*Известия вузов. Математика* *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
*2010, №6, с. 52–63* *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0057*

*М.Т. ТЕРЕХИН, В.В. КИРЮШКИН*

# НЕНУЛЕВЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАКСИМУМАМИ

*Аннотация.* Доказана теорема о существовании единственного решения нелинейного уравнения с максимумами, непрерывно зависящего от начальной функции и параметра. Также доказаны теоремы об условиях существования ненулевого решения двухточечной краевой периодической задачи, зависящих как от свойств линейных, так и нелинейных членов уравнения.

*Ключевые слова*: начальная функция, параметр, компакт, уравнение с максимумами, теорема существования и единственности, двухточечная периодическая задача, фундаментальная матрица, оператор, неподвижная точка, допустимый вектор матрицы.

*УДК*: 517.925

*Abstract.* We prove a theorem on the unique existence of a solution to a nonlinear equation with maxima and demonstrate its continuous dependence on the initial function and the parameter of the problem. We also establish conditions for the existence of a nonzero solution to a two-point boundary value periodic problem in dependence of both linear and nonlinear terms of the equation.

*Keywords*: initial function, parameter, compact, equation with maxima, theorem on the unique existence of a solution, two-point boundary value periodic problem, fundamental matrix, operator, fixed point, admissible vector of a matrix.

Дифференциальные уравнения с максимумами довольно широко изучены. Вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений с максимумами исследованы в работах [1]–[5], вопросы качественного поведения решения, существования периодических решений — в работах [6]–[9]. Общие вопросы теории функционально-дифференциальных уравнений изложены в работах [10], [11].

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t,\lambda)\max_{\tau\in[h(t),t]} x(\tau) + f(t, x(t), \max_{\tau\in[h(t),t]} x(\tau), \lambda), \\ &x(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in [-\omega_0, 0], \end{aligned} \tag{1}$$

в котором $x(t)$ — $n$-мерная вектор-функция, $A(t)$, $B(t,\lambda)$ — $n\times n$-матрицы, $\lambda$ — $m$-мерный вектор-параметр, $f(t,x,y,\lambda)$ — $n$-мерная вектор-функция, $h(t)$ — функция, определенная на сегменте $[0,\omega]$, $\max\limits_{\tau\in[h(t),t]} x(\tau) = (\max\limits_{\tau\in[h(t),t]} x_i(\tau),\ i\in\{1,2,\dots,n\})$, $\varphi(t)$ — $n$-мерная вектор-функция.

Поступила 10.07.2008

В статье ставится задача: найти условия существования ненулевого решения $x(t)$ системы (1), удовлетворяющего равенству

$$x(0) = x(\omega). \tag{2}$$

Далее такую задачу будем называть двухточечной краевой периодической задачей для уравнения (1) и обозначать как задача (1), (2).
Введем следующие обозначения: $|x| = \max_i\{|x_i|\}$, $\|x(\cdot)\|_d = \sup_{t\in[-\omega_0,d]} |x(t)|$, $\|A(t)\| = \sup_{|x|\le 1} |A(t)x|$, $\|A(\cdot)\| = \sup_{t\in[-\omega_0,d]} \|A(t)\|$, $d > -\omega_0$ — некоторое число, $D(\delta_0) = \{x \in E_n : |x| \le \delta_0\}$, $W(\delta_0) = \{\alpha \in E_n : |\alpha| \le \delta_0\}$, $\Lambda(\delta_0) = \{\lambda \in E_m : |\lambda| \le \delta_0\}$, $\gamma = (\alpha, \lambda)$, $|\gamma| = \max\{|\alpha|, |\lambda|\}$, $V(\delta_0) = [0,\omega]\times D(\delta_0)\times D(\delta_0)\times\Lambda(\delta_0)$, $\|B(\cdot,\delta_0)\| = \sup_{(t,\lambda)\in[0,\omega]\times\Lambda(\delta_0)} \|B(t,\lambda)\|$, $C_{[a,b]}$ — множество непрерывных на сегменте $[a,b]$ $n$-мерных вектор-функций, $K_{[-\omega_0,0]}(\overline{\varphi},\delta_0) \subset C_{[-\omega_0,0]}$ — такой компакт, что для любой вектор-функции $\varphi(t) \in K(\overline{\varphi}_{[-\omega,0]},\delta_0)$ справедливо неравенство $\|\varphi(\cdot) - \overline{\varphi}(\cdot)\| \le \delta_0$, $T(\overline{\varphi},\delta_0) = [0,\omega]\times K_{[-\omega_0,0]}(\overline{\varphi},\delta_0)\times\Lambda(\delta_0)$, $\overline{\varphi}(t) \in K_{[-\omega_0,0]}(\overline{\varphi},\delta_0)$, $U(x_0,\delta_0) = \{x \in E_n : |x - x_0| < \delta_0\}$, $\omega_0$, $\omega$, $\delta_0$ — некоторые положительные числа, $-\infty < a < b < +\infty$.

Предполагаем, что матрицы $A(t)$ и $B(t,\lambda)$ непрерывны на $[0,\omega]\times\Lambda(\delta_0)$, $B(t,0) \equiv 0$ на сегменте $[0,\omega]$, вектор-функция $f(t,x,y,\lambda)$ непрерывна на $V(\delta_0)$, удовлетворяет условию Липшица по $x$, $y$ на этом множестве, $f(t,0,0,\lambda) \equiv 0$, $\lim_{z\to 0} f(t,x,y,\lambda)/|z| = 0$ равномерно относительно $(t,\lambda)$ на множестве $[0,\omega]\times\Lambda(\delta_0)$, $z = (x,y)$, функция $h(t)$ непрерывна на сегменте $[0,\omega]$, и $h(t) \le t$ при любом $t \in [0,\omega]$, $-\omega_0 = \min_{t\in[0,\omega]} h(t)$.

**Определение 1.** Решением уравнения (1) называем дифференцируемую на сегменте $[0,\omega]$ $n$-мерную вектор-функцию $x(t)$, удовлетворяющую уравнению (1) на этом сегменте и равенству $x(\xi) = \varphi(\xi)$ при $\xi \in [-\omega_0, 0]$, $\varphi(\xi) \in K_{[-\omega_0,0]}(\overline{\varphi},\delta_0)$.

Иногда правую часть уравнения (1) будем представлять как $F(t, x(t), \max_{\tau\in[h(t),t]} x(\tau), \lambda)$, а уравнение (1) и условие Липшица записывать в виде

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = F(t, x(t), \max_{\tau\in[h(t),t]} x(\tau), \lambda), \quad t \in [0,\omega],\\ &x(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in [-\omega_0, 0], \end{aligned} \tag{3}$$

$|F(t,x,y,\lambda) - F(t,\overline{x},\overline{y},\lambda)| \le L\max\{|x-\overline{x}|, |y-\overline{y}|\}$ на множестве $V(\delta_0)$, $L > 0$ — постоянное число.

Вектор-функцию $\varphi(t)$ будем называть начальной функцией.

Отметим некоторые свойства максимума.

**Теорема 1.** *Если $n$-мерные вектор-функции $u(t)$, $v(t)$ непрерывны на сегменте $[c,d]$, то* $|\max_{\tau\in[c,d]} u(\tau) - \max_{\tau\in[c,d]} v(\tau)| \le \max_{\tau\in[c,d]} |u(\tau) - v(\tau)|$.

