МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ.Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Специальность: 010100 — математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(дипломная работа)

Об ОДУ 4 порядка, допускающих 4-мерную алгебру Ли с коммутативной трехмерной подалгеброй.

Работа завершена:
Студент 05–903 группы математического отделения
_____ 2014г. _____ (В.Л. Садыкова)

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
к.ф.-м.н., старший преподаватель
_____ 2014г. _____ (В.В. Шурыгин)
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
_____ 2014г. _____ (Ю.В. Обносов)

Казань — 2014

Введение

Как известно, обыкновенное дифференциальное уравнение 1 порядка, допускающее однопараметрическую группу преобразований, может быть проинтегрировано в квадратурах. Кроме того, по теореме Ли-Бианки, всякое ОДУ порядка n, допускающее n-параметрическую группу преобразований (или, что то же самое, n-мерную алгебру Ли), также может быть проинтегрировано в квадратурах. В настоящей дипломной работе мы строим реализации четырехмерных алгебр Ли, обладающих коммутативной трехмерной подалгеброй, как алгебр Ли операторов на плоскости (x, y). После этого мы записываем общий вид ОДУ 4 порядка, допускающих данные алгебры Ли. Потом мы приводим схему интегрирования этих ОДУ, а именно, сводим их к решенной в статье [7] задаче интегрирования ОДУ 3 порядка, допускающих трехмерную алгебру Ли.

Глава 1. Однопараметрические группы преобразований

Пусть дано однопараметрическое семейство $\{T_a\}$ преобразований пространства $\mathbb{R}^n$:

$$\overline{x} = f(x, a), \tag{1}$$

где a — вещественный параметр, изменяющийся в некотором интервале $\Delta \subset \mathbb{R}$.

Определение. Семейство $\{T_a\}$ называется *однопараметрической группой преобразований*, если выполнены следующие условия :

1) $T_0 = id$ (тождественное преобразование) и что $T_a \neq id$ для всех остальных $a \in \Delta$,

2) семейство $\{T_a\}$ вместе с каждым преобразованием содержит обратное к нему, причем ${T_a}^{-1} = T_{-a}$,

3) композиция любых двух преобразований T_a и T_b снова принадлежит рассматриваемому семейству, причем

$$T_b \circ T_a = T_{a+b}.$$

Разложим функцию $f(x, a)$ в ряд Тейлора по параметру a в окрестности точки $a = 0$. Поскольку $T_0 = id$, имеем $f(x, 0) = x$. Обозначим $X(x) = \frac{\partial f(x,a)}{\partial a}|_{a=0}$. Тогда

$$\overline{x} = x + X(x) \cdot a + o(a).$$

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{df}{dt} = X(f), \qquad f|_{a=0} = x$$

называется *уравнением Ли*.

Определение. Оператор

$$X = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} = X^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + ... + X^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}$$

называется *инфинитезимальным оператором* (или просто *оператором*) группы преобразований (1).

Каждый инфинитезимальный оператор однозначно определяет векторное поле на $\mathbb{R}^n$. [4]

Пример 1. Группа растяжений (гомотетий)

$$\overline{x} = xe^a, \quad \overline{y} = ye^{-a}.$$

Ее оператор имеет вид $X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$.

Определение. Функция $I(x)$ называется *инвариантом* группы преобразований (1), если для всех допустимых значений x и a выполняется равенство

$$I(\overline{x}) = I(f(x,a)) = I(x). \tag{2}$$

Теорема 1. [1] *Функция $I(x)$ — инвариант тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$XI = X^i(x)\frac{\partial I}{\partial x^i} = X^1(x)\frac{\partial I}{\partial x^1} + \ldots + X^n(x)\frac{\partial I}{\partial x^n} = 0. \tag{3}$$

Условие (3) представляет собой линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка.Оно имеет $n-1$ функционально независимые решения. Поэтому любая однопараметрическая группа преобразований в $\mathbb{R}^n$ имеет $n-1$ функционально независимых инвариантов. При этом любой другой инвариант этой группы будет функцией от этих $(n-1)$ «базисных» инвариантов. В качестве такого базиса можно выбрать левые части первых интегралов $I_1(x) = C_1, \ldots, I_{n-1}(x) = C_{n-1}$ характеристической системы уравнения (3):

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \ldots = \frac{dx^n}{X^n}. \tag{4}$$

Пример 2. Рассмотрим следующую группу растяжений в $\mathbb{R}$:

$$\overline{x} = xe^{3a},\ \overline{y} = ye^{-2a},\ \overline{z} = ze^a.$$

Для нее $X = 3x\dfrac{\partial}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$и уравнение (3) принимает вид

$$3x\frac{\partial I}{\partial x} - 2y\frac{\partial I}{\partial y} + z\frac{\partial I}{\partial z} = 0$$

Решая характеристическую систему $\dfrac{dx}{3x} = \dfrac{dy}{-2y} = \dfrac{dz}{z}$, находим первые интегралы $x^2y^3 = C_1$, $z^2y = C_2$. Поэтому в качестве базиса инвариантов можно взять функции $I_1 = x^2y^3$, $I_2 = z^2y$, а произвольный инвариант имеет вид $I = F(x^2y^3, z^2y)$.

Теорема 2. *Всякая однопараметрическая группа G преобразований $\overline{x} = f(x, a)$ невырожденной заменой переменных $x^{i'} = x^{i'}(x^k)$ может быть приведена к группе переносов вдоль оси $x^{n'}$.*

Доказательство. Пусть $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ — оператор группы G. При замене переменных $x^{i'} = x^{i'}(x^k)$ векторное поле X преобразуется как

$$X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{j'}}.$$

Поэтому в системе координат $(x^{i'})$ векторное поле X принимает вид $X = X(x^{j'}) \dfrac{\partial}{\partial x^{j'}}$.

Теперь для того, чтобы в этой системе координат поле X приняло вид $\dfrac{\partial}{\partial x^{n'}}$, необходимо, чтобы

$$X(x^{1'}) = \ldots = X(x^{(n-1)'}) = 0, \quad X(x^{n'}) = 1.$$

Следовательно достаточно выбрать в качестве функций $x^{i'}$, $i' = 1, \ldots, n-1$, любые $n-1$ функционально независимых инвариантов I_1, $\ldots$, I_{n-1}, а в качестве $x^{n'}$ взять любое решение уравнения $X(x^{n'}) = 1$.

Система функций $x^{1'} = I_1(x)$, $\ldots$, $x^{n-1'} = I_{n-1}(x)$, $x^{n'} = x^{n'}(x^i)$ определяет искомую замену переменных. Векторное поле X в этих координатах имеет вид $X = \dfrac{\partial}{\partial x^{n'}}$, то есть, определяет группу переносов вдоль оси $x^{n'}$. $\square$

Пример 3. Найдем такую замену переменных для группы с оператором

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}.$$

Будем искать новые переменные z и t из условия, что

$$X(z) = 0, \qquad X(t) = 1.$$

Найдем решение уравнения

$$X(t) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} = 1.$$

Будем искать это решение в виде $t = t(x)$. Тогда $x^2 \frac{dt}{dx} = 1$ или $dt = \frac{dx}{x^2}$. Отсюда

$$t = -\frac{1}{x}.$$

Теперь найдем z из условия

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy}$$

имеет решение: $\frac{y}{x} = C$, поэтому мы выберем

$$z = \frac{y}{x}.$$

Выразим отсюда y и x:

$$x = -\frac{1}{t}, \quad y = zx = -\frac{z}{t}.$$

В этих переменных поле X примет вид $\frac{\partial}{\partial t}$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ поверхность M размерности $n-k$, заданную системой уравнений

$$F_1(x) = 0,\ F_2(x) = 0, \ldots,\ F_k(x) = 0, \quad k \leqslant n. \tag{5}$$

Определение. Поверхность M называется *инвариантной относительно действия группы G преобразований* $\overline{x} = f(x, a)$, если из того, что $x \in M$ следует, что $\overline{x} \in M$. В этом случае будем говорить, что эта система *допускает группу G*.

Теорема 3. [1] *Поверхность M инвариантна относительно действия группы G тогда и только тогда, когда $XF_i|_M = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$.*

Теорема 4. [1] *Поверхность M, инвариантная относительно действия группы G, может быть задана системой уравнений вида*

$$\Phi_i(I_1(x), \ldots, I_{n-1}(x)) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

где функции $I_1(x)$, ..., $I_{n-1}(x)$ образуют базис инвариантов группы G, при условии, что оператор X группы G не обращается в нуль в точках поверхности M.

В настоящей работе мы рассматриваем обыкновенные дифференциальные уравнения относительно функции $y = y(x)$ вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{6}$$

Поэтому мы будем рассматривать группы преобразований пространства $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) вида

$$\overline{x} = \varphi(x, y, a), \qquad \overline{y} = \psi(x, y, a). \tag{7}$$

Инфинитезимальный оператор такой группы преобразований будем обозначать символом

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

где

$$\xi(x, y) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right|_{a=0}, \qquad \eta(x, y) = \left.\frac{\partial \psi}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

Определение. Преобразование (7), называется *допустимым (допускаемым) преобразованием*, если оно переводит данное дифференциальное уравнение (6) в равносильное уравнение того же вида.

