ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 9 (484)

УДК 517.53

А.М. ГАЙСИН, И.Д. ЛАТЫПОВ

АСИМПТОТИКА ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ИЗМЕНЕННОГО РЯДА ДИРИХЛЕ

1. Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = a < \infty. \tag{1}$$

Через $D(\Lambda, R)$ обозначим класс всех функций F, представимых во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{2}$$

и имеющих конечный порядок ρ_R по Ритту (R-порядок). Напомним, что [1]

$$\rho_R(F) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma},$$

где $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$.

Из условия (1) следует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0. \tag{3}$$

Так что ряд (2) сходится во всей плоскости абсолютно, а его сумма F — целая функция [1]. Известно, что при условии (3) величина ρ_R может быть вычислена по формуле [1]:

$$-\frac{1}{\rho_R} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n \ln \lambda_n}. \tag{4}$$

Наряду с (2) введем ряд

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}, \tag{5}$$

где последовательность $\{b_n\}$ комплексных чисел b_n ($b_n \neq 0$ при $n \geq N$) удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|b_n|}{\lambda_n} < \infty. \tag{6}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00655.

Тогда ряд (5) абсолютно сходится во всей плоскости, а F^* — целая функция. Более того, если $F \in D(\Lambda, R)$, то из условия (6) и формулы (4) для вычисления R-порядка следует $F^* \in D(\Lambda, R)$. В дальнейшем будем предполагать

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln(|b_n| + |b_n|^{-1}) < \infty. \tag{7}$$

Это позволит рассматривать также абсолютно сходящиеся во всей плоскости ряды Дирихле

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n b_n^{-1} e^{\lambda_n s},$$

имеющие конечный порядок по Ритту.

Пусть $E \subset [0, \infty)$ — измеримое по Лебегу множество.

Верхней DE и нижней dE плотностями множества E называются величины

$$DE = \varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\operatorname{mes}(E \cap [0, \sigma])}{\sigma}, \quad dE = \varliminf_{\sigma\to\infty} \frac{\operatorname{mes}(E \cap [0, \sigma])}{\sigma}.$$

Верхней $D_{\ln}E$ и нижней $d_{\ln}E$ логарифмическими плотностями множества E называются величины

$$D_{\ln}E = \varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\ln\sigma} \int_{E\cap[0,\sigma]} \frac{dt}{t}, \quad d_{\ln}E = \varliminf_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\ln\sigma} \int_{E\cap[0,\sigma]} \frac{dt}{t}.$$

В дальнейшем считаем, что все исключительные множества $E \subset [0, \infty)$, вне которых будут получены асимптотические оценки, представляют собой объединения отрезков вида $[a_n, a'_n]$, где

$$0 < a_1 < a'_1 \le a_2 < a'_2 \le \dots \le a_n < a'_n \le \cdots$$

Через L обозначим класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ положительных функций $w = w(x)$. Пусть

$$W = \left\{ w \in L : \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}, \quad \overline{W} = \left\{ w \in L : \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \int_1^x \frac{w(t)}{t^2} dt = 0 \right\},$$
$$\underline{W} = \left\{ w \in L : \sqrt{x} \le w(x) = o(x \ln x),\ x \to \infty,\ \varliminf_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \int_1^x \frac{w(t)}{t^2} dt = 0 \right\}.$$

Через $D(\Lambda)$ обозначим класс всех функций F, представимых во всей плоскости рядами Дирихле (2). Пусть $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ — максимальные члены рядов (2) и (5) соответственно, т. е.

$$\mu(\sigma) = \max_{n\ge1}\{|a_n| e^{\lambda_n\sigma}\}, \quad \mu^*(\sigma) = \max_{n\ge1}\{|a_n|\,|b_n| e^{\lambda_n\sigma}\}.$$

В [2] доказана

Теорема. *Для того чтобы для любой функции $F \in D(\Lambda)$ при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной лебеговой меры имело место асимптотическое равенство*

$$\ln\mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln\mu^*(\sigma),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w \in W$ такая, что

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \le e^{w(\lambda_n)}, \quad n \ge N. \tag{8}$$

Целью статьи является доказательство аналогичной теоремы для функции F из класса $D(\Lambda, R)$.

