И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 8 (459)

УДК 517.97 : 517.95

М.И. СУМИН

СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЛУЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ, II: ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ, ТИПИЧНОСТЬ РЕГУЛЯРНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

1. Введение

Во второй части работы непосредственно продолжается исследование задачи субоптимального управления полулинейным эллиптическим уравнением с фазовым ограничением, начатое в первой части работы [1]. Как и в [1], фазовое ограничение задачи аддитивно зависит от функционального параметра $q \in C(X)$, где $X \subset \Omega$ — компакт, на котором должно выполняться фазовое ограничение, Ω — область задания эллиптической краевой задачи. Здесь, в отличие от первой части работы, основное внимание уделяется вопросам, связанным со свойствами регулярности и нормальности рассматриваемой задачи. При этом обобщающие классические (напр., [2]) соответствующие понятия [3]–[6] были определены в первой части работы. Во второй части показывается, в частности, что следствием нормальности задачи при некотором фиксированном значении параметра $q \in C(X)$ является липшицевость ее функции значений в окрестности точки q. При этом, как показано в первой части работы, достаточным условием нормальности задачи является в совокупности с некоторыми стандартными предположениями о выпуклости функций, задающих исходные данные задачи, условие Слейтера. Мы показываем, кроме того, что регулярность задачи с фазовым ограничением есть типичное свойство подобного рода задач, т. к. оно имеет место для значений функционального параметра из некоторого, по крайней мере, всюду плотного множества, принадлежащего множеству всех тех значений параметра, для которых задача "имеет смысл" (функция значений конечна). Обсуждается также возможность усиления последнего результата.

2. Постановка задачи

Пусть $U \subset R^m$ — компакт, $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_\infty(\Omega) : u(x) \in U$ п. в. на $\Omega\}$. Рассмотрим семейство зависящих от функционального параметра q оптимизационных задач

$$I_0(u) \to \inf, \quad I_1(u) \in \mathcal{M} + q, \quad u \in \mathcal{D}, \quad q \in C(X) \equiv \mathcal{B} \ \text{— параметр,} \qquad (P_q)$$

где

$$I_0(u) \equiv \int_\Omega F(x, z[u](x), u(x))\, dx, \quad I_1(u) \equiv G(\cdot, z[u](\cdot)),$$

$\mathcal{M} \subset C(X)$ — выпуклое замкнутое множество всех непрерывных неположительных функций на X, $X \subset \overline{\Omega}$ — компакт, $z[u] \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ — соответствующее управлению $u \in \mathcal{D}$ слабое решение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95-01-00701, 98-01-00793).

в смысле [7] задачи Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения с дивергентной главной частью

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x) z_{x_j} + a(x,z,u(x)) = 0, \quad z(x) = 0, \ \ x \in S.$$

Считаем, что выполняются следующие условия на исходные данные задачи (P_q):

а) функции G, $\partial G/\partial z : \overline{\Omega}\times R^1 \to R^1$ непрерывны по (x,z), функции F, $\partial F/\partial z : \Omega\times R^1\times R^m \to R^1$, a, $\partial a/\partial z : \Omega \times R^1 \times R^m \to R^1$ измеримы в смысле Лебега по (x,z,u) и непрерывны по (z,u) при п. в. x, функции $a_{i,j} : \overline{\Omega} \to R^1$, $i,j = 1,\dots,n$, липшицевы;

б) справедливы оценки

$$\nu|\xi|^2 \le a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2, \quad \nu,\mu > 0, \ \ a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x),$$
$$|a(x,0,u)| + |\partial a(x,z,u)/\partial z| \le a_z(x) + N(M) \ \ \forall x \in \Omega, \ \ z \in S^1_M, \ \ u \in U,$$
$$\partial a(x,z,u)/\partial z \le 0 \ \ \forall\,(x,z,u) \in \Omega \times R^1 \times U,$$

где $a_z \in L_{q/2}(\Omega)$, $q > n$ ([7], с. 181), $S^n_M \equiv \{x \in R^n : |x| < M\}$;

в) справедливы оценки

$$|F(x,0,u)| + |\partial F(x,z,u)/\partial z| \le f_z(x) + N(M) \ \ \forall x \in \Omega, \ \ z \in S^1_M, \ \ u \in U,$$
$$|G(x,z)|,\ |\partial G(x,z)/\partial z| \le N(M) \ \ \forall\,(x,z) \in \Omega \times S^1_M,$$

где $f_z \in L_{q/2}(\Omega)$, $q > n$, $N(M) > 0$ — неубывающая функция переменного $M > 0$;

г) граница $S \equiv \partial\Omega$ является липшицевой.