Пример 4. Рассмотрим следующее уравнение:

$$y' = \sqrt{y} + \frac{y}{x}.$$

Будем искать допускаемую группу в виде группы растяжений

$$\overline{x} = kx, \quad \overline{y} = ly.$$

В этом случае $\overline{y'} - \sqrt{\overline{y}} - \frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \frac{l}{k} y' - \sqrt{ly} - \frac{l}{k}\frac{y}{x}$. Это выражение должно быть пропорционально выражению $y' - \sqrt{y} - \frac{y}{x}$, следовательно, должны выполняться условия

$$\frac{l}{k} = \sqrt{l} = \frac{l}{k}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{l^2}{k^2} = l,$$

или

$$l = k^2.$$

Тогда возьмем $k = e^a$, $l = e^{2a}$. Группа растяжений $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^{2a}$ имеет оператор

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Следовательно, наше уравнение допускает этот оператор.

Пусть задано ОДУ первого порядка записанное в дифференциалах

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0. \tag{8}$$

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 5. *Уравнение* (8) *допускает группу с оператором* $X = \xi\dfrac{\partial}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial}{\partial y}$ *тогда и только тогда, когда функция*

$$\mu = \frac{1}{\xi P + \eta Q} \tag{9}$$

является интегрирующим множителем этого уравнения.

Отсюда следует, что если мы знаем допустимую группу преобразований, то мы можем проинтегрировать уравнение (8). Укажем еще один метод решения ОДУ первого порядка, допускающего группу преобразований, состоящий в инвариантной замене переменных.

Пример 5. Решим уравнение

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^2},$$

используя допускаемый им оператор

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Будем искать t в виде функции только от переменной x. Тогда уравнение $X(t) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y} = 1$ сведется к дифференциальному уравнению $\frac{dt}{dx} = 1$, откуда следует, что можно взять $t = x$. Уравнение для z имеет вид

$$dx = \frac{x\,dy}{y} \Longrightarrow \ln x = \ln y + C \Longrightarrow C = \frac{y}{x}.$$

Поэтому в качестве z мы возьмем y/x.

Сделаем замену $t = x$, $z = \frac{y}{x}$. Получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(zx)}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt}x + z = \frac{zx}{x} - \frac{z^3x^3}{x^2}.$$

Таким образом уравнение принимает вид

$$\frac{dz}{dt}x = -z^3x.$$

Интегрируя это уравнение, найдем $\frac{dz}{z^3} = -dt$ или

$$-\frac{2}{z^2} = -t + C.$$

Получаем ответ:

$$-\frac{2x^2}{y^2} = -x + C.$$

Таким образом уравнение первого порядка с известной допускаемой группой может быть приведено к интегрируемому виду. Покажем, как найти общий вид уравнений, допускающих заданную группу (или, что то же самое, заданный инфинитезимальный оператор).

Для этого необходимо продолжить действие группы преобразований (7) до группы преобразований пространства переменных $(x, y, y', \dots, y^{(n)})$. Прямое вычисление этих преобразований с ростом порядка производных быстро становится очень громоздким. Применим другой подход. Введем переменные y', y'', ..., которыми будем обозначать соответствующие производные. Эти переменные будем считать алгебраически независимыми, но связанными между собой дифференциальными соотношениями

$$y^{(i)} = D(y^{(i-1)}) \tag{10}$$

с помощью оператора

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \dots \tag{11}$$

Оператор D называется *оператором полной производной по переменной* x. Он действует на гладкие функции от конечного числа переменных x, y, y', y'', ... по формуле

$$DF(x, y, y', y'', \dots) = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} + \dots$$

Всякое дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{12}$$

задает некоторую поверхность в пространстве переменных x, y, y', ..., $y^{(n)}$. Будем рассматривать это уравнение вместе со всеми его дифференциальными следствиями

$$DF = 0, \quad D^2F = 0, \dots$$

и говорить, что уравнение (12) задает *дифференциальное многообразие* $[F]$.

Суть перехода от дифференциального уравнения к дифференциальному многообразию состоит в том, что при вычислении допускаемой группы мы забываем про решения уравнения и рассматриваем дифференциальное уравнение как систему обычных уравнений. После этого мы можем использовать критерий инвариантности, сформулированный в Теореме 3.

Приведем формулы продолжения действия оператора

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} \tag{13}$$

на пространство переменных x, y, y', $\ldots$, $y^{(n)}$, выведенные в [1]. Это продолжение имеет вид

$$X^{(n)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial y'} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial y''} + \ldots + \zeta_n\frac{\partial}{\partial y^{(n)}},$$

где функции ζ_1, $\ldots$, ζ_n вычисляются по формулам

$$\zeta_1 = D\eta - y'D\xi, \quad \zeta_2 = D\zeta_1 - y''D\xi, \quad \ldots, \quad \zeta_n = D\zeta_{n-1} - y^{(n)}D\xi. \tag{14}$$

К примеру,

$$\zeta_1 = D_x(\eta) - y'D_x(\xi) = \eta_x + y'(\eta_y - \xi_x) - y'^2\xi_y,$$

а

$$\zeta_2 = D_x(\zeta_1) - \ddot{y}D_x(\xi) = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + \\ + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)y''. \tag{15}$$

Пример 6. Найдем общий вид уравнения первого порядка, допускающего оператор

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}. \tag{16}$$

Посчитаем первое продолжение:

$$\zeta_1 = y + y'(x - 2x) - y'^2 \cdot 0 = y - y'x.$$

Поэтому продолжение оператора на первую производную будет иметь вид:

$$X^{(1)} = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + (y - y'x)\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Запишем систему для поиска инвариантов :

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dy'}{y - y'x}.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy'}{y'x} \Longrightarrow \ln x = \ln y + C.$$

Отсюда получаем первый инвариант: $I_0 = \frac{y}{x}$. Решая далее, выведем второй инвариант :

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy'}{y - y'x} \implies xC = y \implies \frac{dx}{x^2} = \frac{dy'}{xC - y'x} \implies \frac{dx}{x} = \frac{dy'}{C - y'}$$

$$\implies x = C_1(C - y')^{-1} \implies x = C_1\left(\frac{y}{x} - y'\right)^{-1}.$$

Поэтому второй инвариант имеет вид

$$I_1 = \left(\frac{y}{x} - y'\right)x = y - xy',$$

а окончательный ответ будет таким:

$$xy' = F\left(\frac{y}{x}\right) + y.$$

В соответствии с Теоремой 4, всякое уравнение второго порядка, допускающие оператор X, может быть записано в терминах *дифференциальных инвариантов порядка не выше двух*, то есть, функций от четырех переменных x, y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, удовлетворяющих уравнению $X^{(2)}I = 0$. Их отыскание при помощи формулы (15) может вызвать значительные трудности. Сформулируем теорему Ли, которая дает возможность избежать трудоемких вычислений.

Теорема 6. [1] *Пусть для заданного оператора* (13) *известны инвариант нулевого порядка* $u(x, y)$ *и инвариант первого порядка* $v(x, y, y')$. *Тогда инвариант второго порядка получается при помощи дифференцирования*

$$w = \frac{dv}{du} = \frac{dv/dx}{du/dx} = \frac{v_x + y'v_y + y''v_{\dot{y}}}{u_x + y'u_y} = \frac{Dv}{Du}. \tag{17}$$

Любой другой дифференциальный инвариант порядка не выше второго является функцией от u, v, w.

Пример 7.

В примере 6 мы уже нашли

$$u = \frac{y}{x}, v = y - y'x.$$

Тогда

$$w = \frac{Dv}{Du} = \frac{x^3 y''}{y - xy'}.$$

Следовательно, общее уравнение второго порядка, допускающее оператор x имеет вид: $w = f(u, v)$ или

$$\frac{x^3 y''}{y - xy'} = f\left(\frac{y}{x}, y - y'\right).$$

Глава 2. Применение групп преобразований к решению обыкновенных дифференциальных уравнений

Определение. *Алгеброй Ли* называется векторное пространство $\Im$ над полем K, снабжённое билинейным отображением

$$\Im \times \Im \to \Im, \quad (x, y) \longmapsto [x, y],$$

удовлетворяющим следующим двум аксиомам:

1) антикоммутативность $[x, x] = 0$;

2) тождество Якоби $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Другими словами, в алгебре Ли имеется антикоммутативная операция, удовлетворяющая тождеству Якоби. Эта операция называется *коммутатором.* Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — базис в алгебре L. Рассмотрим коммутатор $[Y, Z]$ любых двух элементов Y и Z. Имеем $[Y, Z] = [Y^i X_i, Z^j X_j] = Y^i Z^j [X_i, X_j]$. Это означает,что операция коммутатора полностью задается коммутаторами базисных элементов.

