ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 8 (471)

УДК 517.546

*Л.А. АКСЕНТЬЕВ, В.П. МИККА*

# О ПОВЕДЕНИИ КОНФОРМНОГО РАДИУСА В ПОДКЛАССАХ ОДНОЛИСТНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В статье продолжаются исследования по поведению конформного (внутреннего) радиуса односвязной области [1]–[4]. В первом параграфе приводится формула для представления конформного радиуса в малой окрестности фиксированной точки с выделением представления для случая, когда точка является критической. Эта формула позволяет дать новое доказательство известного условия [5] единственности критической точки в форме $|\{f(\zeta),\zeta\}|\le\frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2}$ со шварцианом в левой части неравенства. Во втором параграфе выписаны два семейства спиралеобразных функций с нарушением единственности критической точки соответствующего конформного радиуса и сформулированы две теоремы о единственности критической точки конформного радиуса для подклассов спиралеобразных областей. В третьем параграфе содержится утверждение, дополняющее результаты из [4], связанные с поведением конформного радиуса почти выпуклых областей.

## § 1.

Конформный радиус области $D$ в точке $z$ вычисляется с помощью функции $z=f(\zeta)$, конформно отображающей круг $E=\{\zeta:|\zeta|<1\}$ на область $D$,

$$R(D,z)=R(f(E),f(\zeta))=|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)\equiv R(\zeta).$$

Получим разложение этой вещественной положительной (т.к. $f'(\zeta)\ne0$, $\zeta\in E$) функции в окрестности точки $a$, переписав последнее равенство из предыдущей формулы в виде

$$R(a+\rho e^{i\theta})=|f'(a+\rho e^{i\theta})|(1-|a+\rho e^{i\theta}|^2). \tag{1}$$

Для второго множителя в (1) имеем

$$1-(a+\rho e^{i\theta})(\overline{a}+\rho e^{-i\theta})=1-|a|^2-2\operatorname{Re}(\overline{a}e^{i\theta})\rho-\rho^2. \tag{2}$$

Первый множитель запишем в виде $|f'(a+\rho e^{i\theta})|=\exp(\ln|f'(a+\rho e^{i\theta})|)$ и разложим вначале функцию

$$\ln f'(a+\rho e^{i\theta})=\ln f'(a)+\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\rho+\frac12\left(\frac{f'''(a)}{f'(a)}-\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2\right)e^{i2\theta}\rho^2+O(\rho^3).$$

Это разложение приводит к представлению

$$\ln|f'(a+\rho e^{i\theta})|=\operatorname{Re}\ln f'(a+\rho e^{i\theta})=\ln|f'(a)|+a_1\rho+a_2\rho^2+O(\rho^3),$$

из которого следует

$$|f'(a+\rho e^{i\theta})|=|f'(a)|e^{a_1\rho+a_2\rho^2+O(\rho^3)}=|f'(a)|\left(1+a_1\rho+\left(a_2+\frac{a_1^2}{2}\right)\rho^2+O(\rho^3)\right),$$

где

$$a_1=\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right),\quad a_2=\frac12\operatorname{Re}\left[\left(\frac{f'''(a)}{f'(a)}-\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2\right)e^{i2\theta}\right].$$

Поэтому с учетом (2) будем иметь

$$R(a+\rho e^{i\theta}) = R(a)\,(1 + b_1\rho + b_2\rho^2 + O(\rho^3)), \tag{3}$$

причем

$$b_1 = \operatorname{Re} B_1, \quad B_1 = \left(\frac{f''(a)}{f'(a)} - \frac{2\overline{a}}{1-|a|^2}\right)e^{i\theta}, \tag{4}$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\left[\frac{f'''(a)}{f'(a)} - \left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2\right]e^{i2\theta}\right) + \frac{1}{2}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\right]^2 -$$
$$-\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\frac{2\operatorname{Re}(\overline{a}e^{i\theta})}{1-|a|^2} - \frac{1}{1-|a|^2}.$$

Представим коэффициент $b_2$ в форме

$$b_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\{f(a),a\}e^{i2\theta} - \frac{2}{(1-|a|^2)^2}\right) + c_2, \tag{5}$$