*Доказательство.* Пусть $u_i(t)$, $v_i(t)$ — $i$-е компоненты вектор-функций $u(t)$, $v(t)$ соответственно. В силу непрерывности функций $u_i(t)$, $v_i(t)$ на сегменте $[c,d]$ существуют точки $t_1 \in [c,d]$, $t_2 \in [c,d]$ такие, что $\max_{\tau\in[c,d]} u_i(\tau) = u_i(t_1)$, $\max_{\tau\in[c,d]} v_i(\tau) = v_i(t_2)$. Следовательно, $|\max_{\tau\in[c,d]} u_i(\tau) - \max_{\tau\in[c,d]} v_i(\tau)| = |u_i(t_1) - v_i(t_2)| = \max\{u_i(t_1) - v_i(t_2), v_i(t_2) - u_i(t_1)\}$. Из того, что при любом $t \in [c,d]$ $u_i(t) \le u_i(t_1)$, $v_i(t) \le v_i(t_2)$, следует $u_i(t_1) - v_i(t_2) \le |u_i(t_1) - v_i(t_1)| \le \max_{\tau\in[c,d]} |u_i(\tau) - v_i(\tau)|$, $v_i(t_2) - u_i(t_1) \le |v_i(t_2) - u_i(t_2)| \le \max_{\tau\in[c,d]} |u_i(\tau) - v_i(\tau)|$. Отсюда $|\max_{\tau\in[c,d]} u_i(\tau) - \max_{\tau\in[c,d]} v_i(\tau)| \le \max_{\tau\in[c,d]} |u_i(\tau) - v_i(\tau)|$. □

**Теорема 2.** *Если $n$-мерная вектор-функция $u(t,\beta)$ непрерывна на множестве $M=[a,b]\times P$, $P$ — компакт, функции $h_1(t)$, $h_2(t)$ непрерывны на сегменте $[c,d]\subseteq[a,b]$, $a\le\min\limits_{\tau\in[c,d]}h_1(\tau)\le h_1(t)\le h_2(t)\le\max\limits_{\tau\in[c,d]}h_2(\tau)\le b$ при любом $t\in[c,d]$, то вектор-функция $\max\limits_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}u(\tau,\beta)$ непрерывна на множестве $M$.*

*Доказательство.* Пусть $u_i(t,\beta)$ — $i$-я компонента вектор-функции $u(t,\beta)$. Покажем, что функция $\max\limits_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}u_i(\tau,\beta)$ непрерывна в произвольной, но фиксированной точке $(t_0,\beta_0)\in M$.

Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное число. Поскольку функция $u_i(t,\beta)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то существует точка $\xi\in[h_1(t_0),h_2(t_0)]$ такая, что

$$\max_{\tau\in[h_1(t_0),h_2(t_0)]}u_i(\tau,\beta_0)=u_i(\xi,\beta_0).$$

Возможны следующие случаи:

1) $u_i(h_1(t_0),\beta_0)=u_i(\xi,\beta_0)=u_i(h_2(t_0),\beta_0)$,

2) $u_i(\xi,\beta_0)>\max\{u_i(h_1(t_0),\beta_0),u_i(h_2(t_0),\beta_0)\}$,

3) $u_i(h_1(t_0),\beta_0)<u_i(\xi,\beta_0)=u_i(h_2(t_0),\beta_0)$ или $u_i(h_1(t_0),\beta_0)=u_i(\xi,\beta_0)<u_i(h_2(t_0),\beta_0)$.

Рассмотрим случай 1).

Пусть $h_1(t_0)<h_2(t_0)$ и пусть число $\sigma>0$ таково, что $h_1(t_0)+\sigma<h_2(t_0)-\sigma$. Из непрерывности функций $u_i(t,\beta_0)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ в точке $t_0$ следует существование числа $\delta>0$ такого, что $|u_i(h_j(t),\beta_0)-u_i(h_j(t_0),\beta_0)|<\varepsilon/2$, $|h_j(t)-h_j(t_0)|<\sigma$ при любых $j\in\{1,2\}$, $t\in\{t:|t-t_0|<\delta\}$. Поэтому наибольшее значение на множестве $[h_1(t),h_2(t)]$ функция $u_i(\tau,\beta_0)$ принимает на одном (возможно, на каждом) из интервалов $(h_j(t_0)-\sigma,h_j(t_0)+\sigma)$, $j=1,2$. Следовательно, $|\max\limits_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}u_i(\tau,\beta_0)-\max\limits_{\tau\in[h_1(t_0),h_2(t_0)]}u_i(\tau,\beta_0)|<\varepsilon/2$ на множестве $\{t:|t-t_0|<\delta\}$.

Если $h_1(t_0)=h_2(t_0)$, то непрерывность функции $\max\limits_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}u_i(\tau,\beta_0)$ в точке $t_0$ очевидна.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. В частности, в случае 2) число $\delta>0$ можно выбрать так, что при любом $t\in\{t:|t-t_0|<\delta\}$

$$\max_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}|u_i(\tau,\beta_0)|-\max_{\tau\in[h_1(t_0),h_2(t_0)]}|u_i(\tau,\beta_0)|=0<\varepsilon/2.$$

Из равномерной непрерывности функции $u_i(t,\beta)$ на множестве $[a,b]\times P$ следует, что число $\delta>0$ можно выбрать так, что при любых $t\in[a,b]$, $\beta\in\{\beta\in P:|\beta-\beta_0|<\delta\}$, $|u_i(t,\beta)-u_i(t,\beta_0)|<\varepsilon/2$, а, следовательно,

$$\max_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}|u_i(\tau,\beta)-u_i(\tau,\beta_0)|<\varepsilon/2.$$

Тогда согласно теореме 1 $\Big|\max\limits_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}u_i(\tau,\beta)-\max\limits_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}|u_i(\tau,\beta_0)|\Big|\le\max\limits_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}|u_i(\tau,\beta)-u_i(\tau,\beta_0)|<\varepsilon/2$.

Таким образом, для любой точки $(t,\beta)\in\{(t,\beta)\in M:|t-t_0|<\delta,|\beta-\beta_0|<\delta\}$ $|\max\limits_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}u_i(\tau,\beta)-\max\limits_{\tau\in[h_1(t_0),h_2(t_0)]}u_i(\tau,\beta_0)|\le|\max\limits_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}u_i(\tau,\beta)-\max\limits_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}u_i(\tau,\beta_0)|+|\max\limits_{\tau\in[h_1(t),h_2(t)]}u_i(\tau,\beta_0)-\max\limits_{\tau\in[h_1(t_0),h_2(t_0)]}u_i(\tau,\beta_0)|<\varepsilon$. Отсюда и из произвольности точки $(t_0,\beta_0)\in M$ и числа $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ следует справедливость теоремы. □

**Следствие 1.** Если $n$-мерная вектор-функция $u(t,\beta)$ непрерывна на множестве $[-\omega_0,\omega]\times P$, то и вектор-функция $\max\limits_{\tau\in[h(t),t]}u(\tau,\beta)$ непрерывна на множестве $[0,\omega]\times P$.

