ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 517.929

В.Б. ЧЕРЕПЕННИКОВ

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ КВАЗИРЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение

В работе исследуется неоднородная линейная система дифференциально-разностных уравнений $\dot{x}(t) = A(t)x(t-1) + f(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, когда в момент $t = 0$ известно значение искомой функции $x(0) = x_0$ [1]–[4]. Переменная матрица $A(t)$ и вектор $f(t)$ полагаются полиномами. Автору не известны результаты, устанавливающие условия разрешимости данной задачи в классе аналитических функций. В работе вводится формальное решение в виде ряда по степеням независимой переменной, по отношению к которому рассматривается полином некоторой степени N. При подстановке этого полинома в исходную задачу появляется невязка $\triangle(t) = O(t^{N+1})$. Тогда термин “полиномиальное квазирешение” понимается в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ всегда можно указать такое $t_* > 0$, при котором для всех $|t| \le t_*$ определенная соответствующим образом норма $\|\triangle(t)\| \le \varepsilon$.

Работа посвящена нахождению полиномиальных квазирешений исследуемой задачи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу для линейной системы дифференциально-разностных уравнений:

$$d\overline{x}(t)/dt = A(t)\overline{x}(t-1) + \overline{f}(t), \quad t \in J = (-\infty, \infty), \quad \overline{x}(0) = x_0, \tag{2.1}$$

где $\overline{x}(t), \overline{f}(t) : J \to R^l$; $A(t) : J \to R^{l\times l}$; $x_0 \in R^l$. Будем полагать, что

$$A(t) = \sum_{n=0}^{A} A_n t^n, \quad \overline{f}(t) = \sum_{n=0}^{F} \overline{f}_n t^n; \quad A_n \in R^{l\times l}, \quad \overline{f}_n \in R^l, \quad F \ge A, \quad t \in J. \tag{2.2}$$

Пусть

$$\overline{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x}_n t^n, \quad \overline{x}_n \in R^l, \tag{2.3}$$

— формальное решение задачи (2.1). Применить классический метод неопределенных коэффициентов в этом случае не удается, поскольку построить рекуррентную формулу для определения неизвестных коэффициентов $\overline{x}_n$ в (2.3) не представляется возможным, а получающаяся в этом случае бесконечномерная линейная система уравнений относительно $\overline{x}_n$ пока не поддается анализу в смысле однозначной вычисляемости последовательности векторов $\{\overline{x}\}_{n=0}^{\infty}$ и, следовательно, связанного с ней представления решения в виде степенного ряда.

Введем полином

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad x_n \in R^l. \tag{2.4}$$

Для $x(t)$ имеем

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{N} n x_n t^{n-1}; \quad x(t-1) = \sum_{n=0}^{N} x_n (t-1)^n = \sum_{n=0}^{N} \widetilde{x}_n t^n, \tag{2.5}$$

где

$$\widetilde{x}_n = \sum_{i=0}^{N-n} (-1)^i C_{n+i}^i x_{n+i}.$$

Напишем соотношение

$$A(t)x(t-1) = \left(\sum_{n=0}^{A} A_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} x_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{A+N}\left(\sum_{i=0}^{n} A_{n-i}\widetilde{x}_i\right)t^n. \tag{2.6}$$

Проведем анализ размерностей полиномов, получающихся при подстановке (2.4) в (2.1). Производная $\dot{x}(t)$ представляется полиномом степени $N-1$, а функция $\overline{f}(t)$ имеет степень F. Тогда для того, чтобы при подстановке (2.4), (2.5) и (2.6) в (2.1) и сравнении степеней при одинаковых степенях t последний коэффициент в (2.4) x_n определялся последним заданным коэффициентом в (2.2) $\overline{f}_F$, необходимо, чтобы $N = F+1$. В этом случае степень полинома в (2.6) будет равна $A+F+1$.

Определим вектор-функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_{n=0}^{F+A+1} f_n t^n, \quad f_n \in R^l, \tag{2.7}$$

где $f_i = \overline{f}_i$, $i = \overline{0,F}$, а f_{F+i}, $i = \overline{1, A+1}$, — некоторые неизвестные коэффициенты.

