ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 9 (484)

УДК 517.946

Э.Д. ХУСАИНОВА

О НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ С ОБЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

Пусть $E_3^{++} = \{(x,y,z) \in E_3 : y > 0,\ z > 0\}$ — четверть трехмерного пространства E_3. Непересекающиеся поверхности $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$ разбивают область E_3^{++} на три части. Внутреннюю часть обозначим через $T^{(1)}$, среднюю — через $T^{(2)}$, внешнюю — через $T^{(3)}$. Также обозначим $S_R^{(j)} = S_R \cap T^{(j)}, T_R^{(j)} = Q_R \cap T^{(j)}$, $j = \overline{1,3}$, где $Q_R = \{|x| < R\}$, $S_R = \{|x| = R\}$, $\Gamma^{(0)} = \{z = 0,\ y > 0\}$, $\Gamma' = \{y = 0,\ z > 0\}$. Полуплоскости $\Gamma^{(0)}$, Γ' представляют собой общую границу областей $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ и $T^{(3)}$.

В работе рассматривается следующая задача. Требуется найти решения уравнений

$$\Delta_B u_j + \lambda_j^2 u_j = 0, \quad j = \overline{1,3}, \tag{1}$$

где $\Delta_B = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{k}{z}\frac{\partial}{\partial z}$, $k > 0$, в областях соответственно $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$, удовлетворяющие на $\Gamma^{(j)}$, $j = 1,2$, условиям сопряжения

$$u_j^+ - u_{j+1}^- = f_j(P), \quad \frac{1}{\alpha_j}\frac{\partial u_j^+}{\partial n_P} - \frac{1}{\alpha_{j+1}}\frac{\partial u_{j+1}^-}{\partial n_P} = \varphi_j(P), \quad j = 1,2, \tag{2}$$

при $R \to \infty$ условиям излучения

$$\int_{S_R^3} |u_3|^2 z^k dS_R^{(3)} = O(1), \quad \int_{S_R^3} \left|\frac{\partial u_3}{\partial r} - i\lambda_3 u_3\right|^2 z^k dS_R^{(3)} = o(1), \tag{3}$$

а также граничным условиям

$$u_j|_{\Gamma'} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial z}\Big|_{\Gamma^{(0)}} = 0. \tag{4}$$

В условиях сопряжения (2) величины со знаками "+" и "−" обозначают предельные значения соответствующих функций при приближении к $\Gamma^{(j)}$ соответственно из $T^{(j)}$ и $T^{(j+1)}$; $\frac{\partial}{\partial n_P}$ означает производную по нормали к $\Gamma^{(j)}$ в точке $P \in \Gamma^{(j)}$, внешней по отношению к области $T^{(j)}$; $f_j(P)$, $\varphi_j(P)$ — заданные на $\Gamma^{(j)}$ непрерывные функции.

1. *О некоторых частных решениях уравнения Гельмгольца с оператором Бесселя.* Решения уравнений (1) ищем в виде

$$u_j(M) = R_j(r) \cdot Y(\theta), \tag{5}$$

где $R_j(r)$ — функция, зависящая только от $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а функция $Y(\theta)$ зависит от угловых координат $\theta = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ при условии, что функции (5) будут удовлетворять уравнению (1) и при $R \to \infty$ — условиям излучения (3). Подставив (5) в (1) и разделив найденное в результате подстановки равенство на $R_j Y(\theta)/r^2$, получим

$$\frac{r^2\frac{d^2R_j}{dr^2} + (k+2)r\frac{dR_j}{dr} + \lambda_j^2 r^2 R_j}{R_j} = -\frac{\Delta_B(\theta)Y(\theta)}{Y(\theta)}.$$

Это равенство возможно лишь тогда, когда его левая и правая части равны постоянной. Обозначая эту постоянную через μ, получаем

$$r^2\frac{d^2R_j}{dr^2}+(k+2)r\frac{dR_j}{dr}+(\lambda_j^2r^2-\mu^2)R_j=0,\quad j=\overline{1,3}, \tag{6}$$
$$-\Delta_B(\theta)Y(\theta)=\mu Y(\theta).$$

