ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (431)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.958 : 519.635.6

С.Е. ЖЕЛЕЗОВСКИЙ

УТОЧНЕННЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА БУБНОВА–ГАЛЕРКИНА ДЛЯ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПЛАСТИН

В данной работе рассматривается начально-краевая задача, описывающая термоупругие колебания шарнирно закрепленной пластины, квадратной в плане, в рамках линеаризованной теории Кирхгофа ([1], с. 194–200) с учетом связи между напряжениями и деформациями по закону Дюамеля–Неймана ([2], с. 13) при постоянных во времени механической нагрузке и интенсивности внутренних тепловых источников. Предполагается, что температура боковой поверхности пластины постоянна и равна температуре пластины в естественном состоянии, а верхняя и нижняя поверхности пластины теплоизолированы. С использованием безразмерных параметров рассматриваемая задача записывается в следующем виде:

$$\mathcal{L}_1[w,\theta] \equiv \frac{c}{\lambda^4}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{12(1-\nu^2)}\Delta^2 w + \frac{1}{1-\nu}\Delta\int_{-1/2}^{1/2}\theta z\,dz = q_1, \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_2[w,\theta] \equiv \frac{\partial\theta}{\partial t} - \lambda^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \lambda^2\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \beta z\frac{\partial}{\partial t}\Delta w = q_2, \tag{2}$$

$$w|_{x=\pm\frac12} = w|_{y=\pm\frac12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=\pm\frac12} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=\pm\frac12} = 0, \tag{3}$$

$$\theta|_{x=\pm\frac12} = \theta|_{y=\pm\frac12} = \frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z=\pm\frac12} = 0, \tag{4}$$

$$w|_{t=0} = \varphi_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1, \quad \theta|_{t=0} = \psi_0, \tag{5}$$

где $w = w(x,y,t)$, $\theta = \theta(x,y,z,t)$ — искомые функции, определенные при $-1/2 \le x,y,z \le 1/2$, $0 \le t \le T$ ($T = \mathrm{const} > 0$), λ, c, β — заданные положительные константы, ν — заданная константа, удовлетворяющая условию $0 < \nu < 1/2$, $q_1 \in L_2(\Omega_1)$, $q_2 \in L_2(\Omega_2)$, $\varphi_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(\Omega_1)$, $\varphi_1 \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_1)$, $\psi_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_2)$ — заданные функции. Здесь и ниже $\Omega_j = (-1/2,\, 1/2)^{j+1}$ ($j = 1,2$), $\overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega_1)$ ($k = 2,4$) — функциональные пространства, определенные в [3], $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_2)$ — пространство функций из $W_2^2(\Omega_2)$, удовлетворяющих краевым условиям (4), $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_2)$ — пространство функций из $W_2^1(\Omega_2)$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega_1 \times [-1/2,\, 1/2]$, где $\partial\Omega_1$ — граница области Ω_1. Для задачи (1)–(5) имеет место теорема о существовании и единственности решения, соответствующая общим результатам, приведенным в [3], [4].

Обозначим через (w_n, θ_n), где $n = (n_1, n_2)$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $w_n = w_n(x,y,t)$, $\theta_n = \theta_n(x,y,z,t)$, приближенное решение задачи (1)–(5), построенное методом Бубнова-Галеркина (МБГ), т. е. упорядоченную пару функций, определенную системой соотношений

$$P_{jn}(\mathcal{L}_j[w_n,\theta_n] - q_j) = 0 \quad (0 \le t \le T, \;\; j = 1,2), \tag{6}$$

$$\forall \tau \in [0,T] \quad w_n|_{t=\tau} \in H_{1n}, \quad \theta_n|_{t=\tau} \in H_{2n}, \tag{7}$$

$$w_n|_{t=0} = P_{1n}\varphi_0, \quad \frac{\partial w_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = P_{1n}\varphi_1, \quad \theta_n|_{t=0} = P_{2n}\psi_0, \tag{8}$$

где H_{jn} — конечномерное подпространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{6-2j}(\Omega_j)$ размерности n_j, P_{jn} — ортопроектор $L_2(\Omega_j)$ на H_{jn}, $j = 1,2$ (далее используется также обозначение $R_{jn} = I_j - P_{jn}$, где I_j — тождественный оператор в $L_2(\Omega_j)$, $j = 1,2$). Отметим, что задача (6)–(8) эквивалентна задаче Коши для системы $2n_1 + n_2$ обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с таким же количеством искомых функций, с постоянными коэффициентами и свободными членами; следовательно, эта задача однозначно разрешима при любых натуральных n_1, n_2 и компоненты w_n, θ_n ее решения сколько угодно раз дифференцируемы по переменной t.