Пусть L_r — алгебра Ли размерности r и пусть N — векторное подпространство в L_r.

Определение. Подпространство N называется *подалгеброй*, если $[X, Y] \in N$ для всех $X, Y \in N$. Подпространство N называется *идеалом*, если $[X, Y] \in N$ для всех $X \in N$, $Y \in L_r$.

Если N является идеалом, то в алгебре L_r можно ввести отношение эквивалентности: $X \sim Y \iff X - Y \in N$. Множество смежных классов по N образует алгебру Ли, которая называется фактор-алгеброй алгебры L_r по идеалу N и обозначается L_r/N.

Определение. Алгебра Ли L_r называется *разрешимой*, если существует ряд подалгебр $L_r \supset L_{r-1} \supset \ldots \supset L_1$ размерностей r, $r-1$, $\ldots$, 1 соответственно, в котором каждая подалгебра L_{s-1} есть идеал в L_s, $s = 2, \ldots, r$.

Пусть $X_1, \ldots, X_r$ — базис в алгебре L_r. Обозначим символом $L_r^{(1)} = [L_r, L_r]$ подпространство, натянутое на все коммутаторы $[X_i, X_j]$, $i, j = 1, \ldots, r$. Ясно, что тогда $[Y, Z] \in L_r^{(1)}$ для любых $Y, Z \in L_r$. Пространство $L_r^{(1)}$ образует идеал в алгебре Ли L_r.

Определение. Пространство $L_r^{(1)} = [L_r, L_r]$ называется *производной алгеброй.* Производные алгебры высших порядков определяются по индукции:

$L_r^{(n+1)} := (L_r^{(n)})^{(1)} = [L_r^{(n)}, L_r^{(n)}]$.

Справедлива следующая

Теорема 7. *Алгебра Ли L_r разрешима тогда и только тогда, когда ее производная алгебра некоторого порядка обращается в нуль.*

Эта теорема позволяет проверять, является ли заданная алгебра разрешимой.

Как известно, пространство векторных полей (операторов) на $\mathbb{R}^n$ образует алгебру Ли $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ относительно операции, называемой *скобкой Ли*:

$$X, Y \mapsto [X, Y].$$

Скобка операторов $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ и $Y = Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ на $\mathbb{R}^n$ вычисляется по формуле

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = (X(Y^k) - Y(X^k)) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Для операторов $X_1 = \xi_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \dfrac{\partial}{\partial y}$ и $X_2 = \xi_2 \dfrac{\partial}{\partial x} + \eta_2 \dfrac{\partial}{\partial y}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ их скобка (коммутатор) равна

$$[X_1, X_2] = (X_1(\xi_2) - X_2(\xi_1)) \frac{\partial}{\partial x} + (X_1(\eta_2) - X_2(\eta_1)) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Определение. Будем говорить, что алгебра Ли L_r *может быть реализована* как алгебра операторов на плоскости $\mathbb{R}^2$, если существует линейное отображение

$$R : L_r \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2),$$

являющееся изоморфизмом алгебр Ли на свой образ. Это значит, что

$$R([X, Y]) = [R(X), R(Y)].$$

Справедлива так называемая теорема Ли-Бьянки, утверждающая, что если ОДУ n-го порядка допускает n-мерную алгебру Ли, то оно может быть проинтегрировано в квадратурах.

Теорема 8. *Всякая двумерная алгебра Ли реализуется на плоскости и путем выбора подходящего базиса X_1, X_2 приводится к одному из следующих четырех видов:*

I. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, \;\; X_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$.

II. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \;\; X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial y}.$

III. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \;\; X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}.$

IV. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \;\; X_2 = y\dfrac{\partial}{\partial y}.$

Соответствующие дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие двумерные алгебры Ли этих четырех типов имеют вид

$$I.\ y'' = f(y'), \qquad II.\ y'' = f(x),$$
$$III.\ y'' = \frac{1}{x}f(y'), \quad IV.\ y'' = f(x)y'.$$

В работе [9] приведены все трехмерные алгебры Ли, которые могут быть реализованы на плоскости.

Алгебра	Ненулевые коммутационные соотношения
$A_{3;1}$	
$A_{3;2}$	$[X_2, X_3] = X_1$
$A_{3;3}$	$[X_1, X_3] = X_1,\ [X_2, X_3] = X_1 + X_2$
$A_{3;4}$	$[X_1, X_3] = X_1$
$A_{3;5}$	$[X_1, X_3] = X_1,\ [X_2, X_3] = X_2$
$A_{3;6}$	$[X_1, X_3] = X_1,\ [X_2, X_3] = aX_2,\ a \neq 0, 1$
$A_{3;7}$	$[X_1, X_3] = bX_1 - X_2,\ [X_2, X_3] = X_1 + bX_2$
$A_{3;8}$	$[X_1, X_2] = X_1,\ [X_2, X_3] = X_3,\ [X_3, X_1] = -2X_2$
$A_{3;9}$	$[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2$

Соответствующие реализации имеют вид

Алгебра	Реализация в $\mathbb{R}^2$
$A_{3;1}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = h(x)\frac{\partial}{\partial y}$
$A_{3;2}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{I}_{3;3}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{II}_{3;3}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{I}_{3;4}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}$
$A^{II}_{3;4}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{I}_{3;5}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{II}_{3;5}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = y\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{I}_{3;6}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + ay\frac{\partial}{\partial y},\ a \neq 0, 1$
$A^{II}_{3;6}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = (1-a)x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ a \neq 0, 1$
$A^{I}_{3;7}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = (bx+y)\frac{\partial}{\partial x} + (by-x)\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{III}_{3;7}$	$X_1 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = (1+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (x+b)y\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{I}_{3;8}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{II}_{3;8}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2-x^2)\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{III}_{3;8}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2+x^2)\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{IV}_{3;8}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = y^2\frac{\partial}{\partial y}$
$A_{3;9}$	$X_1 = (1+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = xy\frac{\partial}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$

Уравнения третьего порядка, допускающие трехмерные алгебры Ли, выведены в работе [11]. Там же указана схема интегрирования этих уравнений со ссылкой на работу [7].

Тип	Канонические уравнения
$A_{3,4}$	1. $y''' = y''^{\frac{3}{2}} F(y' y''^{-2})$ 2. $y''' = y''^2 F(xy'')$
$A_{3,1}$	1.$y''' = F(y'')$
$A_{3,3}$	1. $y''' = y''^2 F(y')$ 2. $y''' = y'' F(x)$
$A_{3,8}$	1. $y''' = \frac{3}{2} y'^{-1} y''^2 + u' F(x)$ 2. $y''' = x^{-2} y'^4 F((xy'' + \frac{1}{2} y') y'^3) + 3y'^{-1} q''^2$ 3. $y''' = x^{-2}(-1 + y'^2)^2 F((xy'' - y'(1 - y'^2))(-1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}})$ 4. $y''' = x^{-2}(1 + y'^2) F((xy'' - y'(1 + y'^2))(1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}) +$ $+3y'(1 + y'^2)^{-1} y''^2$
$A_{3,9}$	$y''' = (1 + y^2)^{-\frac{5}{2}}(1 + y^2 + y'^2) F((y + y'')^{-\frac{1}{3}}(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ $+3y'(y + y'')((1 + y^2 + y'^2)^{-1} - y(1 + y^2)^{-1} - y')$

Глава 3. О решении ОДУ четвертого порядка, допускающих четырехмерную алгебру Ли

В настоящей дипломной работе мы находим реализации четырехмерных алгебр Ли, обладающих коммутативной подалгеброй [6]. После этого мы находим общий вид уравнения 4 порядка, допускающих эти алгебры Ли. Далее, мы приводим метод сведения их к уравнениям третьего порядка, допускающим трехмерную алгебру Ли, то есть, к задаче решенной в [7]. Поскольку различных четырехмерных алгебр Ли существует довольно много, мы ограничимся случаем, когда трехмерный идеал представляет собой коммутативную подалгебру. Ниже приведен список таких алгебр Ли.