2. Основная лемма

Здесь доказывается один из вариантов следующей теоремы [3].

Теорема 1 (Борель–Неванлинна). *Пусть на интервале* $[r_0,\infty)$ *задана неубывающая непрерывная функция* $u(r)$, $u(r)\to\infty$ *при* $r\to\infty$, $\varphi(u)$ — *положительная невозрастающая и непрерывная на интервале* $[u_0,\infty)$ $(u_0=u(r_0))$ *функция,* $\varphi(u)\to 0$ *при* $u\to\infty$, *причем*

$$\int_{u_0}^{\infty}\varphi(u)du<\infty.$$

Тогда для всех $r\geq r_0$, *кроме, возможно, множества конечной меры, выполняется оценка*

$$u(r+\varphi(u(r)))<u(r)+1.$$

Имеет место следующая лемма типа Бореля–Неванлинны.

Лемма 1. *Пусть* $u(\sigma)$ — *неубывающая непрерывная на* $[0,\infty)$ *функция,* $u(\sigma)\to\infty$ *при* $\sigma\to\infty$. *Пусть* $w\in L$, $v=v(\sigma)$ — *решение уравнения*

$$w(v)=e^{u(\sigma)}. \tag{9}$$

Если

$$\frac{w(v(\sigma))}{\sigma v(\sigma)}=o(1),\quad \sigma\to\infty, \tag{10}$$

а для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$ $(0<\tau_j\uparrow\infty)$

$$\lim_{\tau_j\to\infty}\frac{1}{\tau_j}\int_1^{v(\tau_j)}\frac{w(t)}{t^2}dt=0, \tag{11}$$

то при $\sigma\to\infty$ *вне некоторого множества* $E\subset[0,\infty)$, $\mathrm{mes}(E\cap[0,\tau_j])=o(\tau_j)$, $\tau_j\to\infty$, *имеет место асимптотическая оценка*

$$u(\sigma+\frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)})<u(\sigma)+o(1).$$

Доказательство. Найдется функция $w^*(t)=\beta(t)w(t)$ $(0<\beta(t)\uparrow\infty,\ t\to\infty)$ из класса L, также удовлетворяющая условиям (10), (11) леммы. Покажем, что вне некоторого множества $E\subset[0,\infty)$ отрезков $[\sigma_n,\sigma_n']$ $(0<\sigma_1<\sigma_1'\leq\sigma_2<\sigma_2'\leq\cdots\leq\sigma_n<\sigma_n'\leq\cdots)$, $\mathrm{mes}(E\cap[0,\tau_j])=o(\tau_j)$, $\tau_j\to\infty$, выполняется оценка

$$u\Big(\sigma+\frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\Big)<u(\sigma)+\frac{1}{\beta(v(\sigma))}\,. \tag{12}$$

Действительно, пусть e — замкнутое множество, на котором

$$u\Big(\sigma+\frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\Big)\geq u(\sigma)+\frac{1}{\beta(v(\sigma))}\,. \tag{13}$$

Положим $e(\sigma)=e\cap[\sigma,\infty)$. Если $e(\sigma)=\emptyset$ для некоторого $\sigma\geq 0$, то лемма справедлива. В противном случае через σ_1 обозначим наименьшее число такое, что $\sigma_1\geq 0$ и $\sigma_1\in e$.

Пусть σ_1' — наименьшее из тех σ, для которых $u(\sigma)=u(\sigma_1)+\frac{1}{\beta(v(\sigma_1))}$. Тогда из (13) следует $0<\sigma_1'-\sigma_1\leq\frac{w(v(\sigma_1))}{v(\sigma_1)}$.