Для исследования проблемы разрешимости двухточечной краевой периодической задачи необходимо определить условия, при которых уравнение (3) (а, следовательно, и уравнение (1)) имеет решение, определенное на сегменте $[0, \omega]$.

**Теорема 3.** *Если при $\lambda = 0$ уравнение (3) имеет решение $\psi(t)$, определенное на сегменте $[-\omega_0, \omega]$ с начальной функцией $\overline{\varphi}(t) \in K_{[-\omega_0,0]}(\overline{\varphi}, \delta_0)$, $\psi(0) = \overline{\varphi}(0)$, $\|\psi(\cdot)\|_\omega < \delta_0$, то существует число $\overline{\delta} \in (0, \delta_0]$ такое, что для любой начальной функции $\varphi(t) \in K_{[-\omega,0]}(\overline{\varphi}, \overline{\delta})$ и любого $\lambda \in \Lambda(\overline{\delta})$ уравнение (2) имеет единственное решение $x(t)$ ($x(0) = \varphi(0)$), определенное на сегменте $[0, \omega]$, непрерывное на множестве $T(\overline{\varphi}, \overline{\delta})$ и удовлетворяющее неравенству $\|x(\cdot)\|_\omega \leq \delta_0$.*

*Доказательство* проведем методом последовательных приближений ([12], с. 31).

Пусть число $\delta \in (0, \delta_0]$ таково, что $\delta + \|\psi(\cdot)\|_\omega \leq \delta_0$. Выберем $\varepsilon > 0$ удовлетворяющим неравенству $\frac{\varepsilon}{L}(\exp L\omega - 1) < \delta/2$. Определим множества $V_1(\delta)$, $V_2(\delta)$ соответственно равенствами $V_1 = \{(t, x, \lambda) : t \in [-\omega_0, \omega],\ x \in D(\delta_0),\ |x - \psi(t)| \leq \delta,\ |\lambda| \leq \delta\}$, $V_2 = \{(t, x, y, \lambda) : t \in [-\omega_0, \omega],\ x \in D(\delta_0),\ |x - \psi(t)| \leq \delta,\ y \in D(\delta_0),\ |y - \max\limits_{\tau \in [h(t),t]} \psi(\tau)| \leq \delta,\ |\lambda| \leq \delta\}$. Очевидно, $V_2(\delta) \subseteq V(\delta_0)$. Число $\delta^* \in (0, \delta]$ выберем так, чтобы для любой точки $(t, x, y, \lambda_1) \in V_2(\delta)$ и любого $\lambda_2 \in \Lambda(\delta)$ выполнялось неравенство $|F(t, x, y, \lambda_1) - F(t, \psi(t), \max\limits_{\tau \in [h(t),t]} \psi(\tau), \lambda_2)| < \varepsilon$, как только

$$|x - \psi(t)| < \delta^*, \quad |y - \max_{\tau \in [h(t),t]} \psi(\tau)| < \delta^*, \quad |\lambda_1 - \lambda_2| < \delta^*.$$

Выберем $\overline{\delta} = \min\{\delta^*, \delta/2\}$. Докажем, что для любой начальной функции $\varphi(t) \in K_{[-\omega_0,0]}(\overline{\varphi}, \overline{\delta})$ и любого $\lambda \in \Lambda(\overline{\delta})$ существует решение $x(t)$ уравнения (3), определенное на сегменте $[0, \omega]$, $x(0) = \varphi(0)$.

Пусть $\varphi(t) \in K_{[-\omega_0,0]}(\overline{\varphi}, \overline{\delta})$ — произвольная, но фиксированная функция, $\lambda \in \Lambda(\overline{\delta})$.

Нулевое приближение $x_0(t)$ определим равенствами

$$\begin{aligned} &x_0(t) = \psi(t) - \psi(0) + \varphi(0) \quad \text{при} \quad t \in [0, \omega], \\ &x_0(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in [-\omega_0, 0]. \end{aligned}$$

Вектор-функция $x_0(t)$ задана на сементе $[-\omega_0, \omega_0]$ и непрерывна на множестве $T(\overline{\varphi}, \overline{\delta})$.

Так как при любом $t \in [0, \omega]$ $\ |x_0(t) - \psi(t)| \leq \overline{\delta} \leq \delta/2$, то при любом $t \in [-\omega_0, \omega]$ точка $(t, x_0(t), \lambda) \in V_1(\delta)$.

Приближение $x_1(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} &x_1(t) = \varphi(0) + \int_0^t F(\xi, x_0(\xi), \max_{\tau \in [h(\xi),\xi]} x_0(\tau), \lambda) d\xi \quad \text{при} \quad t \in [0, \omega], \\ &x(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in [-\omega_0, 0]. \end{aligned}$$

Согласно следствию 1 вектор-функция $\max\limits_{\tau \in [h(t),t]} x_0(\tau)$ непрерывна на множестве $T(\overline{\varphi}, \overline{\delta})$. Поскольку $\forall t \in [0, \omega]$ $\ (t, x_0(t), \max\limits_{\tau \in [h(t),t]} x_0(\tau), \lambda) \in V_2(\delta)$ и вектор-функция $F(t, x, y, \lambda)$ непрерывна на множестве $V_2(\delta)$, то вектор-функция $x_1(t)$ определена на сегменте $[-\omega_0, \omega]$ и непрерывна на множестве $T(\overline{\varphi}, \overline{\delta})$.

Учитывая, что $\psi(t)$ — решение уравнения (3) при $\lambda = 0$, $|\max\limits_{\tau\in[h(t),t]} x_0(\tau) - \max\limits_{\tau\in[h(t),t]} \psi(\tau)| \leq \max\limits_{\tau\in[h(t),t]} |x_0(\tau) - \psi(\tau)| \leq \overline{\delta} < \delta$ при любом $t \in [0,\omega]$, получаем

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq \int_0^t |F(\xi, x_0(\xi), \max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x_0(\tau), \lambda) - F(\xi, \psi(\xi), \max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} \psi(\tau), 0)|d\xi \leq$$
$$\leq \varepsilon t \leq \varepsilon\omega < \frac{\varepsilon}{L}(\exp L\omega - 1) < \delta/2.$$

Следовательно, $|x_1(t) - \psi(t)| \leq |x_1(t) - x_0(t)| + |x_0(t) - \psi(t)| \leq \delta$ и $(t, x_1(t), \lambda) \in V_1(\delta)$ при любом $t \in [0,\omega]$.

Приближение $x_2(t)$ определится равенствами

$$\begin{aligned} &x_2(t) = \varphi(0) + \int_0^t F(\xi, x_1(\xi), \max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x_1(\tau), \lambda)d\xi \quad \text{при} \quad t \in [0,\omega], \\ &x_2(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in [-\omega_0, 0]. \end{aligned}$$

Вектор-функция $x_2(t)$ определена на сегменте $[-\omega_0,\omega]$ и непрерывна на множестве $T(\overline{\varphi},\overline{\delta})$.