Тип	Нетривиальные коммутаторы	Подалгебра
$4A_1$	отсутствуют	$< e_2, e_3, e_4 >$
$A_2 \oplus 2A_1$	$[e_1, e_2] = e_2$	$< e_2, e_3, e_4 >$
$A_{3,2} \oplus A_1$	$[e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_1 + e_2,$	$< e_1, e_2, e_4 >$
$A_{3,3} \oplus A_1$	$[e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_2,$	$< e_1, e_2, e_4 >$
$A_{3,4} \oplus A_1$	$[e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = -e_2$	$< e_1, e_2, e_4 >$
$A^a_{3,5} \oplus A_1$ $(0 < \lvert a \rvert < 1)$	$[e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = ae_2,$	$< e_1, e_2, e_4 >$
$A_{3,6} \oplus A_1$	$[e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = e_1,$	$< e_1, e_2, e_4 >$
$A^a_{3,7} \oplus A_1$ $(0 > a)$	$[e_1, e_3] = ae_1 - e_2, [e_2, e_3] = e_1 + ae_2,$	$< e_1, e_2, e_4 >$
$A_{4,1}$	$[e_2, e_4] = e_1, [e_3, e_4] = e_2$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$A^a_{4,2}$ $(a \neq 0, 1)$	$[e_1, e_4] = ae_3, [e_2, e_4] = e_2,$ $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$A_{4,3}$ $(0 < a)$	$[e_1, e_4] = e_1, [e_3, e_4] = e_2,$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$A_{4,4}$	$[e_1, e_4] = e_1,\ [e_2, e_4] = e_1 + e_2,$ $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$A^{1,1}_{4,5}$	$[e_1, e_4] = e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,$ $[e_3, e_4] = e_3$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$A^{a,b}_{4,6}$ $(a \neq 0, b \geq 0)$	$[e_1, e_4] = ae_1,\ [e_2, e_4] = be_2 - e_3,$ $[e_3, e_4] = e_2 + be_3$	$< e_1, e_2, e_3 >$

Ряд вычислений мы проводим с помощью системы компьютерной алгеб-

ры `Maple 13`, с использованием пакета `DifferentialGeometry`. С помощью `Maple` мы вычисляем продолжения операторов в тех случаях, когда вычисления оказываются сложными. Кроме того, мы решаем системы дифференциальных уравнений в частных производных для нахождения общих инвариантов операторов. Первая из этих задач чисто техническая, поэтому использование системы компьютерной алгебры облегчает работу. Вторую задачу в ряде случаев вручную решить значительно сложнее. Проверка правильности результата вычислений программы может быть проведена вычислениями на бумаге.

Алгебра $4A_1$.

Коммутационные соотношения алгебры имеют вид:

$$[e_i, e_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Базис трехмерной подалгебры $3A_1$ образуют элементы e_2, e_3, e_4. Возьмем

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда можно выбрать

$$e_1 = f_1(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = f_2(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Возьмем $f_1(x) = x^2, f_2(x) = x^3$ и вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= x^2\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial y'} + 2\frac{\partial}{\partial y''},\\
e_2^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y},\\
e_3^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},\\
e_4^{(4)} &= x^3\frac{\partial}{\partial y} + 3x^2\frac{\partial}{\partial y'} + 6x\frac{\partial}{\partial y''} + 6\frac{\partial}{\partial y'''}.
\end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(4A_1)^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = y^{IV}, \quad I_2 = x.$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $4A_1$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = F(x).$$

Это уравнение решается последовательным четырехкратным интегрированием.

Алгебра $A_2 \oplus 2A_1$.

Эта алгебра является прямой суммой алгебры A_2 с коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_2 \tag{18}$$

и алгебры $3A_1$, натянутой на вектор e_4.

Выберем систему координат, в которой

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть в этой системе координат

$$e_k = \xi_k(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_k(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad k = 1,2,3.$$

Тогда из того, что e_2 коммутирует с векторными полями e_3 и e_4, следует, что ξ_k, η_k — функции только от переменной x при $k = 3,4$.

Из условия $[e_1, e_2] = e_2$ получим уравнения

$$\xi_{1y} = 0, \quad \eta_{1y} = -1.$$

Поэтому ξ_1 также зависит только от x, а $\eta_1 = -y + m(x)$.

Из условий $[e_1, e_3] = [e_1, e_4] = [e_3, e_4] = 0$ получим уравнения

$$\begin{aligned} &\xi_3\xi_{1x} = \xi_1\xi_{3x}, \quad \xi_1\eta_{3x} + \eta_3 = \xi_3\eta_{1x}, \\ &\xi_1\xi_{4x} = \xi_4\xi_{1x}, \quad \xi_1\eta_{4x} + \eta_4 = \xi_4\eta_{1x}, \\ &\xi_3\xi_{4x} = \xi_4\xi_{3x}, \quad \xi_3\eta_{4x} = \xi_4\eta_{3x}. \end{aligned} \tag{19}$$

Если $\xi_1 = 0$, то получаем, что

$$\eta_3 = \xi_3\eta_{1x}, \quad \eta_4 = \xi_4\eta_{1x}.$$

Легко видеть, что ξ_3 не может быть нулевой функцией, потому что в этом случае $\eta_3 = 0$ и, следовательно, $e_3 = 0$. Аналогично, $\xi_4 \neq 0$. Тогда из пятого уравнения системы (19) следует, что $\xi_3\xi_{4x} - \xi_4\xi_{3x} = 0$ или $(\xi_3/\xi_4)' = 0$, откуда $\xi_3 = C\xi_4$. Но тогда $\eta_3 = \xi_3\eta_{1x} = C\xi_4\eta_{1x} = C\eta_4$ и $e_3 = Ce_4$, но тогда векторы e_3 и e_4 зависимы.

Пусть $\xi_1 \neq 0$. Тогда первое и третье уравнения системы (19) означают, что $(\xi_3/\xi_1)' = 0$ и $(\xi_4/\xi_1)' = 0$. Тогда $\xi_3 = C_1\xi_1$ и $\xi_4 = C_2\xi_1$.

Домножим второе и четвертое уравнения системы (19) на C_2 и C_1 соответственно, и вычтем одно из другого. Получим, с учетом шестого уравнения, $C_2\eta_3 = C_1\eta_4$. Ясно, что $C_2\xi_3 = C_1\xi_4$. Отсюда следует, что e_3 и e_4 зависимы.

Таким образом, рассматриваемая алгебра не может быть реализована как алгебра векторных полей на плоскости переменных (x, y).

Алгебра $A_{3,2} \bigoplus A_1$.

Коммутационные соотношения алгебры $A_{3,2} \bigoplus A_1$:

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1 + e_2.$$

Выберем систему координат, в которой $e_1 = \frac{\partial}{\partial y}$. Пусть в этой системе координат

$$e_k = \xi_k(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_k(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad k = 2, 3, 4.$$

Тогда из того, что e_1 коммутирует с e_2 и e_4, следует, что получим, что ξ_2, η_2, ξ_4, η_4 — функции только от переменной x. Из равенства $[e_1, e_3] = e_1$ следует, что $\xi_{3y} = 0$, $\eta_{3y} = 1$.

Из условия $[e_2, e_4] = 0$ следует система уравнений

$$\xi_2\xi_4' - \xi_4\xi_2' = 0, \quad \xi_2\eta_4' - \eta_{2x}\xi_4 = 0.$$

Выберем для простоты $\xi_2 = 0$, $\xi_4 = 0$.

Из соотношения $[e_3, e_4] = 0$ следует, что

$$-\eta_4\eta_{3y} + \xi_3\eta_4' = 0,$$

следовательно,

$$\xi_3\eta_4' - \eta_4 = 0.$$

С учетом всего вышеизложенного из равенства $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$ вытекает, что

$$-\xi_3\eta_{2x} + \eta_2\eta_{3y} = 1 + \eta_2.$$

Отсюда имеем $\eta_{2x}\xi_3 = -1$. Выберем $\xi_3 = 1$, тогда можно взять $\eta_2 = -x$. Из уравнения $\eta_4' - \eta_4 = 0$ найдем $\eta_4 = e^x$. Наконец,

$$-e^x\eta_{3y} + e^x = 0,$$

откуда $\eta_{3y} = 1$ и

$$\eta_3 = y + f(x).$$

Окончательно имеем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = -x\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial x} + (y + f(x))\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = e^x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Рассмотрим случай $f(x) = 0$.

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y},\\
e_2^{(4)} &= -x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'},\\
e_3^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'} + y'\frac{\partial}{\partial y''} + y''\frac{\partial}{\partial y'''} + y'''\frac{\partial}{\partial y'''} + y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}},\\
e_4^{(4)} &= e^x\frac{\partial}{\partial y} + e^x\frac{\partial}{\partial y'} + e^x\frac{\partial}{\partial y''} + e^x\frac{\partial}{\partial y'''} + e^x\frac{\partial}{\partial y'''} + e^x\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.
\end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(A_{3,2} \bigoplus A_1)^{(4)}$. Находим ее инварианты

$$I_1 = \frac{y^{IV} - y''}{y''' - y''}, \quad I_2 = (y''' - y'')e^{-x}.$$

тогда ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A_{3,2} \bigoplus A_1$ принимает вид

$$y^{IV} = (y''' - y'')F((y''' - y'')e^{-x}) + y''. \tag{20}$$

Операторы e_1, e_2, e_4 образуют идеал h в алгебре $A_{3,2}$. Базис его дифференциальных инвариантов составляют функции

$$u = x, \quad v = -y'' + y'''.$$

Тогда

$$\frac{dv}{du} = \frac{Dv}{Du} = -y''' + y^{IV},$$

следовательно, уравнение (20) можно переписать в виде

$$\frac{dv}{du} = (v)F(ve^{-u})) - v. \tag{21}$$

Это уравнение допускает оператор e_3. Найдем, как запишется этот оператор в координатах (u, v). Из формулы продолжения $e_3^{(4)}$ следует, что

$$e_3^{(4)}(u) = e_3^{(4)}(x) = 1,$$

$$e_3^{(4)}(v) = e_3^{(4)}(y''' - y'') = -y'' + y''' = v.$$

Следовательно, оператор e_3 запишется как

$$X = e_3(u)\frac{\partial}{\partial u} + e_3(v)\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Сделаем замену переменных $(u, v) \to (p, q)$, приводящую X к оператору группы параллельных переносов. Для этого нужно найти решения уравнений $X(p) = 0$, $X(q) = 1$. Возьмем

$$p = ve^{-u}, \quad q = u,$$

тогда

$$u = q, \quad v = pe^q.$$

Уравнение (21) перепишется в виде

$$\frac{e^q dp + pe^q dq}{dq} = pe^q F(p) - pe^q$$

или, после преобразований,

$$\frac{dp}{dq} = pF(p) - 2p.$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Если его общее решение найдено, а, соответственно, и решение уравнения (21) найдено в виде $\Phi(u, v) = C$, то относительно y получится уравнение $\Phi(x, -y'' + y''') = C$, допускающее алгебру Ли h, натянутую на e_1, e_2, e_4, и поэтому решающееся в квадратурах [7].