Пусть $\sigma_2=\inf\{\sigma:\sigma\in e(\sigma_1')\}$. Возьмем за σ_2' наименьшее из всех σ, для которых $u(\sigma)=u(\sigma_2)+\frac{1}{\beta(v(\sigma_2))}$. Ясно, что $0<\sigma_2'-\sigma_2\leq\frac{w(v(\sigma_2))}{v(\sigma_2)}$, $u(\sigma_2)-u(\sigma_1)\geq\frac{1}{\beta(v(\sigma_1))}$. Рассуждая далее по индукции, найдем последовательности $\{\sigma_n\}$, $\{\sigma_n'\}$ такие, что

$$0<\sigma_n'-\sigma_n\leq\frac{w(v(\sigma_n))}{v(\sigma_n)},\quad u(\sigma_n)-u(\sigma_{n-1})\geq\frac{1}{\beta(v(\sigma_{n-1}))}, \tag{14}$$

причем $e \subset E$, где $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\sigma_n, \sigma'_n]$.

Пусть $v_n = v(\sigma_n)$, $\delta_n = \frac{w(v_n)}{v_n}$, $n \geq 1$. Для любого $j \geq 1$ найдется $k \geq 2$ такое, что $\sigma_{k-1} \leq \tau_j < \sigma_k$. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{mes}(e \cap [0, \tau_j])}{\tau_j} \leq \frac{\operatorname{mes}(E \cap [0, \tau_j])}{\tau_j} = \frac{1}{\tau_j} \sum_{n=1}^{k-1} \delta_n, \quad \delta_n = \frac{w(v_n)}{v_n}. \tag{15}$$

Если $2v_n \leq v_{n+1}$, то

$$\delta_n \leq 2 \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w(t)}{t^2} dt < 2 \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w^*(t)}{t^2} dt. \tag{16}$$

Если $2v_n > v_{n+1}$, то с учетом (9), (14) и монотонности функций $w = w(t)$ и $\beta = \beta(t)$ имеем

$$\delta_n \leq \frac{w^*(v_n)}{v_n}[u(\sigma_{n+1}) - u(\sigma_n)] \leq \frac{w^*(v_n)}{v_n} \int_{v_n}^{v_{n+1}} d \ln w^*(t) \leq$$

$$\leq 2 \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w^*(t)}{t} d \ln w^*(t) = 2 \left(\frac{w^*(v_{n+1})}{v_{n+1}} - \frac{w^*(v_n)}{v_n} + \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w^*(t)}{t^2} dt \right). \tag{17}$$

Так как $\int\limits_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{dw^*(t)}{t} \geq 0$, то

$$\int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w^*(t)}{t^2} dt \leq \frac{w^*(v_{n+1})}{v_{n+1}} - \frac{w^*(v_n)}{v_n} + 2 \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w^*(t)}{t^2} dt.$$

Поэтому из (16), (17) заключаем, что всегда

$$\delta_n \leq 2 \left[\frac{w^*(v_{n+1})}{v_{n+1}} - \frac{w^*(v_n)}{v_n} \right] + 4 \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w^*(t)}{t^2} dt, \quad n \geq 1.$$

Следовательно, из (15) получаем, что если $\sigma_{k-1} \leq \tau_j < \sigma_k$, то

$$\operatorname{mes}(E \cap [0, \tau_j]) \leq 2 \frac{w^*(v_{k-1})}{v_{k-1}} + 4 \int_{v_1}^{v_{k-1}} \frac{w^*(t)}{t^2} dt \leq 2 \frac{w^*(v_{k-1})}{v_{k-1}} + 4 \int_{v_1}^{v(\tau_j)} \frac{w^*(t)}{t^2} dt. \tag{18}$$

Таким образом, учитывая (10), (11), из (18) окончательно получаем, что если $\sigma_{k-1} \leq \tau_j < \sigma_k$ и $\tau_j \to \infty$, то

$$\operatorname{mes}(E \cap [0, \tau_j]) \leq \left[2 \frac{w^*(v(\sigma_{k-1}))}{v(\sigma_{k-1})} + 4 \int_{v_1}^{v(\tau_j)} \frac{w^*(t)}{t^2} dt \right] = o(\tau_j). \tag{19}$$

Поскольку оценка (12) справедлива при $\sigma \to \infty$ вне E, то лемма доказана.