Пусть точка $s \in [h(\xi),\xi]$ такова, что $\max\limits_{\tau\in[h(\xi),\xi]} |x_1(\tau) - x_0(\tau)| = |x_1(s) - x_0(s)|$. Следовательно, $|x_1(s) - x_0(s)| = 0 \leq \varepsilon\xi$ при $s \leq 0$, $|\max\limits_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x_1(\tau) - \max\limits_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x_0(\tau)| < \varepsilon\xi$ при $s > 0$ и $\xi \in [0,t] \subset [0,\omega]$. Поэтому

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \int_0^t |F(\xi, x_1(\xi), \max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x_2(\tau), \lambda) - F(\xi, x_0(\xi), \max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x_0(\tau), \lambda)|d\xi \leq$$
$$\leq L\int_0^t \max\{|x_1(\xi) - x_0(\xi)|, |\max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x_1(\tau) - \max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x_0(\tau)|\}d\xi \leq L\varepsilon \int\limits_0^t \xi d\xi \leq L\varepsilon t^2/2 \leq L\varepsilon\omega^2/2.$$

Убедимся, что $(t, x_2(t), \lambda) \in V_1(\delta)$ при любом $t \in [-\omega_0,\omega]$. Действительно, $|x_2(t) - \psi(t)| \leq |x_2(t) - x_1(t)| + |x_1(t) - x_0(t)| + |x_0(t) - \psi(t)| \leq \varepsilon\omega + \varepsilon L\omega^2/2 + \overline{\delta} = \frac{\varepsilon}{L}(1 + L\omega + \frac{(L\omega)^2}{2!} - 1) + \overline{\delta} < \frac{\varepsilon}{L}(\exp L\omega - 1) + \delta/2 \leq \delta$ при любом $t \in [-\omega_0,\omega]$.

Продолжая этот процесс, получаем последовательность $(x_n(t))$, в которой

$$\begin{aligned} &x_n(t) = \varphi(0) + \int_0^t F(\xi, x_{n-1}(\xi), \max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x_{n-1}(\tau), \lambda)d\xi \quad \text{при} \quad t \in [0,\omega], \\ &x_n(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in [-\omega_0, 0]. \end{aligned} \tag{4}$$

Вектор-функция $x_n(t)$ определена на сегменте $[-\omega_0,\omega]$ и непрерывна на множестве $T(\overline{\varphi},\overline{\delta})$, $|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{L}\frac{(L\omega)^n}{n!}$, $|x_n(t) - \psi(t)| \leq \delta$. Следовательно, при любом $t \in [-\omega_0,\omega]$ точка $(t, x_n(t), \lambda) \in V_1(\delta)$.

Равномерная сходимость последовательности $(x_n(t))$ на множестве $T(\overline{\varphi},\overline{\delta})$ к некоторой вектор-функции $x(t)$ следует из того, что на этом множестве ряд $x_0(t) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n(t) - x_{n-1}(t))$ мажорируется рядом $\frac{\varepsilon}{L}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{Ln\omega^n}{n!}$. Поэтому вектор-функция $x(t)$ определена на сегменте $[-\omega_0,\omega]$ и непрерывна на множестве $T(\overline{\varphi},\overline{\delta})$; $x(t) = \varphi(t)$ при любом $t \in [-\omega_0, 0]$.

Заметим, что при любом $n$ $\|x_n(\cdot)\|_\omega - \|\psi(\cdot)\|_\omega \leq \|x_n(\cdot) - \psi(\cdot)\|_\omega < \delta$. Отсюда

$$\|x_n(\cdot)\| \leq \|\psi(\cdot)\|_\omega + \delta \leq \delta_0 \quad \text{и} \quad \|x(\cdot)\|_\omega = \lim_{n\to\infty}\|x_n(\cdot)\|_\omega \leq \delta_0.$$

Докажем, что вектор-функция $x(t)$ является решением уравнения (3). Вектор-функция $F(t,x,y,\lambda)$ равномерно непрерывна на множестве $V_2(\delta)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, $|\max\limits_{\tau\in[h(t),t]} x_n(\tau) - \max\limits_{\tau\in[h(t),t]} x(\tau)| \le \max\limits_{\tau\in[h(t),t]} |x_n(\tau) - x(\tau)| \to 0$ при $n\to\infty$ равномерно на множестве $T(\overline{\varphi},\overline{\delta})$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^t F(\xi, x_n(\xi), \max\limits_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x_n(\tau), \lambda)d\xi = \int\limits_0^t F(\xi, x(\xi), \max\limits_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x(\tau), \lambda)d\xi$ равномерно на множестве $T(\overline{\varphi},\overline{\delta})$. Перейдя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве (4), получим

$$
\begin{aligned}
&x(t) = \varphi(0) + \int_0^t F(\xi, x(\xi), \max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x(\tau), \lambda)d\xi \quad \text{при} \quad t\in[0,\omega],\\
&x(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{при} \quad \xi\in[-\omega_0, 0].
\end{aligned}
$$

Следовательно, вектор-функция $x(t)$ — решение уравнения (3), определенное на сегменте $[0,\omega]$, непрерывное на множестве $T(\overline{\varphi},\overline{\delta})$ и удовлетворяющее неравенству $\|x(\cdot)\|_\omega \le \delta_0$.

Доказательство единственности решения проводится методом от противного с использованием теоремы 1. □

**Следствие 2.** Если $F(t,0,0,\lambda)\equiv 0$ на множестве $[0,\omega]\times\Lambda(\delta_0)$, то существует число $\overline{\delta}$ такое, что для любых начальных значений $\alpha\in W(\overline{\delta})$ и параметра $\lambda\in\Lambda(\overline{\delta})$ уравнение (3) при $\varphi(\xi)=\alpha$, $\xi\in[-\omega_0,0]$, имеет единственное решение $x(t)$, определенное на сегменте $[0,\omega]$, непрерывное на множестве $[0,\omega]\times W(\overline{\delta})\times\Lambda(\overline{\delta})$, и $\|x(\cdot)\|_\omega\le\delta_0$.

**Теорема 4.** *Для любых двух решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ уравнения* (3)*, определенных на сегменте $[0,\omega]$ с начальными функциями $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ из множества $K_{[-\omega_0,0]}(\overline{\varphi},\overline{\delta})$, $x_i(0)=\varphi_i(0)$, $i=1,2$, справедливо неравенство $|x_1(t)-x_2(t)|\le\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_0 \exp L\omega$ при любом $t\in[0,\omega]$.*

*Доказательство.* Справедливость теоремы следует из того, что при любом $t\in[0,\omega]$ с учетом теоремы 1

$$
|x_1(t)-x_2(t)| \le |\varphi_1(0)-\varphi_2(0)| + L\int_0^t \max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} |x_1(\tau)-x_2(\tau)|d\xi.
$$