в которую входят шварциан $\{f(a),a\} = \frac{f'''(a)}{f'(a)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2$ и коэффициент

$$c_2 = \frac{1}{4}\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\right]^2 - \operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\frac{2\operatorname{Re}(\overline{a}e^{i\theta})}{1-|a|^2} + \frac{|a|^2}{(1-|a|^2)^2}.$$

Преобразуем громоздкое выражение для этого коэффициента, записав второе равенство из (4) в виде

$$a\left(\frac{f''(a)}{f'(a)} - \frac{2\overline{a}}{1-|a|^2}\right)e^{i\theta} = aB_1 \;\Rightarrow\; a\frac{f''(a)}{f'(a)} = aB_1e^{-i\theta} + \frac{2|a|^2}{1-|a|^2}.$$

Отсюда следует равенство квадратов модулей

$$|a|^2\left|\frac{f''(a)}{f'(a)}\right|^2 = |a|^2|B_1|^2 + \frac{4|a|^2}{1-|a|^2}\operatorname{Re}(aB_1e^{-i\theta}) + \frac{4|a|^4}{(1-|a|^2)^2}$$

и после сокращения на $|a|^2$

$$\left|\frac{f''(a)}{f'(a)}\right|^2 = |B_1|^2 + \frac{4\operatorname{Re}(aB_1e^{-i\theta})}{1-|a|^2} + \frac{4|a|^2}{(1-|a|^2)^2}. \tag{6}$$

Учтем равенства (4) и (6), а также соотношение

$$\operatorname{Re}(u+iv)^2 - 2u^2 = -|u+iv|^2$$

для вещественных величин $u$, $v$, причем

$$u + iv = e^{i\theta}f''(a)/f'(a),$$

в несложных преобразованиях коэффициента $c_2$. Последовательно будем иметь

$$c_2 = \frac{1}{4}\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\right]^2 +$$
$$+\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\left[\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right) - \frac{2\operatorname{Re}(\overline{a}e^{i\theta})}{1-|a|^2}\right] + \frac{|a|^2}{(1-|a|^2)^2} =$$
$$= -\frac{1}{4}\left|\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right|^2 + b_1\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right) + \frac{|a|^2}{(1-|a|^2)^2} \overset{(\text{см. }(6))}{=}$$
$$= -\frac{|B_1|^2}{4} - \frac{\operatorname{Re}(aB_1e^{-i\theta})}{1-|a|^2} - \frac{|a|^2}{(1-|a|^2)^2} + b_1\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\frac{f''(a)}{f'(a)}\right) + \frac{|a|^2}{(1-|a|^2)^2} \Rightarrow$$

$$c_2 = -\frac{|B_1|^2}{4} - \frac{\operatorname{Re}(aB_1 e^{-i\theta})}{1-|a|^2} + b_1 \operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\frac{f''(a)}{f'(a)}\right). \tag{7}$$

Конформный радиус наглядно характеризуется гладкой поверхностью с уравнением $\Omega = R(\zeta)$ над горизонтальным кругом $E$ в трехмерном пространстве с вертикальной осью $\Omega$. Точка из круга $E$, над которой лежит точка поверхности конформного радиуса с касательной плоскостью, параллельной горизонтальной плоскости, называется критической точкой. Поверхность конформного радиуса $\widetilde{\Omega} = R(f(E), z)$ можно построить и над областью $D = f(E)$. Хотя эти поверхности и будут различными, но количество критических точек на них будет одинаковым.

Докажем, что любой критической точке $\zeta_0$ конформного радиуса $R(f(E), f(\zeta))$ над кругом $E$ ставится во взаимно однозначное соответствие критическая точка $z_0 = f(\zeta_0)$ конформного радиуса над областью $D = f(E)$. Действительно, уравнения для определения этих критических точек $\frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0$ и $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$ можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial \overline{\zeta}}\frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial z} = 0.$$

Но $\frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial z} = 0$ в силу того, что $\zeta = f^{-1}(z)$ — аналитическая функция по $z$, а $\overline{\zeta} = \overline{f^{-1}(z)}$ — аналитическая функция по $\overline{z}$, поэтому выполняется комплексное условие Коши–Римана. Значит, уравнения $\frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0$ и $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$ отличаются на функциональный множитель, отличный от нуля для локально однолистных отображений $f(\zeta)$ и $f^{-1}(z)$.