Замечание 1. При более сильных ограничениях лемма доказана в [4].

3. Основные результаты

Будем говорить, что последовательность $\{b_n\}$ ($b_n \neq 0$ при $n \geq N$) $\overline{W}$-нормальна, если найдется функция $\theta \in \overline{W}$ такая, что $-\ln |b_n| \leq \theta(\lambda_n)$, $n \geq N$.

Справедлива

Теорема 2. *Пусть $\{b_n\}$ — последовательность комплексных чисел ($b_n \neq 0$ при $n \geq N$), удовлетворяющая условию (7).*

Для того чтобы для любой функции $F \in D(\Lambda, R)$ при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой нижней плотности имело место асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma),$$

достаточно, а для $\overline{W}$-нормальных последовательностей $\{b_n\}$ и необходимо, чтобы существовала функция $w \in \underline{W}$ такая, что

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \le e^{w(\lambda_n)}, \quad n \ge N. \tag{20}$$

Замечание 2. Если $\{b_n\} = \{\lambda_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ $(m = 1, 2, \dots)$, то из теоремы 2 вытекает, что для любой функции $F \in D(\Lambda, R)$ при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой нижней плотности

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu_m(\sigma),$$

где $\mu_m(\sigma)$ — максимальный член ряда

$$F^m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^m e^{\lambda_m s}.$$

Замечание 3. Если

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\ln |b_n|}{\lambda_n} = 0,$$

то последовательность $\{b_n\}$ $\overline{W}$-нормальна.

Пусть $P = \{p_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Через $S(P)$ обозначим класс всех целых трансцендентных функций

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \tag{21}$$

имеющих конечный порядок, т. е.

$$\rho = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} < \infty, \quad M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Тогда, полагая $z = e^s$, имеем

$$F(s) = f(e^s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{p_n s}, \quad s = \sigma + it.$$

Ясно, что $F \in D(P, R)$, если $f \in S(P)$. Кроме того, при отображении $|z| = r = e^{\sigma}$ множество нулевой нижней плотности переходит в множество нулевой нижней логарифмической плотности. Следовательно, из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть $\{b_n\}$ — последовательность комплексных чисел ($b_n \ne 0$ при $n \ge N$), удовлетворяющая при $\lambda_n = p_n$ условию (7).*

Для того чтобы для любой функции $f \in S(P)$ при $r \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой нижней логарифмической плотности имело место асимптотическое равенство

$$\ln \mu_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f^*(r),$$

достаточно, а для $\overline{W}$-нормальных последовательностей $\{b_n\}$ и необходимо, чтобы существовала функция $w \in \underline{W}$, для которой выполнялись бы оценки (20).

Здесь $\mu_f(r)$ — максимальный член ряда (21), а $\mu_f^*(r)$ — максимальный член измененного степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^{p_n}$.

4. Доказательство теоремы 2

Для доказательства теоремы 2 понадобятся некоторые свойства максимального члена ряда Дирихле (2), связанные с так называемым выпуклым полигоном Ньютона.

Напомним, как строится выпуклый полигон Ньютона для ряда Дирихле (2), абсолютно сходящегося во всей плоскости. Для этого отметим на плоскости XoY точки $P_n = (\lambda_n, g_n)$, где $g_n = -\ln|a_n|$. (Не умаляя общности, считаем $a_1 \neq 0$. Если $a_n = 0$, то полагаем $g_n = \infty$.) Поскольку ряд (2) сходится во всей плоскости, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} = -\infty. \tag{22}$$

Учитывая это, через $Q(F)$ обозначим выпуклую оболочку точек P_n $(n \geq 1)$. Пусть$\gamma(x) = \inf\{y : (x,y) \in Q(F)\}$. Линия, описываемая уравнением $y = \gamma(x)$ $(x \geq \lambda_1)$, называется диаграммой или выпуклым полигоном Ньютона для ряда (2) [1]. Из (22) следует, что диаграмма Ньютона (обозначим ее $L(F)$) есть выпуклая вниз ломаная линия.