Определение 2.1. Задачу

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t-1) + f(t), \quad t \in J = (-\infty, \infty), \quad x(0) = \overline{x}(0) = x_0, \tag{2.8}$$

будем называть согласованной по размерности полиномов относительно задачи (2.1).

Полагая в (2.4), (2.5) и (2.6) $N = F+1$ и подставляя эти выражения, а также (2.7) в (2.8), получим

$$\sum_{n=0}^{F+1} n x_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{A+F+1}\left(\sum_{i=0}^{n} A_{n-i}\widetilde{x}_i\right)t^n + \sum_{n=0}^{A+F+1} f_n t^n.$$

Поскольку $F \geq A$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, имеем

$$n x_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1} A_{n-1-i}\widetilde{x}_i + f_{n-1}, & 1 \leq n \leq A, \\ \sum\limits_{i=n-(A+1)}^{n-1} A_{n-1-i}\widetilde{x}_i + f_{n-1}, & A+1 \leq n \leq F+1, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$0 = \sum_{i=n-(A+1)}^{F+1} A_{n-1-i}\widetilde{x}_i + f_{n-1}, \quad F+2 \leq n \leq A+F+2. \tag{2.10}$$

Заметим, что в силу (2.7) первые F коэффициентов полинома $f(t)$ определяются коэффициентами полинома $\overline{f}(t)$ задачи (2.1). При этом допускается случай, когда некоторые последние или все коэффициенты $\overline{f}(t)$ равны нулю. Поскольку степень полинома $x(t)$ равна $F+1$, это позволяет выбрать степень полинома $\overline{f}(t)$ в зависимости от желаемой степени полинома $x(t)$, добавляя к $\overline{f}(t)$ соответствующее число нулевых членов.

Определение 2.2. Если существует полином степени $F+1$

$$x(t)=\sum_{n=0}^{F+1}x_nt^n,\quad x_n\in R^l, \tag{2.11}$$

удовлетворяющий задаче (2.8), то этот полином будем называть полиномиальным квазирешением задачи (2.1).

Ниже исследуются вопросы, связанные с условиями существования полиномиальных квазирешений и их нахождением.

3. Основные результаты

Для решения поставленной задачи выразим неизвестные коэффициенты x_n, $n=\overline{1,F+1}$, полиномиального квазирешения (2.11) через неизвестные коэффициенты f_n, $n=\overline{F+1,F+A+1}$, полинома (2.7) и найдем условия, при которых последние могут быть определены. С этой целью будем последовательно изучать соотношения (2.10) и (2.9), применяя для исследования метод математической индукции.

Перепишем формулу (2.10) в виде

$$\sum_{i=n-(A+1)}^{F+1}A_{n-1-i}\widetilde{x}_i+f_{n-1}=0,\quad F+2\le n\le A+F+2. \tag{3.1}$$

Проведем преобразование первого слагаемого в этом равенстве. Делая замену индекса суммирования $j=i-n+A+1$ и меняя порядок суммирования слагаемых, имеем

$$\sum_{j=0}^{F+A+2-n}A_{A-j}\widetilde{x}_{n-(A+1)+j}=\sum_{j=0}^{F+A+2-n}A_{n-(F+2)+j}\widetilde{x}_{F+1-j}.$$

Положим $n=F+A+2-k$. Тогда формула (3.1) перепишется так

$$\sum_{j=0}^{k}A_{A-k+j}\widetilde{x}_{F+1-j}+f_{F+A+1-k}=0,\quad 0\le k\le A.$$

Подставим в это выражение значение $\widetilde{x}_{F+1-j}$, определенное согласно (2.5),

$$\sum_{j=0}^{k}A_{A-k+j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^iC^i_{F+1-j+i}x_{F+1-j+i}+f_{F+A+1-k}=0,\quad 0\le k\le A. \tag{3.2}$$

Преобразуем первое слагаемое в полученном соотношении

$$\sum_{j=0}^{k}A_{A-k+j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^iC^i_{F+1-j+i}x_{F+1-j+i}=A_{A-k}C^0_{F+1}x_{F+1}+A_{A-k+1}(C^0_Fx_F-C^1_{F+1}x_{F+1})+$$
$$+A_{A-k+2}(C^0_{F-1}x_{F-1}-C^1_Fx_F+C^2_{F+1}x_{F+1})+\dots+A_A(C^0_{F+1-k}x_{F+1-k}+\dots+(-1)^kC^k_{F+1}x_{F+1})=$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{k-i}(-1)^jC^j_{F+1-i}A_{A-k+i+j}\right)x_{F+1-i}.$$