Необходимым и достаточным условием наличия критической точки является равенство нулю коэффициента (4) в разложении (3). Это разложение в окрестности критической точки примет вид

$$R(a + \rho e^{i\theta}) = R(a)(1 + \widehat{b}_2(\theta)\rho^2 + O(\rho^3)), \tag{8}$$

причем $b_1 = 0$, $0 \le \theta < 2\pi$, $\Leftrightarrow B_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ (в силу (7)) и поэтому

$$\widehat{b}_2(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\{f(a), a\}e^{i2\theta} - \frac{2}{(1-|a|^2)^2}\right). \tag{9}$$

Частный вид разложений (3), (8) при $a = 0$ и $f'(0) = 1$ был получен и применен в [2], [3]. Именно, справедливо равенство, несколько измененное по сравнению с [2], [3],

$$\begin{aligned} R(\rho e^{i\theta}) = 1 + \operatorname{Re}(f''(0)e^{i\theta})\rho + \Big\{\frac{1}{2}\operatorname{Re}[(f'''(0) - f''^2(0))e^{i2\theta}] + \\ + \frac{1}{2}[\operatorname{Re}(f''(0)e^{i\theta})]^2 - 1\Big\}\rho^2 + O(\rho^3) = \\ = 1 + 2\operatorname{Re}(a_2 e^{i\theta})\rho + \{\operatorname{Re}[(3a_3 - 2a_2^2)e^{i2\theta}] + 2[\operatorname{Re}(a_2 e^{i\theta})]^2 - 1\}\rho^2 + O(\rho^3). \end{aligned}$$

С помощью представления (8), (9) можно выяснить структуру поверхности конформного радиуса над окрестностью критической точки $a$. Соотношение $b_1 = 0$ при всех $\theta$, $0 \le \theta < 2\pi$, из (4) приводит к уравнению

$$\frac{f''(a)}{f'(a)} = \frac{2\overline{a}}{1-|a|^2}, \tag{10}$$

которому должна удовлетворять критическая точка $a$.

Если $|\{f(a), a\}| \le \frac{2}{(1-|a|^2)^2}$, то $\widehat{b}_2(\theta) \le 0$, поэтому $a$ будет точкой максимума поверхности $\Omega = R(\zeta)$ или полуседловой точкой (с изменением знака кривизны хотя бы для одной линии в срезах поверхности). При $|\{f(a), a\}| > \frac{2}{(1-|a|^2)^2}$ коэффициент $\widehat{b}_2(\theta)$ будет иметь переменный знак, поэтому $a$ не будет точкой максимума. Эти эффекты приводят к двум важным выводам.

$1^0$. Если выполняется условие однолистности Нехари [6]

$$|\{f(\zeta),\zeta\}| \le \frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2}, \quad \zeta\in E, \tag{11}$$

то у поверхности конформного радиуса будет одна критическая точка — единственный максимум [5], за исключением случая, когда $f(E)$ является полосой.

Представим новое (совсем короткое) доказательство этого факта. Действительно, предположение о существовании двух критических точек приводит к противоречию. Для получения противоречия нужно обе критические точки расположить на вещественном диаметре с помощью дополнительного дробно-линейного преобразования, не нарушающего условия (11). Эти критические точки являются точками максимума поверхности $R(\zeta)$ в силу (11). При строгом неравенстве (11) такое невозможно, т. к. между двумя максимумами должен быть хотя бы один минимум на вертикальном срезе поверхности $\Omega = R(\zeta)$, а это не допускает строгое неравенство (11). Если же выполняется нестрогое неравенство (11), то появление двух максимумов над действительным диаметром приведет к сплошному максимуму между двумя отмеченными максимумами, т. е. к континууму критических точек, которые будут удовлетворять уравнению

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

При нормировке $f'(0)=1$, $f(0)=0$ этому уравнению удовлетворяет единственная функция $f(t)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$. Она определена во всем круге $E$ и отображает его на горизонтальную полосу шириной $\frac{\pi}{2}$. Опровержение возможности точки перегиба вместо второго максимума можно дать при разложении $1/R(D,z)$.