Пусть$\gamma(\lambda_n) = G_n$, $n \geq 1$. Тогда $(\lambda_n, G_n) \in L(F)$. Для бесконечного множества значений λ_n, в частности, для абсцисс λ_{n_i}, $i \geq 1$, $n_1 = 1$, всех вершин полигона $L(F)$ имеем $G_n = -\ln|a_n|$. Отметим, что точка $P_n = (\lambda_n, -\ln|a_n|)$ лежит либо на полигоне $L(F)$ (точка P_{n_i} обязательно лежит на полигоне), либо над ним. Угловой коэффициент отрезка, соединяющего вершины P_{n_i} и $P_{n_{i+1}}$ полигона $L(F)$, равен

$$R_i = \frac{G_{n_{i+1}} - G_{n_i}}{\lambda_{n_{i+1}} - \lambda_{n_i}}, \quad i \geq 1, \quad \lambda_1 = 1.$$

Ясно, что $R_i \uparrow \infty$ при $i \to \infty$. Следовательно, при $R_{i-1} \leq \sigma < R_i$ центральный индекс $\nu(\sigma) = n_i = \text{const}$, а $\ln\mu(\sigma) = \ln|a_{n_i}| + \lambda_{n_i}\sigma$ [1]. Известно также, что функция $\mu(\sigma)$ непрерывна, $\mu(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \to \infty$.

Доказательство теоремы 2. Достаточность.

Пусть выполнено условие (20), где $w \in \underline{W}$. Тогда существует функция $w^* \in \underline{W}$ такая, что $w(x) = o(w^*(x))$ при $x \to \infty$.

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 3\ln\mu(\sigma). \tag{23}$$

Положим

$$R_v = \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j \sigma}, \quad h = \frac{w^*(v)}{v}, \quad v = v(\sigma).$$

Существует (это следует из условия (1)) $m \geq 1$ такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m} < \infty.$$

Следовательно,

$$R_v \leq \mu(\sigma + h) \sum_{\lambda_n > v} e^{-\lambda_n h} \leq \mu(\sigma + h) C_m \exp(\max_{t \geq v} \varphi(t)),$$

где $\varphi(t) = m\ln t - ht$, $C_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}$. Поскольку $\varphi'(t) = 0$ в точке t_0,

$$t_0 = \frac{m}{h} = m\frac{v}{w^*(v)} \leq m\frac{v}{\sqrt{v}} = m\sqrt{v} < v = v(\sigma)$$

при $\sigma \geq \sigma_0$, то при $\sigma \to \infty$

$$R_v \leq C_m \mu(\sigma + h) \exp[-v(1 + o(1))h] = C_m \mu(\sigma + h) \exp[-(1 + o(1)) w^*(v)]. \tag{24}$$

Положим $u(\sigma)=\ln 3+\ln\ln\mu(\sigma)$. Поскольку $\mu(\sigma)\le M(\sigma)$, а $F\in D(\Lambda,R)$, то

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{u(\sigma)}{\sigma}<\infty.$$

Следовательно, с учетом (23) при $\sigma\ge\sigma_0$ имеем

$$\ln w^*(v(\sigma))=u(\sigma)\le A\sigma,\quad 0<A<\infty.$$

Но $\sqrt{x}\le w^*(x)$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sigma}\le\frac{2A}{\ln v(\sigma)},\quad \sigma\ge\sigma_0. \tag{25}$$

