g_{1\overline{2}} = \overline{\varphi} g_{1\overline{1}}, \quad g_{2\overline{2}} = \partial_{\overline{2}}\varphi\partial_1\Phi + \varphi\overline{\varphi}g_{1\overline{1}}.$$

Из условия $g_{2\overline{2}} = \overline{g_{2\overline{2}}}$ следует $\partial_{\overline{2}}\varphi\partial_1\Phi = \partial_2\overline{\varphi}\partial_{\overline{1}}\Phi$, отсюда в силу леммы 1 и того, что $\partial_1\Phi \neq 0$, найдем

$$\partial_{\overline{2}}\varphi = \partial_2\overline{\varphi}. \tag{63}$$

Это равенство можно рассматривать как условие интегрируемости системы уравнений

$$\varphi = \partial_2 F, \quad \overline{\varphi} = \partial_{\overline{2}} F, \tag{64}$$

где F — вещественная функция переменных z^2, $z^{\overline{2}}$. Если (63) выполнено, то система (64) имеет решение F. Подставив его в (62), найдем

$$\partial_2\Phi = \partial_2 F \partial_1\Phi, \tag{65}$$

где $\partial_2\partial_{\overline{2}}\Phi \neq 0$, т.к. в противном случае $\det(g_{\alpha\overline{\beta}}) = \partial_1\partial_1\Phi\partial_1\Phi\partial_{\overline{2}}\varphi = 0$ и метрика g вырождается. В силу формул (61), (62) и (65) уравнение (18) выполняется тождественно.

Введя новые переменные $u = F(z^2, \overline{z^2})$, $v = \widetilde{F}(z^2, \overline{z^2})$, где вещественнозначная функция $\widetilde{F}$ выбрана так, чтобы функции F, $\widetilde{F}$ были функционально независимы, из (65) при условии $\partial_2 F \neq 0$ получим

$$\partial_u\Phi + \frac{\partial_2\widetilde{F}}{\partial_2 F}\partial_v\Phi = \partial_1\Phi.$$

Отсюда, учитывая вещественность функций F, u, v и равенство $(\partial_1 - \partial_{\overline{1}})\Phi = 0$, найдем

$$\left(\frac{\partial_2\widetilde{F}}{\partial_2 F} - \frac{\partial_{\overline{2}}\widetilde{F}}{\partial_{\overline{2}} F}\right)\partial_v\Phi = 0.$$

Так как F, $\widetilde{F}$ функционально независимы, то $\partial_v\Phi = 0$. Таким образом, $\Phi = \Phi(z^1 + \overline{z^1} + F)$. Доказана

Теорема 2. *Пусть f — неаффинное H-проективное отображение неэйнштейнова четырехмерного келерова многообразия (M_4, g) на келерово многообразие (M_4', g'). Тогда в окрестности каждой точки $p \in M_4$ существует комплексная система координат $(z^\alpha, z^{\overline{\alpha}})$, $\alpha = 1, \dots, n$, в которой келеров потенциал Φ многообразия M_4 определяется равенствами*

$$\Phi = \Omega(z^1 + \overline{z^1} + F(z^2, \overline{z^2})), \quad F = \overline{F}, \tag{66}$$

а компоненты метрического тензора g выражаются формулой

$$g_{\alpha\overline{\beta}} = \partial_\alpha\partial_{\overline{\beta}}\Phi. \tag{67}$$

В соответственных координатах в окрестности точки $f(p) \in M_4'$ компоненты метрического тензора g' определяются соотношениями (17), *в которых*

$$a_{\alpha\overline{\beta}} = \overline{a_{\overline{\alpha}\beta}} = \partial_\alpha\Phi\partial_1\partial_{\overline{\beta}}\Phi + \rho\partial_\alpha\partial_{\overline{\beta}}\Phi, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = 0, \quad \rho \in \mathbf{R}. \tag{68}$$

В частности, при $\Omega = \exp(z^1 + \overline{z^1} + F(z^2, \overline{z^2}))$ формула (67) определяет метрику эквидистантных келеровых многообразий основного типа, рассмотренных Н.С. Синюковым [9]. Микеш [15] показал, что эквидистантные келеровы многообразия основного типа допускают неаффинные H-проективные отображения. Теорема 2 подтверждает этот результат.

Будем называть келеровы многообразия с келеровым потенциалом вида (66) обобщенно эквидистантными келеровыми многообразиями.