$2^0$. Как было отмечено, при выполнении условия

$$|\{f(a),a\}| > \frac{2}{(1-|a|^2)^2} \tag{12}$$

точка $a$ не будет точкой максимума. Так как при естественных ограничениях (напр., при непрерывности $f(\zeta)$ в $\overline{E}$ [1]) хотя бы один максимум у $R(\zeta)$ всегда существует, то условие (12) в критической точке $a$ является гарантией существования более одной критической точки поверхности конформного радиуса. Поэтому выполнение условия (12) для конкретных функций означает, что конформные радиусы, связанные с этими функциями, имеют не менее двух критических точек. Другое обоснование неединственности критической точки при условии (12) дано в ([7], теорема 3) с использованием индексов критических точек.

## § 2.

По отношению к классу спиралеобразных функций в круге $E$ с условием

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\gamma}\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right) \ge 0, \quad -\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{\pi}{2}, \tag{13}$$

два пробных семейства можно построить с использованием функции $\left(\zeta = \frac{w-1}{w+e^{-i2\gamma}}\right)$

$$w = \frac{1+e^{-i2\gamma}\zeta}{1-\zeta} = \frac{1+e^{-i\gamma}\zeta_1}{1-e^{i\gamma}\zeta_1},$$

отображающей круг $E$ на полуплоскость $\operatorname{Re}(we^{i\gamma})>0$ (которой принадлежит $1=w(0)$) с граничной прямой, проходящей через точки $0$ и $i\sin\gamma e^{-i\gamma}$, т. к.

$$\zeta = 1 \mapsto w=\infty, \;\; \zeta=-e^{i2\gamma}\mapsto w=0,$$
$$\zeta=-1\mapsto w=(1-e^{-i2\gamma})/2 = e^{-i\gamma}i\sin\gamma,$$

а для любой граничной точки на единичной окружности имеем

$$\zeta = e^{i\theta} \mapsto w = \frac{e^{i(-\gamma+\theta/2)} 2\cos(\gamma - \frac{\theta}{2})}{e^{i\theta/2}(-2i\sin\frac{\theta}{2})} = e^{i(\pi/2-\gamma)} \frac{\cos(\gamma - \frac{\theta}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Первое семейство было определено в [4] с помощью равенства

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1 + e^{-i\gamma}\beta\zeta^2}{1 - e^{i\gamma}\alpha\zeta^2}, \quad \alpha, \beta \in (-1, 1]. \tag{14}$$

Для этого семейства получен такой результат в [4]. Шварциан при $\zeta = 0$ определяет соотношение

$$|\{f(\zeta), \zeta\}||_{\zeta=0} = 3|\alpha e^{i\gamma} + \beta e^{-i\gamma}| > 2 \ \Rightarrow \ \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos 2\gamma > 4/9.$$

В плоскости $\alpha + i\beta$ получим множество $\mathcal{D}(\gamma)$, которое является внешностью эллипса с $\gamma \neq \pm\pi/4$, внешностью окружности (при $\gamma = \pm\pi/4$), внешностью полосы с двумя параллельными граничными прямыми (при $\gamma = 0$ и $\gamma = \pm\pi/2$). Принадлежность $\alpha + i\beta \in \mathcal{D}(\gamma)$ означает, что конформный радиус для области $f(E)$ с $f(\zeta)$, определяемой из уравнения (14), будет иметь больше одной критической точки.

Второе семейство пробных функций получится при такой последовательной конструкции

$$w = \left[\cos\gamma \frac{1+\beta\zeta}{1-\alpha\zeta} + i\sin\gamma\right] e^{-i\gamma} = \frac{\cos\gamma + i\sin\gamma + (\beta\cos\gamma - i\alpha\sin\gamma)\zeta}{1-\alpha\zeta} e^{-i\gamma} = \\ = \frac{1 + (\beta\cos\gamma - i\alpha\sin\gamma)e^{-i\gamma}\zeta}{1-\alpha\zeta},$$

т. е.

$$w = \frac{1 + c\zeta}{1 - \alpha\zeta}, \quad c = (\beta\cos\gamma - i\alpha\sin\gamma)e^{-i\gamma}; \ \ \alpha, \beta \in (-1, 1], \tag{15}$$

которая при $\alpha = \beta = 1$ переходит в выражение

$$w = \left(\cos\gamma \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + i\sin\gamma\right) e^{-i\gamma} = \frac{\cos\gamma + i\sin\gamma + (\cos\gamma - i\sin\gamma)\zeta}{1-\zeta} e^{-i\gamma} = \frac{1 + e^{-i2\gamma}\zeta}{1-\zeta}. \tag{16}$$

Геометрический смысл функции (16) был выяснен выше.