Так как функция $|x_1(t)-x_2(t)|$ непрерывна на сегменте $[h(t),t]$, то существует $\overline{t}\in[h(t),t]\subset[-\omega_0,t]$, удовлетворяющая неравенству $|x_1(t)-x_2(t)|\le \max\limits_{\tau\in[h(t),t]}|x_1(\tau)-x_2(\tau)| = |x_1(\overline{t})-x_2(\overline{t})|$. Следовательно, $\max\limits_{\tau\in[h(t),t]}|x_1(\tau)-x_2(\tau)| = |x_1(\overline{t})-x_2(\overline{t})| \le |\varphi_1(0)-\varphi_2(0)| + L\int\limits_0^{\overline{t}} \max\limits_{\tau\in[h(\xi),\xi]}|x_1(\tau)-x_2(\tau)|d\xi \le \|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_0 + L\int\limits_0^t \max\limits_{\tau\in[h(\xi),\xi]}|x_1(\tau)-x_2(\tau)|d\xi$ при $\overline{t}>0$, $\max\limits_{\tau\in[h(t),t]}|x_1(\tau)-x_2(\tau)| = |x_1(\overline{t})-x_2(\overline{t})| \le \|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_0 \le \|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_0 + L\int\limits_0^t \max\limits_{\tau\in[h(\xi),\xi]}|x_1(\tau)-x_2(\tau)|d\xi$ при $\overline{t}\le 0$. Тогда по лемме Гроноулла–Беллмана ([6], с. 108) $|x_1(t)-x_2(t)| \le \max\limits_{\tau\in[h(t),t]}|x_1(\tau)-x_2(\tau)| \le \|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_0 \exp L\omega$ при любом $t\in[0,\omega]$. □

**Следствие 3.** Если $F(t,0,0,\lambda)\equiv 0$ на множестве $[0,\omega]\times\Lambda(\delta_0)$ и $x(t)$ — решение уравнения (3), определенное на сегменте $[0,\omega]$ с начальной функцией $\varphi(\xi)=\alpha$, $\xi\in[-\omega_0,0]$, $\alpha\in W(\delta_0)$, то $|x(t)|\le|\alpha|\exp L\omega$ при любом $t\in[0,\omega]$.

Решение $x(t)$ уравнения (1) с начальной функцией $\varphi(\xi)=\alpha$, $\xi\in[-\omega_0,0]$, далее будем обозначать символом $x(t,\alpha,\lambda)$, $x(0,\alpha,\lambda)=\alpha$.

Заметим, что при $\alpha = 0$ вектор-функция $x(t) \equiv 0$ является решением уравнения (1) на сегменте $[0,\omega]$. Тогда согласно теореме 3 и следствию 3 существует число $\delta^* \in (0,\delta_0]$ такое, что при любых $\alpha \in W(\delta^*)$, $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$ уравнение (1) имеет единственное решение $x(t,\alpha,\lambda)$, определенное на сегменте $[0,\omega]$, непрерывное и удовлетворяющее неравенствам $\|x(\cdot,\alpha,\lambda)\|_\omega \le \delta_0$, $|x(t,\alpha,\lambda)| \le |\alpha| \exp L\omega$ на множестве $[0,\omega] \times W(\delta^*) \times \Lambda(\delta^*)$.

Следовательно, для того чтобы задача (1), (2) была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы существовали векторы $\alpha$ $(\alpha \ne 0)$ и $\lambda$, удовлетворяющие равенству

$$x(\omega,\alpha,\lambda) = \alpha. \tag{5}$$

Таким образом, задача (1), (5) определения условий существования векторов $\alpha$ $(\alpha \ne 0)$ и $\lambda$, удовлетворяющих равенству (5), эквивалентна задаче (1), (2).

Решение уравнения (1) на множестве $[0,\omega]$ имеет вид

$$x(t,\alpha,\lambda) = X(t)\alpha + X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)[B(\xi,\lambda)\max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x(\tau,\alpha,\lambda) + \\ + f(\xi, x(\xi,\alpha,\lambda), \max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x(\tau,\alpha,\lambda),\lambda)]d\xi, \tag{6}$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$, $E$ — единичная матрица.

**Теорема 5.** *Решение $x(t,\alpha,\lambda)$ уравнения (1) на множестве $[0,\omega] \times W(\delta^*) \times \Lambda(\delta^*)$ можно представить равенством $x(t,\alpha,\lambda) = X(t)\alpha + |\alpha|O(|\gamma|)$, $\lim\limits_{\gamma\to 0} O(|\gamma|) = 0$ равномерно относительно $t \in [0,\omega]$.*

*Доказательство.* Так как равномерно на множестве $[0,\omega] \times \Lambda(\delta_0)$

$$\lim_{z\to 0} f(t,x,y,\lambda)/|z| = 0, \quad \lim_{\lambda\to 0} B(t,\lambda) = 0,$$

и, кроме того, $\max\{|x(t,\alpha,\lambda)|, |\max\limits_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x(\tau,\alpha,\lambda)|\} \le |\alpha| \exp L\omega$ на множестве $[0,\omega] \times W(\delta^*) \times \Lambda(\delta^*)$, то непосредственным вычислением устанавливаем

$$X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)B(\xi,\lambda)\max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x(\tau,\alpha,\lambda)d\xi = |\alpha|O(|\lambda|),$$

$$X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)f(\xi,x(\xi,\alpha,\lambda),\max_{\tau\in[h(\xi),\xi]} x(\tau,\alpha,\lambda),\lambda)d\xi = o(|\alpha|).$$

Это значит, что в силу равенства (6)

$$x(t,\alpha,\lambda) = |\alpha|O(|\gamma|), \;\; O(|\gamma|) = O(|\lambda|) + O(|\alpha|). \qquad \square$$

**Лемма.** *На множестве $[0,\omega] \times W(\delta) \times \Lambda(\delta)$*

$$\max_{\tau\in[h(t),t]} x(\tau,\alpha,\lambda) = \max_{\tau\in[h(t),t]} X(\tau)\alpha + |\alpha|O(|\gamma|).$$

*Доказательство.* Справедливость леммы следует из того, что $\lim\limits_{\gamma\to 0} O(|\gamma|) = 0$ равномерно по $t \in [0,\omega]$, а значит, что равномерно по $t \in [0,\omega]$ и $\lim\limits_{\gamma\to 0}\max\limits_{\tau\in[h(t),t]} O(|\gamma|) = 0$. $\square$

Из теоремы 5 и равенства (5) следует: для того чтобы $x(t,\alpha,\lambda)$ было решением задачи (1), (5), необходимо и достаточно, чтобы векторы $\alpha$ $(\alpha \ne 0)$, $\lambda$ удовлетворяли равенству

$$(X(\omega) - E)\alpha + X(\omega)\int_0^\omega X^{-1}(t)B(t,\lambda)\big(\max_{\tau\in[h(t),t]} X(\tau)\alpha + |\alpha|O(|\gamma|)\big)dt + o(|\alpha|) = 0. \tag{7}$$

**Теорема 6.** *Если матрица $X(\omega)-E$ неособенная, то существует число $\delta\in(0,\delta^*]$ такое, что при любых $\alpha\in W(\delta)$, $\alpha\neq 0$, $\lambda\in\Lambda(\delta)$ задача* (1), (5) *неразрешима.*

*Доказательство.* Положим $\alpha=\rho e$, $\rho>0$, $e\in S=\{e\in E_n:|e|=1\}$. Тогда, учитывая, что при любом $e\in S$ $|(X(\omega)-E)e|\geq m$, $m>0$ — некоторое число, число $\delta\in(0,\delta^*]$ можно выбрать так, что при любых $\rho\in(0,\delta]$, $\lambda\in\Lambda(\delta)$

$$\left|X(\omega)\int_0^\omega X^{-1}(t)B(t,\lambda)\big(\max_{\tau\in[h(t),t]}X(\tau)e+O(|\gamma|)\big)dt+O(\rho)\right|<m.$$

Поэтому при любых $\alpha\in W(\delta)$, $\alpha\neq 0$, $\lambda\in\Lambda(\delta)$ задача (1), (5) неразрешима. □

Из теоремы 6 следует, что необходимым условием разрешимости задачи (1), (5) при достаточно малых $\alpha\in W(\delta)$, $\alpha\neq 0$, $\lambda\in\Lambda(\delta)$ является выполнение равенства $\det(X(\omega)-E)=0$.