Для задачи (1)–(5) установлены априорные оценки погрешности МБГ (6)–(8), подобные полученным для другой задачи ([3], п. 3), уточненные по сравнению с более общими оценками из [4]. Методика их вывода состоит в применении теоремы 1 работы [3] и воспроизведении для рассматриваемой задачи доказательства теоремы 4 этой же работы. Выпишем две из установленных оценок, соответствующие случаю, когда функции q_1, q_2, φ_0, φ_1, ψ_0 удовлетворяют следующим условиям симметрии: $\forall (x,y) \in \Omega_1 \ \ \varphi(x,y) = \varphi(y,x) = \varphi(-x,y) = \varphi(x,-y)$, где φ — любая из функций $q_1, \varphi_0, \varphi_1$; $\forall (x,y,z) \in \Omega_2 \ \ \psi(x,y,z) = \psi(y,x,z) = \psi(-x,y,z) = \psi(x,-y,z) = -\psi(x,y,-z)$, где ψ — любая из функций q_2, ψ_0 (в данном случае полагаем $H_{1n} = \{\varphi_{kl} \mid 1 \le k \le l \le m_1\}$, $H_{2n} = \{\psi_{klm} \mid 1 \le k \le l \le m_1,\ 1 \le m \le m_2\}$, где $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, φ_{kl}, ψ_{klm} — базисные функции МБГ, определенные равенствами $\varphi_{kl}(x,y) = \cos(2k-1)\pi x \cos(2l-1)\pi y + \cos(2l-1)\pi x \cos(2k-1)\pi y$, $\psi_{klm}(x,y,z) = \varphi_{kl}(x,y)\sin(2m-1)\pi z$). Эти оценки имеют вид

$$\begin{aligned}
\|w - w_n\|_{C(\overline{\Omega}_1 \times [0,T])} \le \Phi_n \equiv \frac{2}{\pi^2}\sqrt{s_{m_1}}\Big\{ &\frac{24(1-\nu^2)c}{\lambda^4}\|R_{1n}\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega_1)} + 2\|R_{1n}\Delta\varphi_0\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \\
+ \frac{24(1+\nu)}{\beta}\|R_{1n}\psi_0\|^2_{L_2(\Omega_2)} - 48(1-\nu^2)&(R_{1n}q_1, R_{1n}\varphi_0)_{L_2(\Omega_1)} + 576(1-\nu^2)^2\|R_{1n}\Delta^{-1}q_1\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \\
+ \frac{12T(1+\nu)}{\beta}&\left\| R_{1n}\left(-\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{-1/2} q_2 \right\|^2_{L_2(\Omega_2)} \Big\}^{1/2} + \\
&+ \frac{2}{\pi^2}\sqrt{s_0}\Big\{ \frac{24(1+\nu)}{\beta}\|R_{2n}P_{1n}\psi_0\|^2_{L_2(\Omega_2)} + 12\beta T(1+\nu) \times \\
\times \Big[\frac{1}{\beta}&\left\| R_{2n}P_{1n}\left(-\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{-1/2} q_2 \right\|_{L_2(\Omega_2)} + \frac{4c_n}{\pi^3}(6(1-\nu^2)\sigma_{m_2})^{1/2}\Big]^2\Big\}^{1/2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_{0\le t\le T}\|\theta - \theta_n\|_{L_2(\Omega_2)} \le \Psi_n \equiv \Big\{ &\frac{c\beta(1-\nu)}{\lambda^4}\|R_{1n}\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \frac{\beta}{12(1+\nu)}\|R_{1n}\Delta\varphi_0\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \\
+ \|R_{2n}\psi_0\|^2_{L_2(\Omega_2)} - 2\beta(1-\nu)&(R_{1n}q_1,\, R_{1n}\varphi_0)_{L_2(\Omega_1)} + 24\beta(1-\nu)(1-\nu^2)\|R_{1n}\Delta^{-1}q_1\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \\
+ \frac{\beta^2 T}{2}\Big[\frac{1}{\beta}&\left\| R_{2n}\left(-\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{-1/2} q_2 \right\|_{L_2(\Omega_2)} + \frac{4c_n}{\pi^3}(6(1-\nu^2)\sigma_{m_2})^{1/2}\Big]^2\Big\}^{1/2},
\end{aligned}$$

где Δ^{-1} и $\left(-\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{-1/2}$ — операторы, обратные к операторам Δ и $\left(-\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{1/2}$, рассматриваемым соответственно на $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_1)$ и на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_2)$,

$$s_0 = \sum_{k,l=1}^{\infty}[(2k-1)^2 + (2l-1)^2]^{-2}, \qquad s_{m_1} = s_0 - \sum_{k,l=1}^{m_1}[(2k-1)^2 + (2l-1)^2]^{-2},$$

$$c_n = \left\{ \frac{\lambda^4}{c} \left\| q_1 - \frac{1}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \varphi_0 - \frac{1}{1-\nu} \Delta \int_{-1/2}^{1/2} P_{2n} \psi_0 z \, dz \right\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \|\Delta \varphi_1\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\beta(1-\nu)} \left\| q_2 + \lambda^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + \beta z \Delta \varphi_1 \right\|^2_{L_2(\Omega_2)} \right\}^{1/2}, \qquad \sigma_{m_2} = \sum_{k=m_2+1}^{\infty} (2k-1)^{-6}.$$

Размерности подпространств H_{1n} и H_{2n} равны соответственно $n_1 = \frac{1}{2}(m_1+1)m_1$ и $n_2 = \frac{1}{2}(m_1+1)m_1 m_2$.

Практическая эффективность установленных оценок погрешности МБГ подтверждена вычислительными экспериментами.

Литература

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике.* – М.: Наука, 1980. – 383 с.
2. Новацкий В. *Динамические задачи термоупругости.* – М.: Мир, 1970. – 256 с.
3. Железовский С.Е. *К оценкам погрешности метода Бубнова–Галеркина для связанных задач термоупругости* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 12. – С. 2122–2132.
4. Железовский С.Е., Кириченко В.Ф., Крысько В.А. *О скорости сходимости метода Бубнова-Галеркина для одной неклассической системы дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 8. – С. 1407–1416.

Поволжская академия
государственной службы
(*г. Саратов*)

Поступили
полный текст 11.09.1995
краткое сообщение 03.05.1996