Теперь с использованием (15) функции второго семейства определяются из уравнения

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1 + c\zeta^2}{1 - \alpha\zeta^2}, \quad c = (\beta\cos\gamma - i\alpha\sin\gamma)e^{-i\gamma}. \tag{17}$$

Отсюда легко получить

$$\{f(\zeta), \zeta\}\big|_{\zeta=0} = \left[\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right]\Bigg|_{\zeta=0} = 3(\alpha + c).$$

Оценка $|\{f(\zeta), \zeta\}|_{\zeta=0}| > 2$ приводит к неравенству $|\alpha + \beta| > 2/(3\cos\gamma)$, т. к. $c + \alpha = e^{-i\gamma}(\beta\cos\gamma + \alpha\cos\gamma)$. Здесь аналогом множества $\mathcal{D}(\gamma)$ (для первого семейства функций) будет внешность полосы с граничными прямыми

$$\alpha + \beta = \pm 2/(3\cos\gamma). \tag{18}$$

При $\gamma = 0$ получаются соответствующие прямые для звездообразных функций [4].

По аналогии со звездообразными функциями [4] имеются основания предполагать, что внутри полосы с граничными линиями (18) найдутся области в плоскости параметров $\alpha + i\beta$, гарантирующие единственность критической точки конформного радиуса не только для функций с уравнением (17), но и для всех функций, определяемых подчинением

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \prec \frac{1 + c\zeta}{1 - \alpha\zeta}, \quad |c + \alpha| = |e^{-i\gamma}(\alpha + \beta)\cos\gamma| \le \frac{2}{3}, \tag{19}$$

причем постоянная $c$ представлена формулой (17).

Займемся оценками, в результате которых получим одно из основных утверждений статьи. Из условия подчинения (19) следует

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1 + c\varphi(\zeta)}{1 - \alpha\varphi(\zeta)}, \quad \varphi(\zeta) \sim \zeta^2 \ \text{ около } \ \zeta = 0. \tag{20}$$

С помощью логарифмической производной из соотношения (20) имеем

$$\frac{1}{\zeta} + \frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f} = \frac{(c+\alpha)\varphi'}{(1 + c\varphi)(1 - \alpha\varphi)} \ \Rightarrow$$
$$\zeta \frac{f''}{f'} = (c + \alpha)\left(\frac{\zeta\varphi'}{(1 + c\varphi)(1 - \alpha\varphi)} + \frac{\varphi}{1 - \alpha\varphi}\right).$$

Нетрудные оценки с использованием леммы Шварца ([8], гл. 8, § 1) приводят к неулучшаемому итоговому неравенству

$$\left|\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \le |c + \alpha|\left(\frac{|\zeta| 2|\zeta|(1 - |\varphi|^2)(1 - |\zeta|^4)^{-1}}{|1 + c\varphi||1 - \alpha\varphi|} + \frac{|\zeta|^2}{|1 - \alpha\varphi|}\right) \le$$
$$\le |c + \alpha| \frac{|\zeta|^2}{1 - |\zeta|^2}\left(\frac{2(1 + |\varphi|)}{1 + |\zeta|^2} \frac{1 - |\varphi|}{|1 + c\varphi|\,|1 - \alpha\varphi|} + \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - |\varphi|}\,\frac{1 - |\varphi|}{|1 - \alpha\varphi|}\right) \le$$
$$\le \frac{|\zeta|^2}{1 - |\zeta|^2}|c + \alpha|\left(2\frac{1 - |\varphi|}{|1 + c\varphi||1 - \alpha\varphi|} + \frac{1 - |\varphi|}{|1 - \alpha\varphi|}\right) \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$= \frac{|\zeta|^2}{1 - |\zeta|^2}|c + \alpha|\Phi(\varphi) \le \frac{3|c + \alpha||\zeta|^2}{1 - |\zeta|^2}.$$