Обозначая здесь

$$G^{k,i}_s=\sum_{j=0}^{k-i}(-1)^jC^j_sA_{A-k+i+j},\quad G^{k,i}_s\in R^{l\times l}, \tag{3.3}$$

перепишем (3.2) в виде

$$\sum_{i=0}^{k} G_{F+1-i}^{k,i} x_{F+1-i} = -f_{F+A+1-k}, \quad 0 \le k \le A. \tag{3.4}$$

Пусть $\det A_A \ne 0$. Тогда в силу (3.3) матрицы $G_s^{i,i} = A_A$, $i = \overline{0, A}$, невырожденные. Полагая $k = 0, 1, 2, 3$, определим векторы x_{F+1-k}, выражая их через векторы $f_{F+A+1-k}$.
При $k = 0$ имеем[1]

$$x_{F+1} = -G_{F+1}^{-0,0} f_{F+A+1};$$

при $k = 1$

$$x_F = -G_F^{-1,1} f_{F+A} + G_F^{-1,1} G_{F+1}^{1,0} G_{F+1}^{-0,0} f_{F+A+1};$$

при $k = 2$

$$x_{F-1} = -G_{F-1}^{-2,2} f_{F+A-1} + G_{F-1}^{-2,2} G_F^{2,1} G_F^{-1,1} f_{F+A} - (G_{F-1}^{-2,2} G_F^{2,1} G_F^{-1,1} G_{F+1}^{1,0} G_{F+1}^{-0,0} - G_{F-1}^{-2,2} G_{F+1}^{2,0} G_{F+1}^{-0,0}) f_{F+A+1};$$

при $k = 3$

$$\begin{aligned} x_{F-2} = -G_{F-2}^{-3,3} f_{F+A-2} + G_{F-2}^{-3,3} G_{F-1}^{3,2} G_{F-1}^{-2,2} f_{F+A-1} - (G_{F-2}^{-3,3} G_{F-1}^{3,2} G_{F-1}^{-2,2} G_F^{2,1} G_F^{-1,1} - G_{F-2}^{-3,3} G_F^{3,1} G_F^{-1,1}) f_{F+A} + \\ + (G_{F-2}^{-3,3} G_{F-1}^{3,2} G_{F-1}^{-2,2} G_F^{2,1} G_F^{-1,1} G_{F+1}^{1,0} G_{F+1}^{-0,0} - G_{F-2}^{-3,3} G_{F-1}^{3,2} G_{F-1}^{-2,2} G_{F+1}^{2,0} G_{F+1}^{-0,0} - \\ - G_{F-2}^{-3,3} G_F^{3,1} G_F^{-1,1} G_{F+1}^{1,0} G_{F+1}^{-0,0} + G_{F-2}^{-3,3} G_{F+1}^{3,0} G_{F+1}^{-0,0}) f_{F+A+1}. \end{aligned}$$

Пусть $0 \le i \le k$. Составим группы последовательностей пар чисел следующим образом:

1 группа: $(k,k); (k,k-1); (k-1,k-1); (k-1,k-2); \ldots$
$(k-i+1,k-i); (k-i,k-i)$.
2 группа: $(k,k); (k,k-2); (k-2,k-2); (k-2,k-3); \ldots$
$(k-i+1,k-i); (k-i,k-i)$.
. . . .
i группа: $(k,k); (k,k-i); (k-i,k-i)$.

Число пар в каждой группе обозначим через σ_i, $i = \overline{1, s}$.