Предположим, что $B(t,\lambda)=B_1(t,\lambda)+o(|\lambda|)$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}o(|\lambda|)/|\lambda|=0$ равномерно на сегменте $[0,\omega]$, $B_1(t,\lambda)=(b_{ij}(t),\lambda)_{11}^{nm}$, $(b_{ij}(t),\lambda)$ — скалярное произведение векторов $b_{ij}(t)$ и $\lambda$. Непосредственным вычислением устанавливаем, что существует непрерывная на множестве $[0,\omega]\times W(\delta)$ матрица $S^*(t,\max\limits_{\tau\in[h(t),t]}X(\tau)\alpha)$, удовлетворяющая на этом множестве равенству

$$S^*\big(t,\max_{\tau\in[h(t),t]}X(\tau)\alpha\big)\lambda=B_1(t,\lambda)\max_{\tau\in[h(t),t]}X(\tau)\alpha. \tag{8}$$

Пусть $\operatorname{rang}[X(\omega)-E]=r$, $0\leq r<n$. Заменой переменных $\alpha=R\beta$ ($\alpha=\beta$ при $r=0$), где $R$ — $n\times(n-r)$-матрица, столбцы которой — линейно независимые решения системы $[X(\omega)-E]\alpha=0$, система (7) может быть сведена к системе

$$V(\beta)\lambda+|\beta|o(|\lambda|)+o(|\beta|)=0; \tag{9}$$

здесь $V(\beta)=\int\limits_0^\omega X^{-1}(t)S^*\big(t,\max\limits_{\tau\in[h(t),t]}X(\tau)R\beta\big)dt$.

Положим $\beta=\rho\theta$, $\rho>0$, $\theta\in Q=\{\theta\in E_{n-r}:|\theta|=1\}$. Тогда система (9) примет вид

$$V(\theta)\lambda+o(|\lambda|)+O(\rho)=0. \tag{10}$$

**Теорема 7.** *Если $m\geq n$ и существует вектор $\theta^*\in Q$ такой, что* $\operatorname{rang}V(\theta^*)=n$, *то задача* (1), (5) *разрешима.*

*Доказательство.* Для простоты рассуждений будем предполагать, что минор порядка $n$, отличный от нуля, расположен на $n$ первых столбцах матрицы $V(\theta^*)$. Тогда, полагая $V(\theta^*)=(M_1,M_2)$ и учитывая, что $\det M_1\neq 0$, систему (10) запишем следующим образом:

$$\lambda_1=-M_1^{-1}[M_2\lambda_2+o(|\lambda|)+O(\rho)], \tag{11}$$

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$.

Оператор $\Gamma$ определим правой частью равенства (11). Непрерывность оператора $\Gamma$ на множестве $\{\lambda_1\in E_n:|\lambda_1|\leq\delta^*\}$ следует из непрерывности по $\lambda$ правой части уравнения (1) и решения $x(t,\alpha,\lambda)$ на множестве $\Lambda(\delta^*)$.

Убедимся, что существует число $\delta\in(0,\delta^*]$ такое, что на множестве $\Lambda_1(\delta)=\{\lambda_1\in E_n:|\lambda_1|\leq\delta\}$ оператор $\Gamma$ имеет неподвижную точку при некоторых фиксированных $\lambda_2$ и $\rho$. Для этого заметим, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}o(|\lambda|)/|\lambda|=0$. Поэтому существует такое число $\delta\in(0,\delta^*]$, что $|M_1^{-1}o(|\lambda|)|<\delta/3$ при любом $\lambda\in\Lambda(\delta)$.

Ввиду $\lim\limits_{\lambda_2\to 0} M_2\lambda_2 = 0$, $\lim\limits_{\rho\to 0} O(\rho) = 0$ существует число $\delta_2 \in (0, \delta]$, при котором для любых $\lambda_2$ ($|\lambda_2| < \delta_2$), $\rho < \delta_2$ выполнены неравенства $|M_1^{-1}M_2\lambda_2| < \delta/3$, $|M_1^{-1}O(\rho)| < \delta/3$. Следовательно, при любых фиксированных $\lambda_2$ ($|\lambda_2| < \delta_2$), $\rho < \delta_2$, при любом $\lambda_1 \in \Lambda_1(\delta)$ получим $|\Gamma\lambda_1| < \delta$. Оператор $\Gamma$ на множестве $\Lambda_1(\delta)$ имеет неподвижную точку.

Фиксируем $\lambda_2^*$ ($|\lambda_2^*| < \delta_2$), $\rho^* < \delta_2$. Пусть $\lambda_1^* \in \Lambda_1(\delta)$ — неподвижная точка оператора $\Gamma$. Следовательно, $\lambda_1^*$, $\lambda_2^*$ и $\rho^*$ — решение системы (11), точка $(\beta^*, \lambda^*)$, $\beta^* = \rho^*\theta^\star$, $\beta^* \neq 0$, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, — решение системы (9), точка $(\alpha^*, \lambda^*)$, $\alpha^* = R\beta^*$, $\alpha^* \neq 0$, — решение системы (7), задача (1), (5) разрешима. □

**Определение 2.** Вектор $e_0 \in E_n$ назовем допустимым вектором матрицы $X(t)$, если существует число $\sigma > 0$ и непрерывная на сегменте $[0, \omega]$ $n \times n$-матрица $I(t)$ такие, что при любых $e \in U(e_0, \sigma)$, $t \in [0, \omega]$

$$\max_{\tau\in[h(t),t]} X(\tau)e = I(t)e. \tag{12}$$

Далее будем предполагать, что $B(t, \lambda) = B_{i-1}(t, \lambda) + o(|\lambda|^{i-1})$ на множестве $[0, \omega] \times D(\delta_0) \times D(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$, элементы матрицы $B_{i-1}(t, \lambda)$ — формы порядка $i-1$ относительно $\lambda$, $f(t, x, y, \lambda) = f_j(t, x, y, \lambda) + o(|z|^j)$, $f_j(t, x, y, \lambda)$ — вектор-форма порядка $j$ относительно $u = (x, y, z)$. Тогда система (7) при $k = i = j$ может быть записана в виде

$$(X(\omega) - E)\alpha + F_k(\gamma) + o(|\gamma^k|) = 0, \tag{13}$$

где $F_k(\gamma) = X(\omega)\int\limits_0^\omega X^{-1}(t)[B_{k-1}(t, \lambda)\max\limits_{\tau\in[h(t),t]} X(\tau)\alpha + f_k(t, X(t)\alpha, \max\limits_{\tau\in[h(t),t]} X(\tau)\alpha, \lambda)]dt$.

В зависимости от того, какое из неравенств $k = i < j$, $k = j < i$ выполнено, соответствующим образом определяется $F_k(\gamma)$.