В последнем неравенстве учтена оценка

$$\Phi(\varphi) \le \frac{2(1 - |\varphi|)}{(1 - |c||\varphi|)(1 - |\alpha|\,|\varphi|)} + \frac{1 - |\varphi|}{1 - |\alpha||\varphi|} \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$= \Phi_1(|\varphi|) + \Phi_2(|\varphi|) \le \Phi_1(0) + \Phi_2(0) = \Phi(0),$$

для обоснования которой покажем, что функции $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ не возрастают на отрезке $[0, 1]$ при условии

$$|\alpha| + |c| \le 1. \tag{21}$$

Достаточно подсчитать и оценить производные этих функций. Получим

$$\Phi_1'(t) = 2\frac{|\alpha|\,|c|\left[(t - 1)^2 + (|\alpha| + |c| - 1 - |\alpha|\,|c|)(|\alpha|\,|c|)^{-1}\right]}{(1 - |\alpha|t)^2(1 - |c|t)^2} \le 0,$$

т.к. квадратная скобка в числителе оценивается при условии (21) величиной

$$[(t - 1)^2 + (|\alpha| + |c| - 1 - |\alpha|\,|c|)(|\alpha|\,|c|)^{-1}] \le (t - 1)^2 - 1 \le 0, \quad t \in [0, 1].$$

Для второй функции подсчет совсем простой $\Phi_2'(t) = \frac{-1 + |\alpha|}{(1 - |\alpha|t)^2} \le 0$ при $|\alpha| \le 1$.

Таким образом, справедлива оценка

$$\left|\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < \frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta\in E, \ \ \zeta\neq 0,$$

если $|c+\alpha| < \frac{2}{3}$ и $|c|+|\alpha|\le 1$, что эквивалентно неравенствам

$$|\alpha+\beta|\cos\gamma < 2/3 \ \text{ и } \ |\alpha|+\sqrt{\alpha^2\sin^2\gamma+\beta^2\cos^2\gamma}\le 1. \tag{22}$$

Поэтому уравнение (10) не будет иметь решений, кроме $a=0$.

Тем самым доказана

**Теорема 1.** *Любая спиралеобразная функция $f(\zeta)$, удовлетворяющая соотношению* (20), *в котором параметры подчинены условию* (22), *обеспечивает единственность критической точки в* 0 *конформного радиуса области $f(E)$. Увеличить правую часть в первом из неравенств* (22) *нельзя в силу* (17), (18).

На международной конференции 1999 года в Румынии был доложен результат по спиралеобразным функциям, отраженный в тезисах [9]. Используем одну импликацию из этих тезисов:

$$\mathrm{Re}(e^{i\gamma}\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)})>0, \ \ |\gamma|>\pi/3, \ \Rightarrow \ \left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < 2\frac{1+(4/3)\sin(2|\gamma|)}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta\in E.$$

В применении к функции $\mathcal{F}(\zeta)=f(\alpha\zeta)$ правое неравенство перепишется

$$\left|\frac{\mathcal{F}''(\zeta)}{\mathcal{F}'(\zeta)}\right| < 2\alpha\frac{1+(4/3)\sin(2|\gamma|)}{1-|\alpha\zeta|^2} < \frac{2}{1-|\zeta|^2}$$

в предположении, что

$$\alpha < \left[1+(4/3)\sin(2|\gamma|)\right]^{-1}. \tag{23}$$

Поэтому справедлива

**Теорема 2.** *Если функция $f(\zeta)$ является спиралеобразной в $E$, т.е. удовлетворяет неравенству $\mathrm{Re}\left(e^{i\gamma}\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)>0$, с дополнительными условиями $\pi/3<|\gamma|<\pi/2$ и $f''(0)=0$, то область $f(\alpha E)$ будет иметь конформный радиус с единственной критической точкой в* 0 *при выполнении неравенства* (23).