Введем пару чисел α_j^m, β_j^m, где верхний индекс обозначает принадлежность пары к m-группе, а j — порядковый номер пары в этой группе. Тогда для $k = \overline{0, 3}$ имеем

$$x_{F+1-k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} D_i^k f_{F+A+1-k+i}. \tag{3.5}$$

Здесь

$$D_0^k = G_{F+1-k}^{-k,k}; \quad D_i^k = \sum_s (-1)^{s+1} G_{F+1-k}^{-k,k} \prod_{j=2}^{\sigma_s} G_{F+1-k+(\beta_1^s - \beta_j^s)}^{\delta(\alpha,\beta) \alpha_j^s \beta_j^s}, \quad 1 \le i \le k. \tag{3.6}$$

В этом выражении знак $\sum\limits_s$ распространяется на выше описанные s групп пар чисел при данных k и i, а $\delta(\alpha,\beta) = \begin{cases} -1, & \text{если } \alpha_j^s = \beta_j^s, \\ 1, & \text{если } \alpha_j^s \ne \beta_j^s. \end{cases}$

Пусть формула (3.5) справедлива для некоторого $k < A$. Покажем, что она справедлива и для $k + 1$. Согласно (3.4) в этом случае имеем

$$x_{F-k} = -G_{F-k}^{-k+1,k+1} f_{F+A-k} - G_{F-k}^{-k+1,k+1} (G_{F+1}^{k+1,0} x_{F+1} + G_F^{k+1,1} x_F + \cdots + G_{F+1-k}^{k+1,k} x_{F+1-k}). \tag{3.7}$$

[1] Здесь и далее $G_s^{-i,j}$ представляет собой матрицу, обратную к матрице $G_s^{i,j}$.

Для суммы, ограниченной скобками, с учетом (3.5) получаем

$$G_{F+1}^{k+1,0}(-D_0^0)f_{F+A+1}+G_F^{k+1,1}(-D_0^1 f_{F+A}+D_1^1 f_{F+A+1})+\cdots$$
$$+G_{F+1-k}^{k+1,k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+1}D_i^k f_{F+A+1-k+i}=-\sum_{i=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{j+1}G_{F+1-k+i-j}^{k+1,k-i+j}D_j^{k-i+j}\right)f_{F+A+1-k+i}.$$

Подставляя полученное выражение в (3.7) и внося множитель $G_{F-k}^{-k+1,k+1}$ под знак суммы, приходим к следующей формуле:

$$x_{F-k}=-G_{F-k}^{-k+1,k+1}f_{F+A-k}+\sum_{i=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{j+1}G_{F-k}^{-k+1,k+1}G_{F+1-k+i-j}^{k+1,k-i+j}D_j^{k-i+j}\right)f_{F+A+1-k-i}. \quad (3.8)$$

В силу (3.6) $G_{F-k}^{-k+1,k+1}=D_0^{k+1}$. Рассмотрим теперь сумму в круглых скобках. При $i=0$ с учетом (3.6) получаем

$$G_{F-k}^{-k+1,k+1}G_{F+1-k}^{k+1,k}D_0^k=G_{F-k}^{-k+1,k+1}G_{F+1-k}^{k+1,k}G_{F+1-k}^{-k,k}=D_1^{k+1}.$$

Для $i=1$ имеем

$$G_{F-k}^{-k+1,k+1}G_{F+2-k}^{k+1,k-1}D_0^{k-1}-G_{F-k}^{-k+1,k+1}G_{F+1-k}^{k+1,k}D_1^k=$$
$$=G_{F-k}^{-k+1,k+1}G_{F+2-k}^{k+1,k-1}G_{F+2-k}^{-k-1,k-1}-G_{F-k}^{-k+1,k+1}G_{F+1-k}^{k+1,k}G_{F+1-k}^{-k,k}G_{F+2-k}^{k,k-1}G_{F+2-k}^{-k-1,k-1}=-D_2^{k+1}$$

....

При $i=k$

$$G_{F-k}^{-k+1,k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j G_{F+1-j}^{k+1,j}D_j^j=G_{F-k}^{-k+1,k+1}(G_{F+1}^{k+1,0}D_0^0-G_F^{k+1,1}D_1^1+\cdots+(-1)^k G_{F+1-k}^{k+1,k}D_k^k)=(-1)^k D_{k+1}^{k+1}.$$

Возвращаясь к формуле (3.8), перепишем ее в виде

$$x_{F-k}=\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{i+1}D_i^{k+1}f_{F+A-k+i}.$$

Этим показана справедливость формулы (3.5) для $k=\overline{0,A}$.