Далее, поскольку $w^*\in\underline{W}$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{w^*(x)}{x\ln x}=0, \tag{26}$$

а для некоторой последовательности $\{t_j\}$ $(0<t_j\uparrow\infty)$

$$\lim_{t_j\to\infty}\frac{1}{\ln t_j}\int_1^{t_j}\frac{w^*(t)}{t^2}dt=0. \tag{27}$$

Значит, из (25), (26) следует

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{w^*(v(\sigma))}{\sigma v(\sigma)}=0.$$

Более того, если τ_j — корень уравнения $v(\sigma)=t_j$, то из (25), (27) получаем

$$\lim_{\tau_j\to\infty}\frac{1}{\tau_j}\int_1^{v(\tau_j)}\frac{w^*(t)}{t^2}dt=0.$$

Видим, что для пары функций u и w^* все условия основной леммы выполнены. Поэтому, применяя эту лемму и учитывая при этом (19), (25), (26), а также то, что $o(\ln v(\tau_j))=o(\tau_j)$, $\tau_j\to\infty$, при $\tau_j\to\infty$ вне некоторого множества $E_1\subset[0.\infty)$,

$$\operatorname{mes}(E_1\cap[0,\tau_j])\le o(\ln v(\tau_j))+4\int_{v(\tau_1)}^{v(\tau_j)}\frac{w^*(t)}{t^2}dt=o(\tau_j),\quad \tau_j\to\infty, \tag{28}$$

из (24) получаем

$$R_v\le C_m\mu(\sigma)^{1+o(1)}\exp[-w^*(v)(1+o(1))]=\mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}.$$

Значит, при $\sigma\ge\sigma_1$, $\sigma\notin E_1$, получаем $\lambda_{\nu(\sigma)}\le v(\sigma)$, где $\nu=\nu(\sigma)$ — центральный индекс ряда (2). Тогда с учетом (20) при $\sigma\to\infty$ вне E_1 имеем

$$\mu(\sigma)=|a_\nu|e^{\lambda_\nu\sigma}=|a_\nu b_\nu|e^{\lambda_\nu\sigma}|b_\nu|^{-1}\le\mu^*(\sigma)e^{w(\lambda_\nu)}\le\mu^*(\sigma)e^{w(v)}=\mu^*(\sigma)\mu(\sigma)^{o(1)}.$$

Это означает

$$(1+o(1))\ln\mu(\sigma)\le\ln\mu^*(\sigma). \tag{29}$$

Далее, поскольку $|b_n|\le e^{w(\lambda_n)}$, $n\ge N$, то при $k\ge N$

$$\mu^*(\sigma)=|a_k b_k|e^{\lambda_k\sigma}\le\mu(\sigma)e^{w(\lambda_k)}, \tag{30}$$

где $k=k(\sigma)$ — центральный индекс ряда (5).

Пусть $p=p(\sigma)$ — решение уравнения $w^*(p)=3\ln\mu^*(\sigma)$, а

$$R_p^*=\sum_{\lambda_n>p}|a_n b_n|e^{\lambda_n\sigma},\quad p=p(\sigma).$$

Поскольку $F^* \in D(\Lambda, R)$, то

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{u^*(\sigma)}{\sigma} < \infty, \quad u^*(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln \mu^*(\sigma).$$

Поэтому, применяя лемму, из тех же рассуждений, при помощи которых была получена оценка для R_v, получаем

$$R_p^* \le C_m \mu^*(\sigma)^{-2(1+o(1))}, \quad C_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m},$$

если $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E_2 \subset [0, \infty)$,

$$\operatorname{mes}(E_2 \cap [0, x_j]) \le o(\ln p(x_j)) + 4\int_{p(x_1)}^{p(x_j)} \frac{w^*(t)}{t^2} dt, \quad x_j \to \infty. \tag{31}$$