Известно [1], что значения $\mu_m^2=m(m+k+1)$, $m=0,1,2,\ldots,$ — суть собственные числа оператора $\Delta_B(\theta)$ кратности $\sigma(m)$, а соответствующие собственные функции $Y_{ms}^k(\theta)$, $m=0,1,2,\ldots$, $s=\overline{1,\sigma(m)}$, названные весовыми сферическими функциями, образуют полную ортонормированную систему в $L_{2k}(S_1)$, где S_1 — единичная сфера с центром в начале координат. Уравнение (6) при $\mu=\mu_m^2$ принимает вид

$$r^2\frac{d^2R_{jm}}{dr^2}+(k+2)r\frac{dR_{jm}}{dr}+(\lambda_j^2r^2-\mu_m^2)R_{jm}=0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$R_{jm}=A_{jm}r^{-\frac{k+1}{2}}J_{p_m}(\lambda_jr)+B_{jm}r^{-\frac{k+1}{2}}Y_{p_m}(\lambda_jr),$$

где $J_{p_m}(t)$ — бесселева функция первого рода порядка p_m, $Y_{p_m}(t)$ — бесселева функция второго рода порядка p_m, $p_m=\sqrt{(k+1)^2+4\mu_m^2}/2$. Здесь A_m и B_m — произвольные постоянные. Их найдем из требования, чтобы функции $R_{jm}(r)Y_{ms}^k(\theta)$ были регулярными решениями в областях $T^{(j)}$, а решение $R_{3m}(r)Y_{ms}^k(\theta)$ удовлетворяло при $R\to\infty$ условиям излучения (3). Из формул разложения функции Бесселя $J_\nu(t)$ в степенной ряд и асимптотического разложения функции Ганкеля $H_\nu^{(1)}(t)$ следует, что решение $R_{jm}(r)Y_{ms}^k(\theta)$ удовлетворяет вышеуказанным требованиям, если $B_{1m}=B_{2m}=0$, $B_{3m}=A_{3m}\cdot i$ (i — мнимая единица). Таким образом, искомые частные решения при $A_{jm}=1$ могут быть представлены в виде

$$u_{lms}(r,\ \theta)=\sigma_{lm}(r)Y_{ms}^k(\theta)=r^{-\frac{k+1}{2}}\cdot J_{p_m}(\lambda_lr)Y_{ms}^k(\theta),\quad l=1,2,3.$$

2. *Единственность решения задачи дифракции с общей границей.* Доказана следующая теорема единственности.

Теорема. *Сингулярная задача дифракции* (1)–(4) *не может иметь более одного решения.*

3. *Решение сингулярной задачи дифракции с общей границей методом потенциалов.*
Известно [2], что функции

$$\psi_j(r)=\frac{1}{2i}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)^\nu r^{-\nu}H_\nu^{(1)}(\lambda_jr)\Big/\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right),\quad j=\overline{1,3}, \tag{7}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\nu=\frac{k}{2}$, являются фундаментальными решениями (ф. р.) уравнений (1) с особенностью в начале координат. Они удовлетворяют условиям излучения (3). Если к функциям (7) применим оператор обобщенного сдвига $T_{x,y,z}^{\xi,\eta,\zeta}$, то получим ф. р. с особенностью в произвольной точке $M(\xi,\eta,\zeta)$.

Образуем с помощью функций

$$g_j(M,P)=\frac{1}{2i}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)^\nu\left[T_{x,y,z}^{\xi,\eta,\zeta}r^{-\nu}H_\nu^{(1)}(\lambda_jr)-T_{x,y,z}^{\xi,-\eta,\zeta}r^{-\nu}H_\nu^{(1)}(\lambda_jr)\right]\Big/\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right),\quad j=\overline{1,3},$$

поверхностные потенциалы типа простого и двойного слоев

$$V_1(M,\ \mu_1)=\int_{\Gamma^{(1)}}\mu_1(P)g_1(M,P)\zeta^k d_P\Gamma^{(1)},$$

$$V_2(M,\mu_1)=\int_{\Gamma^{(1)}}\mu_1(P)g_2(M,P)\zeta^k d_P\Gamma^{(1)},\quad P\in\Gamma^{(1)},$$

$$V_2(M,\mu_3)=\int_{\Gamma^{(2)}}\mu_3(P)g_2(M,P)\zeta^k d_P\Gamma^{(2)},$$

$$V_3(M,\mu_3)=\int_{\Gamma^{(2)}}\mu_3(P)g_3(M,P)\zeta^k d_P\Gamma^{(2)},\quad P\in\Gamma^{(2)},$$

$$W_1(M,\mu_2)=\int_{\Gamma^{(1)}}\mu_2(P)\frac{\partial}{\partial n_P}g_1(M,P)\zeta^k d_P\Gamma^{(1)},$$

$$W_2(M,\mu_2)=\int_{\Gamma^{(1)}}\mu_2(P)\frac{\partial}{\partial n_P}g_2(M,P)\zeta^k d_P\Gamma^{(1)},\quad P\in\Gamma^{(1)},$$

$$W_2(M,\mu_4)=\int_{\Gamma^{(2)}}\mu_2(P)\frac{\partial}{\partial n_P}g_2(M,P)\zeta^k d_P\Gamma^{(2)},$$

$$W_3(M,\mu_4)=\int_{\Gamma^{(2)}}\mu_4(P)\frac{\partial}{\partial n_P}g_3(M,P)\zeta^k d_P\Gamma^{(2)},\quad P\in\Gamma^{(2)}.$$