Исследуем теперь формулу (2.9). Перепишем соотношение, соответствующее нижней ее части

$$nx_n=\sum_{i=0}^{A}A_i\widetilde{x}_{n-i-1}+f_{n-1},\quad A+1\le n\le F+1.$$

Делая замену индекса суммирования $k=n-A-1$ и меняя последовательность порождаемых индексом формул, приходим к системе равенств

$$(F+1-k)x_{F+1-k}=\sum_{i=0}^{A}A_i\widetilde{x}_{F-k-i}+f_{F-k},\quad 0\le k\le F-A.$$

Подставляя сюда выражение для $\widetilde{x}_n$ в соответствии с (2.5), получаем

$$(F+1-k)x_{F+1-k}=\sum_{i=0}^{A}A_i\sum_{j=0}^{k+1+i}(-1)^j C_{F-k-i+j}^j x_{F-k-i+j}+f_{F-k},\quad 0\le k\le F-A.$$

Положим $k=0$. Тогда

$$(F+1)x_{F+1}=\sum_{i=0}^{A}A_i\sum_{j=0}^{i+1}(-1)^j C_{F-i+j}^j x_{F-i+j}+f_F=$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{A+1}(-1)^j C_{F+1}^j A_{j-1}\right)x_{F+1}+\sum_{i=1}^{A+1}\left(\sum_{j=1}^{A+1-i}(-1)^j C_{F+1-i}^j A_{j+i-1}\right)x_{F+1-i}+f_F,$$

или в другой форме

$$\Bigl(\sum_{j=1}^{A+1}(-1)^j C_{F+1}^j A_{j-1} - E(F+1)\Bigr)x_{F+1} + \sum_{i=1}^{A+1}\Bigl(\sum_{j=0}^{A+1-i}(-1)^j C_{F+1-i}^j A_{j+i-1}\Bigr)x_{F+1-i} = -f_F.$$

Здесь $E \in R^{l\times l}$ — единичная матрица. Таким же образом для $k = 1, 2, \ldots, s$, $1 \leq s \leq F - A$, получаем

$$\sum_{i=0}^{s-1}\Bigl(\sum_{j=0}^{A}(-1)^{s+1-i+j}C_{F+1-i}^{s+1-i+j}A_j\Bigr)x_{F+1-i} + \Bigl(\sum_{j=0}^{A}(-1)^{j+1}C_{F+1-s}^{j+1}A_j - E(F+1-s)\Bigr)x_{F+1-s} + \\ + \sum_{i=s+1}^{A+s+1}\Bigl(\sum_{j=0}^{A+s+1-i}(-1)^j C_{F+1-i}^j A_{j+i-(s+1)}\Bigr)x_{F+1-i} = -f_{F-s}. \quad (3.9)$$

Обозначая при $s = 0$

$$G_{F+1-i}^{A+1,i} = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{A}(-1)^{j+1}C_{F+1}^{j+1}A_j - E(F+1), & i = 0; \\ \sum\limits_{j=0}^{A+1-i}(-1)^j C_{F+1-i}^j A_{j+i-1}, & 1 \leq i \leq A+1, \end{cases} \quad (3.10)$$

и при $1 \leq s \leq F - A$

$$G_{F+1-i}^{A+1+s,i} = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{A}(-1)^{s+1-i+j}C_{F+1-i}^{s+1-i+j}A_j, & 0 \leq i \leq s-1; \\ \sum\limits_{j=0}^{A}(-1)^{j+1}C_{F+1-s}^{j+1}A_j - E(F+1-s), & i = s; \\ \sum\limits_{j=0}^{A+s+1-i}(-1)^j C_{F+1-i}^j A_{j+i-(s+1)}, & s+1 \leq i \leq A+s+1, \end{cases} \quad (3.11)$$

перепишем соотношение (3.9) следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{A+1+s} G_{F+1-i}^{A+1+s,i}x_{F+1-i} = -f_{F-s}, \quad 0 \leq s \leq F - A,$$

или, меняя индекс $s = k - (A+1)$,

$$\sum_{i=0}^{k} G_{F+1-i}^{k,i}x_{F+1-i} = -f_{F+A+1-k}, \quad A+1 \leq k \leq F+1.$$

Сопоставляя эту формулу с (3.4), видим, что они могут быть объединены в виде одного выражения

$$\sum_{i=0}^{k} G_{F+1-i}^{k,i}x_{F+1-i} = -f_{F+A+1-k}, \quad 0 \leq k \leq F+1,$$

где матрицы $G_{F+1-i}^{k,i}$ определяются согласно (3.3) для $0 \leq k \leq A$, (3.10) и (3.11) для $A+1 \leq k \leq F+1$.