Здесь x_j — решение уравнения $p(\sigma) = t_j$, а $\{t_j\}$ — последовательность, фигурирующая в условии (27). Отсюда следует $\lambda_{k(\sigma)} \le p(\sigma)$, если $\sigma \ge \sigma_2$, $\sigma \notin E_2$. Следовательно, из (30) получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне E_2

$$\mu^*(\sigma) \le \mu(\sigma) e^{w(p(\sigma))} = \mu(\sigma)\mu^*(\sigma)^{o(1)},$$

т. е.

$$(1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma) \le \ln \mu(\sigma). \tag{32}$$

Рассмотрим последовательность $\{\tau_j^*\}$, где $\{\tau_j^*\} = \min(\tau_j, x_j)$. Поскольку $t_j = p(x_j) = v(\tau_j)$, то из оценок типа (25) получаем

$$\frac{1}{\tau_j^*} \le \frac{B}{\ln t_j}, \quad j \ge 1.$$

Следовательно, если $E = E_1 \cup E_2$, то, учитывая (28), (31), при $\tau_j^* \to \infty$ имеем

$$\frac{\operatorname{mes}(E \cap [0, \tau_j^*])}{\tau_j^*} \le \frac{B}{\ln t_j}(\operatorname{mes}(E_1 \cap [0, \tau_j]) + \operatorname{mes}(E_2 \cap [0, x_j])) \le$$
$$\le \frac{B}{\ln t_j}\left[o(\ln t_j) + 8\int_{t_1}^{t_j} \frac{w^*(t)}{t^2} dt\right] = o(1).$$

Таким образом, из (29), (32) окончательно получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне E, $dE = 0$,

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma).$$

Достаточность доказана.

Необходимость. Условие (20) равносильно предложению: существует функция $\varphi \in \underline{W}$ такая, что при $n \ge N$

$$1)\ |b_n| \le e^{\varphi(\lambda_n)}; \quad 2)\ |b_n|^{-1} \le e^{\varphi(\lambda_n)}.$$

Действительно, то, что 1), 2) следуют из (20), очевидно. Обратно, из 1), 2) имеем

$$|b_n| + |b_n|^{-1} \le 2e^{\varphi(\lambda_n)}, \quad n \ge N.$$

Следовательно, (20) имеет место с мажорантой $w(x) = \ln 2 + \varphi(x)$. Значит, если последовательность $\{b_n\}$ $\overline{W}$-нормальна, а условие (20) не выполнено, то для последовательности

$$\{\ln |b_n|\}_{n=N}^{\infty}$$

не существует мажоранты вида $\varphi(\lambda_n)$, где $\varphi \in \underline{W}$. Поскольку последовательность $\{b_n\}$ удовлетворяет условию (7), то $\alpha(t) = o(t \ln t)$, $t \to \infty$, и, следовательно, учитывая определение класса $\underline{W}$, получаем

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\ln r} \int_{\lambda_N}^{r} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt > 0, \tag{33}$$

где $\alpha(t) = \max\limits_{\lambda_n \le t} \{\ln |b(\lambda_n)| : n \ge N\}$, $b(\lambda_n) = b_n$. Не теряя общности, можем считать, что $\alpha(t) > 0$ при $t \ge \lambda_N$. Ясно, что $\alpha(t)$ — неубывающая ступенчатая функция, непрерывная справа. Заметим, что $\alpha(t)$ является наименьшей неубывающей мажорантой последовательности $\{\ln |b_n|\}_{n=N}^{\infty}$.