Алгебра $A_{3,3} \oplus A_1$.

Эта алгебра является прямой суммой алгебры $A_{3,3}$ с коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_3] = e_1, \ [e_2, e_3] = e_2 \tag{22}$$

и алгебры A_1, натянутой на вектор e_4.

Выберем систему координат, в которой

$$e_4 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть в этой системе координат

$$e_k = \xi_k(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_k(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Тогда из того, что e_4 коммутирует со всеми векторными полями e_k,

$$\xi_{ky}\frac{\partial}{\partial x}+\eta_{ky}\frac{\partial}{\partial y}=0,$$

получим, что ξ_k, η_k — функции только от переменной x при $k=1,2,3$.

Из условий (22) следует система уравнений

$$\begin{aligned}
&\xi_3'\xi_1-\xi_1'\xi_3=\xi_1, \qquad &&\xi_3'\xi_2-\xi_2'\xi_3=\xi_2,\\
&\eta_3'\xi_1-\eta_1'\xi_3=\eta_1, \qquad &&\eta_3'\xi_2-\eta_2'\xi_3=\eta_2,\\
&\xi_2'\xi_1-\xi_1'\xi_2=0, \qquad &&\eta_2'\xi_1-\eta_1'\xi_2=0,
\end{aligned} \tag{23}$$

где штрихом обозначена производная по x.

Рассмотрим сначала уравнение $\xi_2'\xi_1-\xi_1'\xi_2=0$.

Если в нем $\xi_2=0$, то также и $\xi_1=0$. Тогда из других уравнений системы (23) следует, что

$$\frac{\eta_2'}{\eta_2}=\frac{\eta_1'}{\eta_1}=m(x), \quad \text{где} \quad m(x)=-\frac{1}{\xi_3}.$$

Отсюда

$$\eta_1=C_1\exp\left(\int m(x)\,dx\right), \qquad \eta_2=C_2\exp\left(\int m(x)\,dx\right),$$

где C_i — постоянные. Поэтому $C_2e_1-C_1e_2=0$, что противоречит линейной независимости векторов базиса алгебры.

Если же ξ_1 и ξ_2 не равны нулю тождественно, то из уравнения $\xi_2'\xi_1-\xi_1'\xi_2=0$ следует, что

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)=0,$$

откуда $\xi_1=C\xi_2$ для некоторой постоянной C. Тогда из последнего уравнения системы (23) следует, что $\eta_1'=C\eta_2'$. Подставим это в уравнения второй строки системы (23):

$$C(\eta_3'\xi_2-\eta_2'\xi_3)=\eta_1, \quad \eta_3'\xi_2-\eta_2'\xi_3=\eta_2$$

и получим, что $\eta_1=C\eta_2$, откуда $e_1=Ce_2$, что невозможно

Следовательно, алгебра $A_{3,3}\oplus A_1$ не может быть реализована как алгебра векторных полей на $\mathbb{R}^2$.

Алгебра $A_{3,4}\bigoplus A_1$.

Коммутационные соотношения алгебры $A_{3,4} \bigoplus A_1$ имеют вид

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2.$$

Выберем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = f_2(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = f_4(x)\frac{\partial}{\partial y},$$

тогда попарные скобки этих полей будут равны нулю. Пусть

$$e_3 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y},$$

Тогда

$$[e_1, e_3] = \xi_y\frac{\partial}{\partial x} + \eta_y\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} = e_1.$$

Отсюда $\xi_y = 0$, $\eta_y = 1$. Пусть $\eta = y + f(x)$, $\xi = x$.

Из соотношения $[e_3, e_4] = 0$ следует, что $xf_4(x)' - f_4(x) = 0$. Выберем $f_4(x) = x$. Отсюда получаем, что $e_4 = x\frac{\partial}{\partial x}$.

Из условия $[e_3, e_2] = e_2$ следует, что $xf_2(x)' - f_2(x) = f_2(x)$. Тогда можно взять $f_2(x) = x^2$.

Окончательно имеем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = x^2\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (y + f(x))\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Рассмотрим случай $f(x) = 0$.

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y}, \\
e_2^{(4)} &= x^2\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial y'} + 2\frac{\partial}{\partial y''}, \\
e_3^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y'} - y''\frac{\partial}{\partial y''} - 2y'''\frac{\partial}{\partial y'''} - 3y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}}, \\
e_4^{(4)} &= y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'}.
\end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $A_{3,4}^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = y^{IV}x^3, \quad I_2 = x^2y'''.$$

Это значит, что уравнение, допускающее алгебру $A_{3,4}$ имеет вид

$$y^{IV} = x^{-3}F(x^2y'''). \tag{24}$$

Операторы e_1, e_2, e_4 образуют идеал h в алгебре $A_{3,4}$. Базис его дифференциальных инвариантов составляют функции

$$u = x, \quad v = y'''.$$

Тогда

$$\frac{dv}{du} = \frac{Dv}{Du} = y^{IV},$$

следовательно, уравнение (24) можно переписать в виде

$$\frac{dv}{du} = u^{-3}F(u^2v). \tag{25}$$

Это уравнение допускает оператор e_3. Найдем, как запишется этот оператор в координатах (u, v). Из формулы продолжения $e_3^{(4)}$ следует, что

$$e_3^{(4)}(u) = e_3^{(4)}(x) = x = u,$$

$$e_3^{(4)}(v) = e_3^{(4)}(y''') = -2y''' = -2v.$$

Следовательно, оператор e_3 запишется как

$$X = e_3(u)\frac{\partial}{\partial u} + e_3(v)\frac{\partial}{\partial v} = u\frac{\partial}{\partial u} - 2v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Сделаем замену переменных $(u, v) \to (p, q)$, приводящую X к оператору группы параллельных переносов. Для этого нужно найти решения уравнений $X(p) = 0$, $X(q) = 1$. Возьмем

$$p = u^2v, \quad q = \ln u,$$

тогда

$$u = e^q, \quad v = pe^{-2q}.$$

Уравнение (25) перепишется в виде

$$\frac{e^{-2q}dp - 2pe^{-2q}dq}{e^q dq} = e^{-3q}F(p)$$

или, после преобразований,

$$\frac{dp}{dq} = F(p) + 2p.$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Если его общее решение найдено, а, соответственно, и решение уравнения (25) найдено в виде

$\Phi(u,v) = C$, то относительно y получится уравнение $\Phi(x, y''') = C$. Если переписать его в виде $y''' = g(x,c)$, то он решается троекратным интегрированием.

Алгебра $A^a_{3,5} \oplus A_1 (0 < |a| < 1)$.

Соотношения этой алгебры имеют вид:

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = ae_2.$$

Выберем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = g(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Как и в случае алгебры $A_{3,4}$:

$$e_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (y + f(x))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Взяв $e_2 = g(x)\frac{\partial}{\partial y}$, из соотношения

$$[e_2, e_3] = (g - xg')\frac{\partial}{\partial y} = ag\frac{\partial}{\partial y}$$

получаем, что $g - xg' = ag$. Откуда $g' = (1-a)\frac{g}{x}$, следовательно $g = x^{1-a}$.

Окончательно получаем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = x^{1-a}\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (y + f(x))\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y}, \\
e_2^{(4)} &= x^{1-a}\frac{\partial}{\partial y} - x^{-a}(-1+a)\frac{\partial}{\partial y'} - x^{-1-a}(-1+a)\frac{\partial}{\partial y''} + \\
&\quad -x^{-2-a}(-1+a^2)\frac{\partial}{\partial y'''} + x^{-3-a}(-2-a+2a^2+a^3)\frac{\partial}{\partial y^{IV}}, \\
e_3^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y'} - y''\frac{\partial}{\partial y''} - 2y'''\frac{\partial}{\partial y'''} - 3y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}}, \\
e_4^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'}.
\end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(A^a_{3,5} \oplus A_1)^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = -x^{-a}y''(2+a)(1+a)(x^{4+a} - y^{IV}), \quad I_2 = x^{-a}y''(1+a)(x^{3+a} + y'''),$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A^a_{3,5} \oplus A_1$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = \frac{-x^4 y''(2+a)(1+a) + F((x^{-a})y''(1+a)(x^{3+a} + y'''))}{x^{-a} y''(2+a)(1+a)}.$$

Алгебра $A_{3,6} \oplus A_1$.