С другой стороны, при приведении формулы (3.4) к виду (3.5) была показана справедливость (3.6) для $0 \leq k \leq A$. При этом значение числа A не влияло на процесс и конечный результат преобразований. Следовательно, тем же путем устанавливается справедливость этой формулы и для $A+1 \leq k \leq F+1$, т. е.

$$x_{F+1-k} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+1}D_i^k f_{F+A+1-k+i}, \quad 0 \leq k \leq F+1.$$

В этом выражении значения D_i^k находятся по (3.6). Тогда перепишем это соотношение так

$$x_k = \sum_{i=0}^{F+1-k} (-1)^{i+1} D_i^{F+1-k} f_{A+k+i}, \quad 0 \le k \le F+1. \tag{3.12}$$

Вернемся к формуле (2.9) и рассмотрим ее при $1 \le n \le A$

$$n x_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_{n-1-i} \widetilde{x}_i + f_{n-1}.$$

Подставляя сюда $\widetilde{x}_i$ в виде (2.5), получаем

$$n x_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_{n-1-i} \sum_{j=0}^{F+1-i} (-1)^j C_{i+j}^j x_{i+j} + f_{n-1}. \tag{3.13}$$

При $1 \le n \le A$ рассмотрим выражение, стоящее под знаком суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{n-1-i} \sum_{j=0}^{F+1-i} (-1)^j C_{i+j}^j x_{i+j} = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{F+1} \sum\limits_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j A_{n-1-i+j}, & 0 \le i \le n-1; \\ \sum\limits_{i=0}^{F+1} \sum\limits_{j=i-(n-1)}^{i} (-1)^j C_i^j A_{n-1-i+j}, & i \ge n. \end{cases}$$

Учитывая это соотношение, перепишем (3.13) в виде

$$\sum_{i=0}^{F+1} S_i^{n-1} x_i = -f_{n-1}, \quad 1 \le n \le A, \tag{3.14}$$

где

$$S_i^{n-1} = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j A_{n-1-i+j}, & 0 \le i \le n-1; \\ \sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j A_{j-1} - En, & i = n; \\ \sum\limits_{j=i-(n-1)}^{i} (-1)^j C_i^j A_{n-1-i+j}, & i \ge n+1. \end{cases}$$

Подставляя согласно (3.12) значение x_k в (3.14), приведем последнюю формулу к виду

$$\sum_{i=1}^{F+1} S_i^{n-1} \sum_{j=0}^{F+1-i} (-1)^{j+1} D_j^{F+1-i} f_{A+i+j} = -f_{n-1} - S_0^{n-1} x_0, \quad 1 \le n \le A. \tag{3.15}$$

Преобразуем левую часть этого равенства

$$\sum_{i=1}^{F+1} S_i^{n-1} \sum_{j=0}^{F+1-i} (-1)^{j+1} D_j^{F+1-i} f_{A+i+j} = \sum_{i=1}^{F+1} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i+j} D_{i-j}^{F+1-i} S_j^{n-1} f_{A+i}.$$

Полагая здесь

$$P_{n,F+2-i} = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i+j} D_{i-j}^{F+1-i} S_j^{n-1}; \quad 1 \le n \le A, \ \ 1 \le i \le F+1, \tag{3.16}$$

перепишем (3.15) так

$$\sum_{i=1}^{F-A} P_{n,F+2-i} f_{A+i} + \sum_{i=F-A+1}^{F+1} P_{n,F+2-i} f_{A+i} = -f_{n-1} - S_0^{n-1} x_0, \quad 1 \le n \le A.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{A+1} P_{n,i} f_{F+A+2-i} = -f_{n-1} - S_0^{n-1} x_0 - \sum_{i=1}^{F-A} P_{n,F+2-i} f_{A+i}, \quad 1 \le n \le A. \tag{3.17}$$