Очевидно, они являются решениями уравнений (1) соответственно в областях $T^{(j)}$, $j=\overline{1,3}$. Используя представление ганкелевой функции в виде ряда и свойства оператора обобщенного сдвига, получаем, что функции $g_j(M,P)$ имеют такую же особенность, что и ф. р. уравнения $\Delta_B u=0$. Поэтому потенциалы V_j и W_j, $j=\overline{1,3}$, имеют на соответствующих поверхностях $\Gamma^{(j)}$, $j=\overline{1,3}$, такие же предельные значения, что и их аналоги для уравнения $\Delta_B u=0$. Эти предельные значения на $\Gamma^{(1)}$ имеют вид

а) $V_j^{\pm}(P,\mu_1)=\widetilde{V_j}(P,\mu_1)$,

б) $\dfrac{\partial V_j^{\pm}(P,\mu_1)}{\partial n_P}=\pm\dfrac{\mu_1(P)}{2}+\dfrac{\partial\widetilde{V_j}(P,\mu_1)}{\partial n_P}$,

в) $W_j^{\pm}(P,\mu_2)=\mp\dfrac{\mu_2(P)}{2}+\widetilde{W_j}(P,\mu_2)$,

г) $\dfrac{\partial W_j^{+}(P,\mu_2)}{\partial n_P}-\dfrac{\partial W_j^{-}(P,\mu_2)}{\partial n_P}=0,\ P\in\Gamma^{(1)}$;

а на $\Gamma^{(2)}$ —

д) $V_{j+1}^{\pm}(P,\mu_3)=\widetilde{V_{j+1}}(P,\mu_3)$,

е) $\dfrac{\partial V_{j+1}^{\pm}(P,\mu_3)}{\partial n_P}=\pm\dfrac{\mu_3(P)}{2}+\dfrac{\partial\widetilde{V_{j+1}}(P,\mu_3)}{\partial n_P}$,

ж) $W_{j+1}^{\pm}(P,\mu_4)=\mp\dfrac{\mu_4(P)}{2}+\widetilde{W_{j+1}}(P,\mu_4)$,

з) $\dfrac{\partial W_{j+1}^{+}(P,\mu_4)}{\partial n_P}-\dfrac{\partial W_{j+1}^{-}(P,\mu_2)}{\partial n_P}=0,\ P\in\Gamma^{(2)},\ j=1,2.$

Здесь величины с волнистой линией обозначают так называемые прямые значения потенциалов и их нормальных производных на соответствующих поверхностях $\Gamma^{(j)}$, которые являются непрерывными функциями точки $P\in\Gamma^{(j)}$, а соответствующие ядра имеют слабую особенность на $\Gamma^{(j)}$.

Решение задачи (1)–(4) ищем в виде

$$u_1(M)=V_1(M,\mu_1)+W_1(M,\mu_2),$$

$$u_2(M)=V_2(M,\mu_1)+W_2(M,\mu_2)+V_2(M,\mu_3)+W_2(M,\mu_4),$$

$$u_3(M)=V_3(M,\mu_3)+W_3(M,\mu_4).$$

Эти функции являются решениями уравнений (1) соответственно в областях $T^{(j)}$, $j = \overline{1,3}$, удовлетворяют граничным условиям (4), и функция $u_3(M)$ удовлетворяет условиям излучения (3).

Неизвестные плотности μ_j, $j = \overline{1,4}$, найдем из требования, чтобы эти функции удовлетворяли условиям сопряжения (2). Подставляя их в эти условия, с учетом формул а)–з), получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая однозначно разрешима, что означает эквивалентность задачи дифракции (1)–(4) с этой системой интегральных уравнений и, следовательно, однозначную разрешимость задачи дифракции.

Литература

1. Ляхов Л.Н. *Весовые сферические функции и сингулярные псевдодифференциальные операторы* // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21. – № 6. – С. 1020–1032.
2. Мухлисов Ф.Г. *О существовании и единственности решения некоторых уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя.* I // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 1. – С. 66–74.

Казанский государственный педагогический университет

Поступила 06.07.2001