Соотношения этой алгебры определяются следующим образом:

$$[e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

Трехмерная подалгебра $A_{3,6}$ натянута на векторы e_1, e_2, e_4. Выберем, как и для алгебры $A_{3,4} \oplus A_1$,

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = f_2(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} \quad e_4 = f_4(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть $e_4 = x\frac{\partial}{\partial y}$. Из соотношения $[e_3, e_4] = 0$ следует, что $x\xi_y = 0$, $x\eta_y = \xi$. Пусть

$$\xi = m(x), \quad \eta = y\frac{m}{x} + n(x).$$

Из соотношения $[e_1, e_3] = -e_2 = -f_2(x)\frac{\partial}{\partial y}$ следует, что

$$f_2(x) = -\frac{m}{x}.$$

После этого из условия $[e_2, e_3] = e_1$ получаем, что $-\frac{m}{x}(xf_2(x)' - f_2(x)) = 1$. Отсюда

$$f_2(x)(xf_2(x)' - f_2(x)) = 1,$$

тогда

$$f_2(x) = (cx^2 - 1)^{1/2}.$$

Выберем $c = 1$ и получаем $m = -xf_2(x) = -x(x^2-1)^{1/2}$. Окончательно имеем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = (x^2-1)^{1/2}\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = (x^2-1)^{1/2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad e_4 = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4. Они имеют вид

$$
\begin{aligned}
&e_1^{(4)} = \frac{\partial}{\partial y},\\
&e_2^{(4)} = (x^2-1)^{1/2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{(x^2-1)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial y''}\\
&+\frac{3x}{(x^2-1)^{5/2}}\frac{\partial}{\partial y'''} - \frac{3(4x^2+1)}{(x^2-1)^{7/2}}\frac{\partial}{\partial y^{IV}},\\
&e_4^{(4)} = x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&e_3^{(4)} = x(x^2-1)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x} - y(x^2-1)^{1/2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x(-y+y'x)}{(x^2-1)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial y'}\\
&+\frac{y-y'x+3x^4y''-4x^2y''+y''}{(x^2-1)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial y''}\\
&+\frac{-3yx+3y'x^2+3x^5y''-9x^3y''+6xy''+5y'''x^6-12y'''x^4+9y'''x^2-2y'''}{(x^2-1)^{5/2}}\frac{\partial}{\partial y'''}\\
&-\Bigg(\frac{3y-6y''+3y''''-3y'x+12x^2y-12y'x^3+6y''x^4-14y'''x+7y''''x^8}{(x^2-1)^{7/2}}\\
&+\frac{-24y''''x^6+30y''''x^4-16y''''x^2+8x^7y'''-30x^5y'''+36x^3y'''}{(x^2-1)^{7/2}}\Bigg)\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.
\end{aligned}
$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(A_{3,6})^{(4)}$.

В силу сложности третьего уравнения, решить систему $e_i^{(4)}(I) = 0$, $i = 1,2,3,4$, с помощью Maple не удается. Поэтому мы поступим следующим образом. Сначала найдем инварианты подалгебры, натянутой на e_1, e_2, e_4. Их будет три, и они имеют вид

$$
x, \quad \frac{3x''+(x^2-1)y'''}{x^2-1}, \quad \frac{y^{IV}(x^2-1)^2-3y''(4x^2+1)}{(x^2-1)^2}.
$$

Обозначим

$$
p = 3x''+(x^2-1)y''', \qquad q = y^{IV}(x^2-1)^2-3y''(4x^2+1).
$$

Попробуем найти инварианты исходной алгебры в виде $F(x,p,q)$. Для этого нужно подставить функцию $I(x,y,y',y'',y''',y^{IV}) = F(x,p,q)$ в уравнение $e_3^{(4)}(I) = 0$. Тогда это уравнение перепишется в виде

$$
(x^3-x)\frac{\partial F}{\partial x} - (3x^2-2)p\frac{\partial F}{\partial p} + ((3-3x^2)q - 2x(4x^2-7)p)\frac{\partial F}{\partial q} = 0.
$$

Это уравнение уже получается решить — его интегралами являются функции

$$I_1 = \frac{y^{IV}}{px\sqrt{x^2-1}} \quad \text{и} \quad I_2 = x^2(qx + 8px^2 - 2p).$$

Они и являются инвариантами алгебры $(A_{3,6})^{(4)}$. Следовательно, общее уравнение четвертого порядка, допускающее эту алгебру, имеет вид

$$y^{IV} = px\sqrt{x^2-1} \cdot F(x^2(qx + 8px^2 - 2p))$$

Алгебра $A^a_{3,7} \oplus A_1$.

Коммутативные соотношения алгебры таковы:

$$[e_1, e_3] = ae_1 - e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1 + ae_2.$$

Базис трехмерной коммутативной подалгебры образуют элементы e_1, e_2, e_4. Выберем

$$e_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_1 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть

$$e_4 = g(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Условие $[e_3, e_4] = 0$ тогда означает, что

$$\xi_y = 0, \quad \xi g' - g\eta_y = 0.$$

Запишем условия $[e_1, e_3] = ae_1 - e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1 + ae_2$. Из них следует, что

$$\eta_y = a - x, \quad x\eta_y - \xi = 1 + ax.$$

Отсюда $\eta = (a-x)y + f(x)$, $\xi = -(1+x^2)$. Относительно функции $g(x)$ получается уравнение

$$(1+x^2)g' + (a-x)g = 0.$$

Из него находим

$$g(x) = C\sqrt{1+x^2}e^{-a\operatorname{arctg} x}.$$

Выберем $f(x) = 0$ и $C = 1$, и окончательно получим

$$e_4 = (1+x^2)^{1/2}e^{-a\operatorname{arctg} x}\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = -(1+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + ((a-x)y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка:

$$e_1^{(4)} = \frac{\partial}{\partial y},$$
$$e_2^{(4)} = x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},$$
$$e_3^{(4)} = -(1+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (ay - xy)\frac{\partial}{\partial y} + (-y + ay' + xy')\frac{\partial}{\partial y} +$$
$$+(3x+a)y''\frac{\partial}{\partial y''} + (3y'' + y'''(5x+a))\frac{\partial}{\partial y'''} + (8y''' + (7x+a)y^{IV})\frac{\partial}{\partial y^{IV}},$$
$$e_4^{(4)} = (1+x^2)^{1/2}e^{a\arctan(x)}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $A_{3,7}^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = e^{a\arctan(x)}(-y^{IV}(x^2+1)^2 - 8x(x^2+1)y''' - 12x^2y'' - 3y'' + a^2y''),$$
$$I_2 = e^{a\arctan(x)}((1+x^2)y''' + y''(a+3x))(1+x^2)^{3/2}.$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A_{3,7}$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = -\frac{(8x^3y''' + 12x^2y'' + 8xy''' + 3y'' - a^2y'')}{(x^2+1)^2} + e^{b\arctan(x)}(x^2+1)^{-7/2}F(I_2).$$

Алгебра $A_{4,1}$

Коммутативные соотношения алгебры имеют вид:

$$[e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2.$$

Базис трехмерной подалгебры $3A_1$ образуют элементы e_1, e_2, e_3. Возьмем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = (x^2/2)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть $e_4 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$.

Запишем условия $[e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2, \quad [e_1, e_4] = 0$.