Замечание. Так как уравнения (18) удовлетворяются тождественно для любой келеровой метрики g с келеровым потенциалом (66), тензорного поля a, определенного равенствами (68), и градиентного ковектора $\lambda_\alpha = g_{\alpha\bar{1}}$, $\lambda_{\overline{\alpha}} = g_{\overline{\alpha}1}$, то любое обобщенно эквидистантное келерово многообразие допускает неаффинное H-проективное отображение. Эйнштейновы обобщенно эквидистантные келеровы многообразия выделяются условиями

$$\partial_1(\partial_1\Phi)^2\partial_2\partial_{\bar{2}}F = f(z^2)\overline{f(z^2)}\exp(2\kappa\Phi + a\cdot(z^1 + \overline{z^1})), \quad a \in \mathbf{R},$$

где $f(z^2)$ — произвольная голоморфная функция z^2, а четырехмерные келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны определяются равенством

$$\Omega = \ln(1 + \exp(z^1 + \overline{z^1} + \ln(1 + \varepsilon z^2\overline{z^2}))), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

5. Пусть (M, g, J) — келерово многообразие, ω — форма связности Леви-Чивита келеровой метрики g. Голоморфное векторное поле $X \in TM$ (т.е. векторное поле, обладающее свойством $L_X J = 0$, см. п. 1) называется инфинитезимальным H-проективным преобразованием многообразия M, если

$$L_X\omega = \phi\,\iota + \iota\,\phi - \phi\circ J^*\,\iota\circ J^* - \iota\circ J^*\,\phi\circ J^*,$$

где $\iota : TM \times \wedge^p T^*M \to \wedge^{p-1}T^*M$, $\iota_Y\theta \equiv \theta(Y, \dots)$, $Y \in TM$, $\theta \in \wedge^p T^*M$ и $J^* : T^*M \to T^*M$ — сопряженный к J линейный оператор.

Киосак и Хаддад [16] доказали, что эйнштейновы четырехмерные келеровы многообразия допускают инфинитезимальные H-проективные преобразования тогда и только тогда, когда они имеют постоянную голоморфную секционную кривизну [11]. Аналогичный результат для компактных связных келеровых многообразий постоянной скалярной кривизны был получен Яно и Хирамату в [17].

Так как келерово многообразие, в котором существует неаффинное инфинитезимальное H-проективное преобразование, допускает неаффинное H-проективное отображение [9], то из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Если четырехмерное келерово многообразие допускает инфинитезимальное неаффинное H-проективное преобразование, то оно является обобщенно эквидистантным келеровым многообразием.*

Литература

1. Широков П.А. *Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в Riemann'овых пространствах* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. Сер. 2. – 1925. – Т. 25. – С. 86–114.
2. Kähler E. *Über eine bemerkenswerte Hermitishe Metric* // Abh. Math. Semin. Hamburg. – 1933. – Bd. 9. – S. 173–176.
3. Alvarez-Gaume L., Freedman D.Z. *Kähler geometry and the renormalization of supersymmetric sigma-models* // Phys. Rev. – 1980. – V. D22. – P. 846–863.
4. Aminova A.V., Kalinin D.A. *Geometric quantization: H-projective symmetries of phase space.* // Тр. международн. конф. "Геометризация физики". – Казань, 1994. – С. 48–52.
5. Bowick M.J., Rajeev S.G. *String theory as a Kähler geometry of loop space* // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 58. – P. 535–538.
6. Flaherty E.J. *Hermitian and kählerian geometry in relativity.* – Lect. Notes Phys. – 1976. – V. 46. – 365 p.

7. Otsuki T., Tashiro Y. *On curves in Kählerian spaces* // Math. J. Okayama Univ. – 1954. – V. 4. – № 1. – P. 57–78.
8. Аминова А.В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* // УМН. – 1993. – Т. 48. – С. 107–159.
9. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 255 с.
10. Newlander A., Nirenberg L. *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds* // Ann. Math. – 1957. – V. 65. – № 3. – P. 391–404.
11. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
12. Уэллс Р. *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.* – М.: Мир, 1976. – 284 с.
13. Синюков Н.С., Курбатова И.Н., Микеш Й. *Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств.* – Одесса: Изд-во ОГУ, 1985. – 143 с.
14. Аминова А.В., Калинин Д.А. *H-проективно-эквивалентные четырехмерные римановы связности* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 8. – С. 11–21.
15. Микеш Й. *Об эквидистантных келеровых пространствах* // Матем. заметки. – 1985. – Т. 38. – № 4. – С. 627–633.
16. Киосак В.А., Хаддад М. *О голоморфно-проективных отображениях A-гармонических келеровых пространств.* – Одесск. ин-т народн. хоз-ва. – Одесса, 1991. – 30 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 08.04.1991, № 1217-Ук91.
17. Yano K., Hiramatu H. *Isometry of Kaehlerian manifolds to complex projective spaces* // J. Math. Soc. Japan. – 1981. – V. 33. –№ 1. – P. 67–78.

Казанский государственный университет

Поступила
06.07.1995