Пусть $t_0 = \lambda_N$, а $\{t_n\}$ — последовательность всех точек разрыва функции $\alpha(t)$. Тогда $\alpha(t) = \alpha_n$ при $t_n \le t < t_{n+1}$, $n \ge 0$. Ясно, что $t_n = \lambda_{j_n}$, $n \ge 1$. Далее, из (33) следует

$$\frac{1}{\ln t_n} \int_{\lambda_N}^{t_n} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt \ge \beta > 0, \quad n \ge 1. \tag{34}$$

Введем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$x_n = \frac{G_{n+1} - G_n}{t_{n+1} - t_n}, \quad G_n = t_n I(t_n),$$

где

$$I(t_n) = \int_{\lambda_N}^{t_n} \frac{g(t)}{t^2} dt, \quad g(t) = q\alpha(t), \quad 0 < q < 1, \quad n \ge 1.$$

Проверяется, что

$$x_n = I(t_n) + \frac{t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} \int_{\lambda_N}^{t_n} \frac{g(t)}{t^2} dt.$$

Поскольку $I(t_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Из неубывания функции $g(t)$ также следует $x_n < x_{n+1}$, $n \ge 1$. Таким образом, $0 < x_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$.

Пусть $P_n = (t_n; G_n)$. Поскольку $0 < x_n \uparrow \infty$, то $\{P_n\}$ есть последовательность вершин, а совокупность всех отрезков прямых $y = \varphi_n(x)$, соединяющих точки P_n и P_{n+1}, $n \ge 0$, есть выпуклый полигон Ньютона L для ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k s}, \quad s = \sigma + it, \tag{35}$$

где

$$a_k = \begin{cases} e^{-G_n}, & \text{если } k = j_n \ (\lambda_{j_n} = t_n); \\ 0, & \text{если } k \ne j_n. \end{cases} \tag{36}$$

Заметим, что $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность центральных индексов ряда (36), абсолютно сходящегося во всей плоскости. Имея это в виду, оценим максимальный член ряда (35) сверху.

Для $x_{n-1} \le \sigma < x_n$ имеем

$$\ln \mu(\sigma) = t_n(-I(t_n) + \sigma) < \frac{t_n t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{g(t)}{t^2} dt = q\alpha_n, \quad n \ge 1.$$

С другой стороны,

$$\mu^*(\sigma) \ge |a_{j_n} b_{j_n}| e^{\lambda_{j_n} \sigma}, \quad \lambda_{j_n} = t_n, \ \ n \ge 1.$$

Поскольку $b_{j_n} = e^{\alpha(t_n)} = e^{\alpha_n}$, то для $x_{n-1} \le \sigma < x_n$ получаем

$$\ln \mu^*(\sigma) \ge \alpha_n - t_n I(t_n) + t_n \sigma = \alpha_n + \ln \mu(\sigma) > \alpha_n, \quad n \ge 1.$$

Таким образом, для $x_{n-1} \le \sigma < x_n$, $n \ge 1$, выполняется оценка

$$\frac{\ln \mu(\sigma)}{\ln \mu^*(\sigma)} < q,$$

т. е.

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\ln \mu^*(\sigma)} \le q < 1. \tag{37}$$

Убедимся, что $F \in D(\Lambda, R)$. Действительно, имеем

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t_n I(t_n)} e^{t_n s}.$$

Но из (34) следует $I(t_n) \geq \beta \ln t_n$, $n \geq 1$, т. е.

$$M(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta t_n \ln t_n + t_n \sigma}.$$

Но это означает, что [1] $\rho_R(F) \leq \beta^{-1} < \infty$.

Таким образом, если условие (20) не выполняется, а последовательность $\{b_n\}$ $\overline{W}$-нормальна, то найдется функция $F \in D(\Lambda, R)$, для которой имеет место оценка (37).

Необходимость установлена, и тем самым теорема доказана.

Авторы признательны А.В. Абанину за обсуждение работы и полезные замечания.

Литература

1. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1976. – 536 с.
2. Гайсин А.М. *Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера на кривых* // Докл. РАН. – 2000. – Т. 370. – № 6. – С. 735–737.
3. Гольдберг А.А., Островский И.В. *Распределение значений мероморфных функций* – М.: Наука, 1970. – 592 с.
4. Гайсин А.М. *Об одной гипотезе Полиа* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58. – № 2. – С. 73–92.

Башкирский государственный университет

Поступили
первый вариант 23.10.2000
окончательный вариант 14.06.2001