Они принимают вид

$$\xi_y = \eta_y = 0,$$
$$\xi = -1, \quad \eta = f(x).$$

Легко видеть, что функции $\xi = -1$, $\eta = f(x)$ являются ее решением. Поэтому возьмем $f(x) = x^3$, тогда

$$e_4 = -\frac{\partial}{\partial x} + x^3\frac{\partial}{\partial y}$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка. Они имеют вид

$$
\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y},\\
e_2^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial y},\\
e_3^{(4)} &= (x^2/2)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},\\
e_4^{(4)} &= -\frac{\partial}{\partial x} + x^3\frac{\partial}{\partial y} + 3x^2\frac{\partial}{\partial y'} + 6x\frac{\partial}{\partial y''} + 6\frac{\partial}{\partial y'''}.
\end{aligned}
$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(A^1_{4,1})^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = y^{IV}, \quad I_2 = y''' + 6x.$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A^1_{4,1}$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = F(y''' + 6x). \tag{26}$$

Операторы e_1, e_2, e_4 образуют идеал h в алгебре $A_{4,1}$. Базис его дифференциальных инвариантов составляют функции

$$u = 3x^2 + y'', \quad v = 6x + y'''.$$

Тогда

$$\frac{dv}{du} = \frac{Dv}{Du} = \frac{6 + y^{IV}}{6x + y'''},$$

следовательно, уравнение (26) можно переписать в виде

$$\frac{dv}{du} = \frac{6 + F(v)}{v}. \tag{27}$$

Это уравнение допускает оператор e_4. Найдем, как запишется этот оператор в координатах (u, v). Из формулы продолжения $e_4^{(4)}$ следует, что

$$e_4^{(4)}(u) = e_4^{(4)}(3x^2 + y'') = -6x + 6x = 0,$$

$$e_4^{(4)}(v) = e_4^{(4)}(6x + y''') = -1 + 6 = 5.$$

Следовательно, оператор e_3 запишется как

$$X = e_4(u)\frac{\partial}{\partial u} + e_4(v)\frac{\partial}{\partial v} = 5\frac{\partial}{\partial v}.$$

Этот оператор уже пропорционален оператору группы параллельных переносов $\frac{\partial}{\partial v}$. Уравнение (27) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Если его общее решение найдено, а, соответственно, и решение уравнения (27) найдено в виде $\Phi(u,v)=C$, то относительно y получится уравнение $\Phi(3x^2+y'',6x+y''')=C$, допускающее алгебру Ли h, натянутую на e_1, e_2, e_4, и поэтому решающееся в квадратурах [7].

Алгебра $A^a_{4,2}$

Коммутативные соотношения имеют вид:

$$[e_1,e_4]=ae_1,\quad [e_2,e_4]=e_2,\quad [e_3,e_4]=e_2+e_3.$$

Трехмерная подалгебра $A^a_{4,2}$ натянута на векторы e_1,e_2,e_4. Выберем,

$$e_i=\xi_i\frac{\partial}{\partial x}+\eta_i\frac{\partial}{\partial y}, i=1,4,\quad e_2=-\frac{\partial}{\partial y},\quad e_3=x\frac{\partial}{\partial y}$$

Из соотношения $[e_1,e_2]=0$ получим, что $\xi_1=\xi_1(x),\eta_1=\eta_1(x)$. А из условия $[e_1,e_3]=0$ следует, что $\xi_1=0$.

После этого из условия

$$[e_1,e_4]=\eta_1\xi_{4y}\frac{\partial}{\partial x}+(\eta_{1x}\xi_4+\eta_1\eta_{4y})\frac{\partial}{\partial y}=a\eta_1\frac{\partial}{\partial y}$$

получаем, что $\xi_4=m(x)$. Отсюда

$$-\eta_1'm+\eta_1(\eta_4)_y=a\eta_1.$$

Из соотношения $[e_2,e_4]=-\eta_{4y}\frac{\partial}{\partial y}=e_2$ получаем, что $\eta_{4y}=-1$ и значит $\eta_4=-y+n(x)$.

Возьмем соотношение

$$[e_3,e_4]=(x-m)\frac{\partial}{\partial y}=(x-1)\frac{\partial}{\partial y}=e_2+e_3.$$

Тогда $m=1$. Получаем, что

$$e_4=\frac{\partial}{\partial x}+(y+n(x))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Возьмем $n=0$.

Решим уравнение $-\eta_1'+\eta_1=a\eta_1$. Имеем $\eta_1'=\eta_1(1-a)$, $\eta_1=e^{(1-a)x}$.

В итоге получаем, что $e_1=e^{(1-a)x}\frac{\partial}{\partial y}$.

Окончательно имеем

$$e_1 = e^{(1-a)x}\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = -\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= e^{(1-a)x}\frac{\partial}{\partial y},\\
e_2^{(4)} &= -\frac{\partial}{\partial x},\\
e_3^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},\\
e_4^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{\partial}{\partial y'} + y''\frac{\partial}{\partial y''} + y'''\frac{\partial}{\partial y'''} + y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.
\end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(A^a_{4,2})^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = -e^{-x}((-1+a)^2y'' - y^{IV}), \quad I_2 = ((-1+a)y'' + y''')e^{-x}.$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A^a_{4,2}$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = \frac{-e^{-x}(-1+a)^2y'' + F(((-1+a)y'' + y''')e^{-x})}{e^{-x}}.$$

Алгебра $A_{4,3}$

Рассмотрим коммутативные соотношения этой алгебры:

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2.$$

Базис трехмерной коммутативной подалгебры образуют элементы e_1, e_2, e_3. Выберем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда

$$e_3 = f(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Запишем условия $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4] = e_2$, $[e_2, e_4] = 0$. Они принимают вид

$$\begin{aligned}
&\xi_y = 0,\ \eta_y = 1,\\
&x\xi_y = 0,\ x\eta_y - \xi = 0,\\
&f\xi_y = 0,\ f\eta_y - f'\xi = x.
\end{aligned}$$

Отсюда $\xi = x$, $\eta = y + m(x)$. Условие на функцию f перепишется в виде $f' - f/x = -1$, откуда получаем, что $f = -x\ln x$. Окончательно имеем

$$e_3 = -x\ln x\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + (y + m(x))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Выберем $m = 0$ и вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y},\\
e_2^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},\\
e_3^{(4)} &= -x\ln x\frac{\partial}{\partial y} - (\ln x + 1)\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y''} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial y'''} - \frac{2}{x^3}\frac{\partial}{\partial y^{IV}},\\
e_4^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - y''\frac{\partial}{\partial y''} - 2y'''\frac{\partial}{\partial y'''} - 3y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.
\end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $A_{4,3}^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = xy' + x^3y''', \quad I_2 = -2xy'' + x^3y^{IV}.$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A_{4,3}$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = \frac{2xy'' + F\left(xy'' + x^2y'''\right)}{x^3}. \tag{28}$$

Операторы e_1, e_2, e_3 образуют идеал h в алгебре $A_{4,3}$. Базис его дифференциальных инвариантов составляют функции

$$u = x, \quad v = \frac{y'' + xy'''}{x}$$

Тогда

$$\frac{dv}{du} = \frac{Dv}{Du} = \frac{y'''}{x} - \frac{y''}{x^2} + y^{IV},$$

следовательно, уравнение (28) можно переписать в виде

$$\frac{dv}{du} = \frac{u^2v + F(u^2v)}{u^3}. \tag{29}$$

Это уравнение допускает оператор e_4. Найдем, как запишется этот оператор в координатах (u, v). Из формулы продолжения $e_4^{(4)}$ следует, что

$$e_4^{(4)}(u) = e_4^{(4)}(x) = x = u,$$

$$e_4^{(4)}(v) = e_4^{(4)}(\frac{y'' + xy'''}{x}) = -\frac{y''}{x} - x\frac{y''}{x^2} - 2y''' = -2v.$$

Следовательно, оператор e_4 запишется как

$$X = e_4(u)\frac{\partial}{\partial u} + e_4(v)\frac{\partial}{\partial v} = u\frac{\partial}{\partial u} - 2v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Сделаем замену переменных $(u, v) \to (p, q)$, приводящую X к оператору группы параллельных переносов. Для этого нужно найти решения уравнений $X(p) = 0$, $X(q) = 1$. Возьмем

$$p = u^2 v, \quad q = \ln u,$$

тогда

$$u = e^q, \quad v = \frac{p}{e^{2q}}.$$

Уравнение (29) перепишется в виде

$$\frac{e^{-2q}dp - 2pe^{-2q}dq}{e^q dq} = \frac{p + F(p)}{e^{3q}}$$

или, после преобразований,

$$\frac{dp}{dq} = 3p + F(p).$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Если его общее решение найдено, а, соответственно, и решение уравнения (29) найдено в виде $\Phi(u, v) = C$, то относительно y получится уравнение $\Phi(x, \frac{y''+xy'''}{x}) = C$, допускающее алгебру Ли h, натянутую на e_1, e_2, e_3, и поэтому решающееся в квадратурах [7].

Алгебра $A_{4,4}$

Коммутативные соотношения этой алгебры имеют вид:

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_1 + e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3. \tag{30}$$

Базис трехмерной подалгебры $3A_1$ образуют элементы e_1, e_2, e_3. Возьмем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть $e_4 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$.