## § 3.

Для формулировки утверждения о конформном радиусе в подклассе почти выпуклых функций понадобится теорема 1 из [4], которая будет представлена как

**Лемма** [4]. *Области $\mathcal{D}_m$ в плоскости $\alpha+i\beta$, где выполняется импликация*

$$\left\{f'(\zeta)\prec T(\alpha,\beta;\zeta)=\frac{1+\beta\zeta}{1-\alpha\zeta}, \ \ \alpha+i\beta\in\mathcal{D}_m\right\} \ \Rightarrow \ \left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \le \frac{2m|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad 0\le m\le 2, \tag{24}$$

*представляют собой трапеции с вершинами $1-i$, $1+i(m-1)$, $m-1+i$, $-1+i$, когда $1\le m<2$ (при $m=2$ получается треугольник), и криволинейные трапеции с прямолинейными основаниями $[\frac{m-1}{2}+i\frac{m+1}{2},\frac{m+1}{2}+i\frac{m-1}{2}]$, $[-1+i,1-i]$ и боковыми криволинейными сторонами $L_m$ и $\widetilde{L}_m$, когда $0<m<1$. Уравнение линии $L_m$ : $\beta=\frac{(1+m)^2\alpha}{4m\alpha-(1-m)^2}$ (соединяет точки $\frac{m-1}{2}+i\frac{m+1}{2}$ и $-1+i$), уравнение линии $\widetilde{L}_m$ : $\beta=\frac{(1-m)^2\alpha}{4m\alpha-(1+m)^2}$ (соединяет точки $\frac{m+1}{2}+i\frac{m-1}{2}$ и $1-i$). Расширить эти области нельзя, т.к. знаки равенства в* (24) *осуществляются на функциях с $f_0'(\zeta)=\frac{1+\beta\zeta^2}{1-\alpha\zeta^2}$.*

С помощью этой леммы будет доказана

**Теорема 3.** *Если регулярная в $E$ функция $f(\zeta)$ имеет производную, удовлетворяющую подчинению*

$$f'(\zeta) \prec T(\alpha,\beta;\zeta), \quad \alpha+i\beta \in \mathcal{D}_m \quad (\mathcal{D}_m \text{ — из текста леммы}),$$

*и $f''(0) = 0$, то в случае функции $\mathcal{F}(\zeta)$ со связью $\mathcal{F}'(\zeta) = f'^c(\zeta)$, содержащей комплексную постоянную $c$, конформный радиус области $\mathcal{F}(E)$ будет иметь единственную критическую точку в 0 при условии*

$$m|c| < 1. \tag{25}$$

**Доказательство.** Так как $\mathcal{F}''(0) = cf'^{c-1}(0)f''(0) = 0$ , то уравнение (10), записанное для $\mathcal{F}(\zeta)$, будет удовлетворено при $a = 0$. Чтобы доказать отсутствие других критических точек у конформного радиуса области $\mathcal{F}(E)$, выведем неравенство

$$\left|\frac{\mathcal{F}''(\zeta)}{\mathcal{F}'(\zeta)}\right| < \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2} \quad \text{при} \;\; \zeta \neq 0. \tag{26}$$

Для этого воспользуемся логарифмической производной соотношения $\mathcal{F}'(\zeta) = [f'(\zeta)]^c$ в форме

$$\frac{\mathcal{F}''}{\mathcal{F}'} = c\frac{f''}{f'}.$$

Подставив это равенство в (24), с учетом (25) получим

$$\left|\frac{\mathcal{F}''(\zeta)}{\mathcal{F}'(\zeta)}\right| \leq \frac{2m|c|\,|\zeta|}{1-|\zeta|^2} \;\Rightarrow\; (26). \quad \square$$

Определяющую роль в теореме 3 играют подчиняющие функции $T(\alpha,\beta;\zeta) = (1+\beta\zeta)/(1-\alpha\zeta)$, которые легко упорядочить следующим образом:

$$T(\alpha,\beta;\zeta) \prec T(\alpha_0,\beta_0;\zeta) \Leftrightarrow (T(\alpha,\beta;1) \leq T(\alpha_0,\beta_0;1), T(\alpha,\beta;-1) \geq T(\alpha_0,\beta_0;-1)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{\alpha(1+\beta_0)+\beta(1-\alpha_0) \leq \alpha_0+\beta_0,\; \alpha(1-\beta_0)+\beta(1+\alpha_0) \leq \alpha_0+\beta_0\}. \tag{27}$$

Неравенства (27) отражают наглядный геометрический факт, который можно пояснить с помощью диффеоморфного соответствия ([7], с. 47)

$$a = \frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha^2}, \quad b = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha^2} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{a-1}{b}, \quad \beta = b - \frac{a(a-1)}{b}. \tag{28}$$

Именно, критерием того, что круг $E(a_0,b_0) = \{w : |w-a_0| < b_0\}$ с вещественным центром $a_0$ содержит круг $E(a,b)$ с вещественным центром $a$, являются два неравенства

$$a+b \leq a_0+b_0, \quad a-b \geq a_0-b_0 \;\; (\Leftrightarrow \; E(a,b) \subseteq E(a_0,b_0)), \tag{29}$$

в которых задействованы точки пересечения окружностей $\partial E(a,b)$ и $\partial E(a_0,b_0)$ с вещественной осью.