Отметим, что для системы (13) остается справедливой теорема 6.

Пусть $\mathrm{rang}(X(\omega)-E) = r$, $0 \le r < n$, и пусть для определенности минор порядка $r$, отличный от нуля, расположен в левом верхнем углу матрицы $X(\omega) - E$. Тогда элементарными преобразованиями систему (13) можно свести к системе

$$\begin{aligned} P_0\alpha + F_k^*(\gamma) + o^*(|\gamma|^k) = 0,\\ F_k^{**}(\gamma) + o^{**}(|\gamma|^k) = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

$P_0$ — $r \times n$-матрица.

Пусть $O_{r\times m}$ — нулевая $r\times m$-матрица, тогда $P = P_0 O_{r\times m}$ — $r\times(n+m)$-матрица. Полагая $\gamma = \rho e$, $\rho > 0$, $\alpha = \rho e_\alpha$, $\lambda = \rho e_\lambda$, $e = (e_\alpha, e_\lambda)$, $|e| \le \Delta, \Delta > 1$ — некоторое число, получаем, что систему (14) можно записать в виде

$$\begin{aligned} Pe + \rho^{k-1}F_k^*(e) + o(\rho^{k-1}, |e|) = 0,\\ F_k^{**}(e) + O(\rho, |e|) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

**Теорема 8.** *Если при любом $e$ ($|e| = 1$) $\mathrm{colon}(Pe, F_k^{**}(e)) \neq 0$, то существует окрестность точки $\gamma = 0$, в которой нет ненулевого решения системы (15), задача (1), (5) неразрешима в достаточно малой окрестности нулевого решения.*

*Доказательство* проводится с использованием теоремы Вейерштрасса о достижимости непрерывной функцией своих верхней и нижней граней на компакте.

Предположим, что существует допустимый вектор $e^*$ ($|e^*| = 1$) матрицы $X(t)$, удовлетворяющий равенству $\mathrm{colon}(Pe^*, F_k^{**}(e^*)) = 0$. Тогда согласно определению 2 $F_k^{**}(e)$ — вектор-форма порядка $k$ в некоторой окрестности точки $e^*$ и, следовательно, систему (15) можно свести к системе

$$Y\tau + \sum_{i=2}^{k} \overline{P}_i(e^*, \tau) + \overline{O}(\rho, |e|) = 0, \tag{16}$$

в которой $\tau = e - e^*$, $Y = \mathrm{colon}(P, D(e^*))$, $D(e^*)$ — значение матрицы Якоби вектор-функции $F_k^{**}(e)$ в точке $e^*$, $\sum\limits_{i=2}^{k} \overline{P}_i(e^*, \tau) = \mathrm{colon}\left(\underbrace{0, 0 \ldots 0}_{r}, \sum\limits_{i=2}^{k} P_i(e^*, \tau)\right)$, $P_i(e^*, \tau)$ — вектор-форма порядка $i$ относительно $\tau$, $\overline{O}(\rho, |e|) = \mathrm{colon}(\rho^{k-1} F_k^*(e) + o(\rho^{k-1}, |e|), O(\rho, |e|))$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \overline{O}(\rho, |e|) = 0$ равномерно относительно $e$ ($|e| \le \Delta$).

**Теорема 9.** *Если* $\mathrm{rang}\, Y = n$, $e^*_\alpha \neq 0$, *то задача* (1), (5) *разрешима.*

*Доказательство.* Пусть для определенности минор порядка $n$, отличный от нуля, расположен на первых $n$ столбцах матрицы $Y$. Тогда систему (16) можно записать в виде

$$M\tau_1 + N\tau_2 + Q_1(\tau_1) + Q_2(\tau_1, \tau_2) + \overline{O}(\rho, |e|) = 0,$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, $\det M_1 \neq 0$, $\lim\limits_{\tau_1 \to 0} Q_1(\tau_1)/|\tau_1| = 0$, $\lim\limits_{\tau_2 \to 0} Q_2(\tau_1, \tau_2) = 0$ равномерно относительно $\tau_1$ ($|\tau_1| \le d$), $d > 0$ — некоторое число.

Определим оператор $\Gamma_1$ равенством

$$\Gamma_1 \tau_1 = -M^{-1}(N\tau_2 + Q_1(\tau_1) + Q_2(\tau_1, \tau_2) + \overline{O}(\rho, |e|)).$$

В силу $\lim\limits_{\tau_1 \to 0} Q_1(\tau_1)/|\tau_1| = 0$ число $\delta \in (0, \min\{|e^*_\alpha|, d\})$ можно выбрать так, что при любом $\tau_1$ ($|\tau_1| \le \delta$) $|M^{-1}Q_1(\tau_1)| < \delta/4$. Из определения $Q_1(\tau_1)$, $Q_2(\tau_1, \tau_2)$, $\overline{O}(\rho, |e|)$ следует непрерывность оператора $\Gamma_1$ на множестве $\{\tau_1 \in E_n : |\tau_1| \le \delta\}$ и число $\delta_1 \in (0, \delta]$ можно выбрать так, что при любых $\tau_2$ ($|\tau_2| < \delta_1$), $\rho \in (0, \delta_1)$ будут выполнены неравенства $|M^{-1}N\tau_2| < \delta/4$, $|M^{-1}Q_2(\tau_1, \tau_2)| < \delta/4$, $|M^{-1}\overline{O}(\rho, |e|)| < \delta/4$. Отсюда при любых фиксированных $\tau_2$ ($|\tau_2| < \delta_1$), $\rho \in (0, \delta_1)$, при любом $\tau_1$ ($|\tau_1| \le \delta$) $|\Gamma_1 \tau_1| < \delta$, т.е. оператор $\Gamma_1$ имеет неподвижную точку.

Фиксируем $\tau^*_2$ ($|\tau^*_2| < \delta_1$), $\rho^* \in (0, \delta_1)$. Пусть $\tau^*_1$ ($|\tau^*_1| \le \delta$) — неподвижная точка оператора $\Gamma_1$. Тогда $(\rho^*, \overline{e})$, $\overline{e} = e^* + \tau^*$, $\tau^* = (\tau^*_1, \tau^*_2)$, — решение системы (16), $\gamma^* = (\alpha^*, \lambda^*)$, $\alpha^* = \rho^* \overline{e}_\alpha$, $\overline{e}_\alpha \neq 0$, $\lambda^* = \rho^* \overline{e}_\lambda$, $\overline{e} = (\overline{e}_\alpha, \overline{e}_\lambda)$, — решение системы (13), задача (1), (5) разрешима. □

Предположим, что $\mathrm{rang}\, Y = r_1 < n$, $r_1 \ge r \ge 0$, $\overline{P}_j(e^*, \tau)$ — наименьшая тождественно не равная нулю вектор-форма порядка $j$ относительно $\tau$. Тогда $\sum\limits_{i=2}^{k} \overline{P}_i(e^*, \tau) = \overline{P}_j(e^*, \tau) + o(|\tau|^j)$. Система (16) примет вид

$$Y\tau + \overline{P}_j(e^*, \tau) + o(|\tau|^j) + \overline{O}(\rho, |e|) = 0. \tag{17}$$

Система уравнений (17) в основном совпадает с системой (13). Поэтому, применив к системе (17) метод исследования системы (13), получим, что условия существования (или отсутствия) решения задачи (1), (5) будут определяться теоремами, аналогичными теоремам 8 и 9.