Запишем условия (30). Они принимают вид

$$\eta_y = 1, \quad \eta = f(x) + y, \quad \xi = -1.$$

Легко видеть, что функции $\xi = -1$, $\eta = f(x) + y$ являются ее решением. Поэтому возьмем

$$e_4 = -\frac{\partial}{\partial x} + (y + f(x))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Выберем $f(x) = 0$ и вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y}, \\
e_2^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'}, \\
e_3^{(4)} &= \frac{1}{2}x^2\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y''}, \\
e_4^{(4)} &= -\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{\partial}{\partial y'} + y''\frac{\partial}{\partial y''} + y'''\frac{\partial}{\partial y'''} + y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.
\end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(A_{4,4})^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = \frac{y^{IV}}{y'''}, \quad I_2 = y'''e^x.$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A_{4,4}$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = y'''F(y'''e^x). \tag{31}$$

Операторы e_1, e_2, e_3 образуют идеал h в алгебре $A_{4,4}$. Базис его дифференциальных инвариантов составляют функции

$$u = x, \quad v = y'''.$$

Тогда

$$\frac{dv}{du} = \frac{Dv}{Du} = y^{IV},$$

следовательно, уравнение (31) можно переписать в виде

$$\frac{dv}{du} = vF(e^u v). \tag{32}$$

Это уравнение допускает оператор e_4. Найдем, как запишется этот оператор в координатах (u, v). Из формулы продолжения $e_4^{(4)}$ следует, что

$$e_4^{(4)}(u) = e_4^{(4)}(x) = -1,$$

$$e_4^{(4)}(v) = e_4^{(4)}(y''') = y''' = v.$$

Следовательно, оператор e_4 запишется как

$$X = e_4(u)\frac{\partial}{\partial u} + e_4(v)\frac{\partial}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Сделаем замену переменных $(u, v) \to (p, q)$, приводящую X к оператору группы параллельных переносов. Для этого нужно найти решения уравнений $X(p) = 0$, $X(q) = -1$. Возьмем

$$p = e^u v, \quad q = u,$$

тогда

$$u = q, \quad v = pe^{-q}.$$

Уравнение (32) перепишется в виде

$$\frac{e^{-q}dp - pe^{-q}dq}{dq} = pe^{-q}F(p).$$

или, после преобразований,

$$\frac{dp}{dq} = pF(p) + p.$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Если его общее решение найдено, а, соответственно, и решение уравнения (32) найдено в виде $\Phi(u, v) = C$, то относительно y получится уравнение $\Phi(x, y''') = C$. Если переписать его в виде $y''' = g(x, c)$, то он решается троекратным интегрированием.

Алгебра $A_{4,5}^{1,1}$

Коммутационные соотношения этой алгебры имеют вид:

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_3. \tag{33}$$

Базис трехмерной подалгебры $3A_1$ образуют элементы e_1, e_2, e_3. Возьмем

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть $e_1 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$.

Запишем условия (33). Получаем, что функции $\xi = 0$, $\eta = f(x)$ являются ее решением. Поэтому возьмем

$$e_1 = f(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Выберем $f(x) = x^2$ и вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= x^2\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial y'} + 2\frac{\partial}{\partial y''},\\
e_2^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y},\\
e_3^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},\\
e_4^{(4)} &= y\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{\partial}{\partial y'} + y''\frac{\partial}{\partial y''} + y'''\frac{\partial}{\partial y'''} + y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.
\end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(A_{4,5})^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = \frac{y^{IV}}{y'''}, \quad I_2 = x.$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A_{4,5}$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = y'''F(x). \tag{34}$$

Операторы e_1, e_2, e_3 образуют идеал h в алгебре $A_{4,5}$. Базис его дифференциальных инвариантов составляют функции

$$u = x, \quad v = y'''$$

Тогда

$$\frac{dv}{du} = \frac{Dv}{Du} = y^{IV},$$

следовательно, уравнение (34) можно переписать в виде

$$\frac{dv}{du} = vF(u). \tag{35}$$

Это уравнение допускает оператор e_4. Найдем, как запишется этот оператор в координатах (u, v). Из формулы продолжения $e_4^{(4)}$ следует, что

$$e_4^{(4)}(u) = e_4^{(4)}(x) = 0,$$

$$e_4^{(4)}(v) = e_4^{(4)}(y''') = y''' = v.$$

Следовательно, оператор e_4 запишется как

$$X = e_4(u)\frac{\partial}{\partial u} + e_4(v)\frac{\partial}{\partial v} = v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Сделаем замену переменных $(u, v) \to (p, q)$, приводящую X к оператору группы параллельных переносов. Для этого нужно найти решения уравнений $X(p) = 0$, $X(q) = 1$. Возьмем

$$p = u, \quad q = \ln v,$$

тогда

$$v = e^q, \quad u = p.$$

Уравнение (35) перепишется в виде

$$\frac{e^q dq}{dp} = e^q F(p)$$

или, после преобразований,

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{F(p)}.$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Если его общее решение найдено, а, соответственно, и решение уравнения (35) найдено в виде $\Phi(u, v) = C$, то относительно y получится уравнение $\Phi(x, y''') = C$. Если переписать его в виде $y''' = g(x, c)$, то он решается троекратным интегрированием.

Алгебра $A_{4,6}^{a,b}$

Рассмотрим коммутационные соотношения алгебры:

$$[e_1, e_4] = ae_1, \quad [e_2, e_4] = be_2 - e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2 + be_3.$$

Базис трехмерной коммутативной подалгебры образуют элементы e_1, e_2, e_3. Выберем

$$e_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда

$$e_1 = f(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Запишем условия $[e_1, e_4] = ae_1, \quad [e_2, e_4] = be_2 - e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2 + be_3$. Они принимают вид

$$\xi = 1 + x^2,$$
$$\eta = xy + by.$$

Отсюда $\xi = x$, $\eta = y + m(x)$. Окончательно имеем

$$e_1 = (1+x^2)^{1/2} e^{(b-a)\arctan(x)} \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = (1+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (xy + by)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Выберем $m = 0$ и вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка:

$$e_2^{(4)} = x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},$$
$$e_3^{(4)} = \frac{\partial}{\partial y},$$
$$e_4^{(4)} = (1+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (xy+by)\frac{\partial}{\partial y} + (y - xy' + y'b)\frac{\partial}{\partial y} + (-3xy'' + y''b)\frac{\partial}{\partial y''}$$
$$+(-3y'' - 5xy''' + y'''b)\frac{\partial}{\partial y'''} + (-8y''' - 7xy^{IV} + y^{IV}b)\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.$$

Выражение для $e_1^{(4)}$ очень громоздкое, мы не будем его здесь приводить. Эти поля образуют базис продолженной алгебры $A_{4,6}^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = -(1+x^2)^{3/2}(-y^{IV}x^4 - 8x^3y''' + (-2y^{IV} - 12y'')x^2 - 8xy'''$$
$$+((b-a)^2 - 3)y'' - y^{IV})e^{-b\arctan(x)},$$

$$I_2 = e^{(-b)\arctan(x)}((3x - b + a)y'' + y'''(1+x^2))(1-x^2)^{3/2}$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A_{4,6}$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = \frac{(b-a)^2y'' - (8x^3y''' + 12x^2y'' + 8xy''' + 3y'')}{(x^2+1)^2} + e^{b\arctan(x)}(x^2+1)^{-7/2}F(I_2).$$

Заключение

В дипломной работе решены следующие задачи:

1. Приведены примеры, показывающие, как записать общий вид уравнения, допускающего данную однопараметрическую группу и иллюстрирующие методы решения ОДУ 1 порядка, допускающих группу.

2. Построены реализации на плоскости четырехмерных алгебр Ли, обладающих коммутативной трехмерной подалгеброй.

3. Выписан общий вид ОДУ 4 порядка, допускающих эти алгебры Ли.

4. Приведена схема интегрирования полученных ОДУ 4 порядка.

Список литературы

[1] Н.Х. Ибрагимов. *Азбука группового анализа.* – М.: Знание. – 1989. – 48 с.

[2] Н.Х. Ибрагимов. *Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Знание. – 1991. – 48 с.

[3] Н.Х. Ибрагимов. *Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования.* – Н.Новгород: Изд-во ННГУ – 2007. – 421 с.

[4] М.М. Постников *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.* М., Наука, 1987, 480 с.

[5] В.В. Шурыгин. *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (учебно-методическое пособие). – Казань: Изд-во КПФУ. – 2010. – 55 с.

[6] T. Cerquetelli, N. Ciccoli, M. C. Nucci, *Four dimensional Lie symmetry algebras and fourth order ordinary differential equations*, J. Nonlinear Math. Phys. 9-suppl 2 (2002) pp. 24–35, `arXiv:nlin/0205064 [nlin.SI]`.

[7] N.H. Ibragimov, M.C. Nucci, *Integration of third order ordinary differential equations by Lie's method: equations admitting three-dimensional Lie algebras*, Lie Groups and their Applications **2** (1994), 49–64.

[8] F. M. Mahomed, P. G. L. Leach, *Lie algebras associated with scalar second order ordinary differential equations*, J. Math. Phys., vol. 30 (1989), 2770–2777.

[9] F. M. Mahomed, *Symmetry group classification of ordinary differential equations: Survey of some results*, Math. Meth. Appl. Sci., 2007, 30, 1995–2012.

[10] K. S. Mahomed and E. Momoniat, *Symmetry Classification of First Integrals for Scalar Linearizable Second-Order ODEs*, J. of Appl. Math., Vol. 2012 (2012), Article ID 847086, 14 pp.

[11] A. Schmucker, G. Czichowski, *Symmetry algebras and normal forms of third order ordinary differential equations*, J. of Lie Theory, Vol. 8 (1998) 129–137.