Далее, из (3.12) при $k = 0$ имеем

$$x_0 = \sum_{i=0}^{F-A} (-1)^{i+1} D_i^{F+1} f_{A+i} + \sum_{i=F-A+1}^{F+1} (-1)^{i+1} D_i^{F+1} f_{A+i}. \tag{3.18}$$

Поскольку

$$\sum_{i=F-A+1}^{F+1} (-1)^{i+1} D_i^{F+1} f_{A+i} = \sum_{i=1}^{A+1} (-1)^{A-i} D_{F+2-i}^{F+1} f_{F+A+2-i},$$

перепишем (3.18)

$$\sum_{i=1}^{A+1} (-1)^{A-i} D_{F+2-i}^{F+1} f_{F+A+2-i} = x_0 - \sum_{i=0}^{F-A} (-1)^{i+1} D_i^{F+1} f_{A+i}. \tag{3.19}$$

Обозначая

$$P_{A+1,i} = (-1)^{A-i} D_{F+2-i}^{F+1} \tag{3.20}$$

и объединяя формулы (3.17) и (3.19), получаем

$$\sum_{i=1}^{A+1} P_{n,i} f_{F+A+2-i} = h_{A+2-n}, \quad 1 \le n \le A+1, \tag{3.21}$$

где

$$h_{A+2-n} = \begin{cases} -f_{n-1} - S_0^{n-1} x_0 - \sum\limits_{i=1}^{F-A} P_{n,F+2-i} f_{A+i}, & 1 \le n \le A; \\ x_0 - \sum\limits_{i=0}^{F-A} (-1)^{i+1} D_i^{F+1} f_{A+i}, & n = A+1. \end{cases}$$

Данное соотношение представляет собой линейную систему алгебраических матричных уравнений относительно неизвестных векторов f_{F+i}, $i = \overline{1, A+1}$, которую запишем в виде

$$\Omega \widehat{f} = \widehat{h}, \quad \Omega \in R^{(A+1)l \times (A+1)l}. \tag{3.22}$$

Здесь

$$\Omega = \begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,A+1} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,A+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{A+1,1} & P_{A+1,2} & \dots & P_{A+1,A+1} \end{vmatrix};$$

$$\widehat{f} = |f_{F+A+1}, f_{F+A}, \dots, f_{F+1}|^T, \quad \widehat{h} = |h_{A+1}, h_A, \dots, h_1|^T.$$

Теорема 3.1. *Пусть в задаче* (2.8) *полиномиальная матрица* $A(t)$, *заданная в виде* (2.2), *и матрица* Ω *линейной системы* (3.22), *определенная в силу задачи* (2.8), *таковы, что* $\det A_A \neq 0$ *и* $\det \Omega \neq 0$.

Тогда для любого $x_0 \in R^l$ *задача* (2.8) *имеет единственное решение в виде полинома степени* $F+1$.

Доказательство. Из (3.3), (3.10) и (3.11) вытекает, что матрицы $G_s^{k,k} = A_A$, $s,k = \overline{0,F+1}$. Если $\det A_A \neq 0$, то матрицы D_i^k, $i,k = \overline{0,F+1}$, (3.12) также невырожденные. Поэтому согласно (3.16) и (3.20) невырожденными являются и матрицы $P_{i,j}$, $i,j = \overline{1,A+1}$. Далее, поскольку определитель матрицы Ω отличен от нуля, линейная система однозначно разрешима относительно векторов f_{F+i}, $i = \overline{1,A+1}$. Следовательно, по формуле (3.12) при $k = 1,2,\ldots,F+1$ однозначно вычисляются векторы x_k полиномиального приближения (2.11), что и доказывает теорему.

Подставляя полученное полиномиальное квазирешение в виде (2.11) в исходную задачу (2.1), приходим к равенству $\dot{x}(t) = A(t)x(t-1) + \overline{f}(t) + \triangle(t)$, $t \in J$, где в соответствии со способом нахождения $x(t)$ невязка определяется равенством $\triangle(t) = \sum\limits_{i=1}^{A+1} f_{F+i}t^{F+i}$.