Если условия теорем типа 8 и 9 для системы (17) не выполнены, метод определения условий разрешимости задачи (1), (5) для системы (16) может быть применен и далее. Алгоритм поиска условий разрешимости задачи (1), (5) будет закончен, как только получена система уравнений, для которой справедлива одна из теорем типа 8 или 9, в противном случае алгоритм может быть продолжен неограниченно, задача (1), (5) предложенным методом неразрешима.

Отметим, что теоремы 8 и 9 доказаны в предположении, что $e^*$ — допустимый вектор матрицы $X(t)$.

Можно убедиться, что если фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$ представима равенством $X(t) = \operatorname{diag}(\exp \mu_i t, i \in \{1, 2, \ldots, k\}, [\operatorname{colon}(\cos \nu_j t \exp u_j t, -\sin \nu_j t \exp u_j t), \operatorname{colon}(\sin \nu_j t \exp u_j t, \cos \nu_j t \exp u_j t)], j \in \{1, 2, \ldots, p\})$, $k + 2p = n$, то ее допустимым будет вектор $e \in E_n$, определенный равенством $e = (e_i, i \in \{1, 2, \ldots, k\}, e_j^{(1)}, e_j^{(2)}, j \in \{1, 2, \ldots, p\})$, в котором при любых $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ $e_i \neq 0$ либо $e_j^1 \neq 0$, $e_j^2 = 0$, либо $e_j^1 = 0$, $e_j^2 \neq 0$, матрица $I(t)$ определится равенством (9). В частности, при условии, что $e_i > 0$, $e_j^1 = 0$, $e_j^2 > 0$, для любых $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ $I(t) = \max\limits_{\tau \in [h(t), t]} X(\tau)$.

**Пример.** Рассмотрим уравнение (1), в котором матрица $A = \operatorname{diag}(0, [\operatorname{colon}(0, -1), \operatorname{colon}(1, 0)])$, $B = [\operatorname{colon}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \operatorname{colon}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1), \operatorname{colon}(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2)]$, $h(t) = 0$, $f(t, x(t), \max\limits_{\tau \in [0,t]} x(\tau), \lambda) = \operatorname{colon}(2x^2(t) \cos t + 4\lambda_1 x(t) \max\limits_{\tau \in [0,t]} x(\tau), 4x^2(t) \max\limits_{\tau \in [0,t]} x(\tau) - 2\lambda_2^2 \cos t \max\limits_{\tau \in [0,t]}{}^3 x(\tau), 5\lambda_3 \max\limits_{\tau \in [0,t]}{}^2 x(\tau) + 2x^3(t) \sin t)$. Фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$ $X(t) = [\operatorname{colon}(1, 0, 0), \operatorname{colon}(0, \cos t, -\sin t), \operatorname{colon}(0, \sin t, \cos t)]$, $X(2\pi) - E = 0$, — матрица $S(t, \max\limits_{\tau \in [0,t]} X(\tau)\alpha) = [\operatorname{colon}(\alpha_1, -\sin t(\max\limits_{\tau \in [0,t]} \sin \tau \alpha_3) + \cos t(\max\limits_{\tau \in [0,t]} \cos \tau \alpha_3), \cos t(\max\limits_{\tau \in [0,t]} \sin \tau \alpha_3) + \sin t(\max\limits_{\tau \in [0,t]} \cos \tau \alpha_3)), \operatorname{colon}(\max\limits_{\tau \in [0,t]} \sin \tau \alpha_3, \alpha_1 \cos t - \sin t(\max\limits_{\tau \in [0,t]} \cos \tau \alpha_3), \alpha_1 \sin t + \cos t(\max\limits_{\tau \in [0,t]} \cos \tau \alpha_3)), \operatorname{colon}(\max\limits_{\tau \in [0,t]} \cos \tau \alpha_3, -\alpha_1 \sin t + \cos t(\max\limits_{\tau \in [0,t]} \sin \tau \alpha_3), \alpha_1 \cos t + \sin t(\max\limits_{\tau \in [0,t]} \sin \tau \alpha_3))]$ при $\alpha_2 = 0$.

Непосредственным вычислением устанавливаем, что при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ $\det \int\limits_0^{2\pi} X^{-1}(t) S^*(t, \max\limits_{\tau \in [0,t]} X(\tau)\alpha) dt \neq 0$. Тогда по теореме 7 задача (1), (5) ($\omega = 2\pi$) разрешима.

## Литература


[1] Азбелев Н.В., Ермолаев М.Б., Симонов П.М. *К вопросу об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений по первому приближению* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 10. – С. 3–9.

[2] Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Функционально-дифференциальные уравнения и теория устойчивости уравнений с последействием* // Вестн. ПГТУ. Функц.-дифференц. уравнения. – 2002. – С. 52–69.

[3] Ермолаев М.Б. *Устойчивость решений некоторых классов существенно нелинейных функционально-дифференциальных уравнений*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Ижевск. – 1995.

[4] Магомедов А.Р., Набиев Г.М. *О некоторых вопросах устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с максимумами* // ДАН АзССР. – 1986. – Т. 42. – № 2. – С. 3–6.

[5] Bainov D.D., Voulov H.D. *Differential equations with maximum: stability of solutions.* – Sofia, 1992. – 100 p.

[6] Петухов А.Р. *Вопросы качественного исследования решений уравнений с "максимумами"* // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 4. – С. 116–119.

[7] Магомедов А.Р., Рябов Ю.А. *О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений с максимумами* // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-тех. и матем. наук. – 1975. – № 2. – С. 76–83.

[8] Магомедов А.Р., Рябов Ю.А. *Дифференциальные уравнения с максимумами.* – Баку: Ин-т Косм. исслед. АН АзССР, 1964. – 42 с.

[9] Магомедов А.Р. *О некоторых вопросах дифференциальных уравнений с максимумами* // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-тех. и матем. наук. – 1977. – № 1. – С. 104–108.

[10] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 278 с.

[11] Максимов В.П. *Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды.* – Пермь: Изд-во ПГУ, ПСИ, ПССГК, 2003. – 306 с.

[12] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Ин. лит., 1958. – 475 с.

*М.Т. Терёхин*

*профессор, кафедра математического анализа,*
*Рязанский государственный университет,*
*ул. Свободы, д. 46, Рязань, 390000,*

e-mail: m.terehin@rsu.edu.ru

*В.В. Кирюшкин*

*ассистент, кафедра математического анализа,*
*Рязанский государственный университет,*
*ул. Свободы, д. 46, Рязань, 390000,*

e-mail: m.terehin@rsu.edu.ru

*M.T. Teryokhin*

*Professor, Chair of Mathematical Analysis,*
*Ryazan State University,*
*46 Svobody str., Ryazan, 390000 Russia,*

e-mail: m.terehin@rsu.edu.ru

*V.V. Kiryushkin*

*Assistant, Chair of Mathematical Analysis,*
*Ryazan State University,*
*46 Svobody str., Ryazan, 390000 Russia,*

e-mail: m.terehin@rsu.edu.ru