Неравенства (29) определяют две полуплоскости в плоскости параметров $a+ib$. Аналогичные полуплоскости, которые обозначим через $\Pi_1(\alpha_0,\beta_0)$ и $\Pi_2(\alpha_0,\beta_0)$, в плоскости $\alpha+i\beta$ являются изображениями неравенств (27), которые можно получить из (29) левой подстановкой в (28). Граничная прямая полуплоскости $\Pi_1(\alpha_0,\beta_0)$ проходит через точки $\alpha_0+i\beta_0$ и $1-i$, а прямая $\partial\Pi_2(\alpha_0,\beta_0)$ задается точками $\alpha_0+i\beta_0$ и $-1+i$. Обеим полуплоскостям принадлежит начало координат. Пересечение $\Pi_1(\alpha_0,\beta_0) \cap \Pi_2(\alpha_0,\beta_0) \cap \mathcal{D}_m$ определяет область значений параметров в плоскости $\alpha+i\beta$, для которых теорема 3 дает результат слабее, чем при $\alpha_0+i\beta_0$. Поэтому наилучшие эффекты связаны с условиями подчинения в (24) и в теореме 3, когда $m < 1/|c|$ и

$$\alpha+i\beta \in \partial\mathcal{D}_m \setminus [-1+i, 1-i], \tag{30}$$

т. е. $\alpha+i\beta$ лежит на границе области $\mathcal{D}_m$ с исключением отрезка, соединяющего точки $-1+i$ и $1-i$. Следовательно, в первой части импликации (24) вместо $\alpha+i\beta \in \mathcal{D}_m$ можно вставить (30).

Заметим, что в [4] была обоснована единственность критической точки конформного радиуса области $f(E)$ при условии

$$\{f'^{\tilde{a}}(\zeta) \prec T(\alpha,\beta;\zeta),\ \alpha+i\beta \in \mathcal{D}_m\} \ \text{и}\ \ m \le |\tilde{a}|.$$

Здесь также включение $\alpha+i\beta \in \mathcal{D}_m$ можно заменить на (30). Аналогичные улучшения можно внести с помощью включения вида (30) для области $\mathcal{G}_m$ в теорему 2 из [4].

Другие виды условий, гарантирующих единственность критической точки конформного радиуса, и приложения этих условий к внешним обратным краевым задачам [10], [11] будут изложены в другой статье авторов.

## § Литература


1. Аксентьев Л.А. *Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
2. Krzyž J.G. *Some remarks on the maxima of inner conformal radius* // Ann. UMCS. A. – 1992. – V. 46. – P. 57–61.
3. Kühnau R. *Maxima beim konformen Radius einfach zusammenhängender Gebiete* // Ann. UMCS. A. – 1992. - V. 46. – P. 63–73.
4. Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Попов Н.И. *О теоремах единственности для внешней обратной краевой задачи в подклассах однолистных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 8. – С. 3–13.
5. Аксентьев Л.А., Казанцев А.В. *Новое свойство класса Нехари и его применение* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 8. – С. 69–72.
6. Nehari Z. *The Schwarzian derivative and schlicht functions* // Bull. Amer Math. Soc. – 1949. – V. 55. – № 6. – P. 545–551.
7. Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Киндер М.И., Киселев А.В. *О классах единственности внешней обратной краевой задачи* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. – Вып. 24. – С. 39–62.
8. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
9. Okuyama Yûsuke. *The norm estimates of pre-Schwarzian derivatives of spiral-like functions* / International conference on complex analysis and related topics (the VIII-th romanian-finnish seminar). – August 23–27, 1999. – Jassy, Romania. – 1999. – P. 52–53.
10. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
11. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – 2-е изд. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.



*Казанский государственный университет*
*Марийский государственный университет*



*Поступила*
07.02.2000