Введем норму вектора $g(t) = |g^1(t), g^2(t), \ldots, g^n(t)|^T$ следующим образом:

$$\|g(t)\|_{J_*} = \max_i \max_t |g_i(t)|, \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in J_* = [-t_*, t_*].$$

Тогда справедливо

Следствие 3.1. Пусть $x(t)$ — полиномиальное квазирешение задачи (2.1). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое $t_* > 0$, при котором для всех $|t| \leq t_*$ будет выполняться соотношение

$$\|\triangle(t)\|_{J_*} = t^F \left\| \sum_{i=1}^{A+1} f_{F+i}t^i \right\|_{J_*} \leq \varepsilon.$$

Замечание 3.1. Как отмечалось выше, для задачи (2.1) могут быть получены разные согласованные по размерности полиномов задачи типа (2.8), каждая из которых отличается степенью полинома $f(t)$. Это позволяет находить для задачи (2.1) полиномиальные квазирешения различных степеней.

3.1. Примеры

Пример 3.1. Скалярное дифференциально-разностное уравнение с заданным начальным условием

$$d\overline{x}(t)/dt = \overline{x}(t-1), \quad \overline{x}(0) = x_0. \tag{3.23}$$

В силу определения 2.1 задача

$$\dot{x}(t) = x(t-1) + f_N t^N, \quad x(0) = \overline{x}_0 = x_0,$$

где

$$x(t) = x^N(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n; \quad \Delta^N(t) = f_n t^N,$$

будет согласованной по размерности полиномов относительно задачи (3.23). При $x_0 = 1$ получаем

$$x^4(t) = 1 + 0.56705t + 0.16092t^2 + 0.03065t^3 + 0.00383t^4,$$
$$\Delta^4(t) = -0.00383t^4,$$
$$x^6(t) = 1 + 0.56714t + 0.16083t^2 + 0.03040t^3 + 0.00431t^4 + 0.00049t^5 + 0.00004t^6,$$
$$\Delta^6(t) = -0.00004t^6.$$

Отметим, что приближенное частное решение задачи (3.23), соответствующее приближенному вещественному корню характеристического квазиполинома $k_1 \approx 0.56714$, при $x_0 = 1$ имеет вид

$$x_1(t) = e^{0.56714t} =$$

$$= 1 + 0.56714t + 0.16082t^2 + 0.03040t^3 + 0.00431t^4 + 0.00049t^5 + 0.00005t^6 + \sum_{n=7}^{\infty} \frac{(0.56714)^n}{n!} t^n.$$

Сравнивая $x_1(t)$ с $x^4(t)$ и $x^6(t)$, приходим к выводу, что в данном случае полиномиальные квазирешения являются приближениями к частному аналитическому решению задачи (3.23).

Пример 3.2. Скалярная задача Коши для дифференциально-разностного уравнения

$$d\overline{x}(t)/dt = (1 + t + t^2)\overline{x}(t-1) + t^2, \;\; \overline{x}(0) = x_0 = 1.$$

Согласованной по размерности полиномов будет задача

$$\dot{x}(t) = (1 + t + t^2)x(t-1) + t^2 + f_3t^3 + f_4t^4 + f_5t^5, \;\; x(0) = x_0 = 1,$$

где

$$x(t) = \sum_{n=0}^{3} x_n t^n; \;\; \Delta(t) = f_3t^3 + f_4t^4 + f_5t^5.$$

В соответствии с (3.21) линейная система (3.22) для определения неизвестных коэффициентов f_3, f_4, f_5 имеет вид

$$\begin{cases} -4f_5 &= x_0 + 1 \\ -3f_4 - 4f_5 &= x_0 \\ -2f_3 - f_4 - f_5 &= x_0. \end{cases}$$

При $x_0 = 1$ получаем $f_3 = -0.416$, $f_4 = 0.333$, $f_5 = 0.5$. Тогда

$$x(t) = 1 + 0.583t + 0.666t^2 + 0.5t^3, \;\; \Delta(t) = -0.416t^3 + 0.333t^4 - 0.5t^5$$

.

Литература

1. Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1951. – 352 с.
2. Пинни Э. *Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Ин. лит., 1961. – 248 с.
3. Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.
4. Хейл Д. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.

Иркутский вычислительный
центр СО РАН

Поступили
первый вариант 19.06.1997
окончательный вариант 07.05.1999