Введем на множестве $\mathcal{D}$ метрику Экланда $d(u^1,u^2) \equiv \operatorname{meas}\{x \in \Omega : u^1(x) \ne u^2(x)\}$, превратив его тем самым в полное метрическое пространство. Согласно [2] минимизирующим приближенным решением (м. п. р.) в задаче (P_q) называется последовательность управлений $u^i \in \mathcal{D}$, $i = 1,2,\dots$, такая, что

$$I_0(u^i) \le \beta(q) + \gamma^i, \ \ u^i \in \mathcal{D}^{\varepsilon^i}_q, \ \ \gamma^i,\varepsilon^i \ge 0, \ \ \gamma^i,\varepsilon^i \to 0, \ \ i \to \infty,$$

где

$$\mathcal{D}^\varepsilon_q \equiv \{u \in \mathcal{D} : \rho(I_1(u),\mathcal{M}+q) \le \varepsilon\}, \ \ \rho(I,\mathcal{M}+q) \equiv \inf_{x\in\mathcal{M}} |x+q-I|^{(0)}_X,$$
$$\beta(q) \equiv \beta_{+0}(q) \equiv \lim_{\varepsilon\to+0}\beta_\varepsilon(q) \le \beta_0(q), \ \ \beta_\varepsilon(q) \equiv \inf_{u\in\mathcal{D}^\varepsilon_q} I_0(u), \ \ \beta_\varepsilon(q) \equiv +\infty, \ \ \text{если} \ \ \mathcal{D}^\varepsilon_q = \emptyset,$$

$|q|^{(0)}_X \equiv \|q\|_{C(X)}$.

3. Аппроксимация исходной задачи с фазовым ограничением задачами с функциональными ограничениями

Пусть $\hat{X}$ — счетная всюду плотная сеть компакта X, $\hat{X}_k \equiv \{x^{k,1},\dots,x^{k,l_k}\} \subset \hat{X}$ — конечная $1/k$ сеть компакта X, $\hat{X}_k \subset \hat{X}_{k+1}$, $k = 1,2,\dots$ Рассмотрим последовательность семейств оптимизационных задач, зависящих от конечномерного векторного параметра $q^k \equiv (q^k_1,\dots,q^k_{l_k}) \in R^{l_k}$, аппроксимирующих исходное семейство (P_q)

$$I_0(u) \to \inf, \ \ I^k(u) \in \mathcal{M}^k + q^k, \ \ u \in \mathcal{D}, \ \ q^k \in R^{l_k} \ \text{— параметр}, \qquad (P^k_{q^k})$$

где

$$\mathcal{M}^k \equiv \{y^k \in R^{l_k} : y^k_1 \le 0,\dots,y^k_{l_k} \le 0\},$$
$$I^k(u) \equiv (I^k_1(u),\dots,I^k_{l_k}(u)), \quad I^k_i(u) \equiv G(x^{k,i}, z[u](x^{k,i})).$$

Как и в случае задачи (P_q), согласно [2] м. п. р. в задаче $(P^k_{q^k})$ называется последовательность управлений $u^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, такая, что для функции значений $\beta_k : R^{l_k} \to R^1 \cup \{+\infty\}$ выполняются соотношения

$$I_0(u^i) \le \beta_k(q) + \gamma^i, \quad u^i \in \mathcal{D}^{\varepsilon^i}_{q^k}, \quad \gamma^i, \varepsilon^i \ge 0, \quad \gamma^i, \varepsilon^i \to 0, \quad i \to \infty, \tag{3.1}$$

где

$$\mathcal{D}^{k,\varepsilon}_{q^k} \equiv \{u \in \mathcal{D} : I^k_j(u) - q^k_j \le \varepsilon, \ j = 1, \ldots, l_k\},$$
$$\beta_k(q^k) \equiv \beta_{k,+0}(q^k) \equiv \lim_{\varepsilon \to +0} \beta_{k,\varepsilon}(q^k) \le \beta_{k,0}(q^k),$$
$$\beta_{k,\varepsilon}(q^k) \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^{k,\varepsilon}_{q^k}} I_0(u), \quad \beta_{k,\varepsilon}(q^k) \equiv +\infty, \quad \text{если} \ \ \mathcal{D}^{k,\varepsilon}_{q^k} = \emptyset.$$

Лемма 3.1. *Пусть $\beta(q) < \infty$, $q \in C(X)$. Тогда существует последовательность векторов $q^k \in R^{l_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $\beta_k(q^k) \to \beta(q)$, $k \to \infty$. В качестве такой последовательности может быть взята последовательность $\overline{q}^k \equiv (\overline{q}^k_1, \ldots, \overline{q}^k_{l_k})$, $\overline{q}^k_i = q(x^k_i)$, $i = 1, \ldots, l_k$.*

Доказательство. Пусть u^s, $s = 1, 2, \ldots$, — такая последовательность управлений, что $u^s \in \mathcal{D}^{\varepsilon^s}_q$ и $I_0(u^s) \to \beta(q)$, $\varepsilon^s \ge 0$, $\varepsilon^s \to 0$, $s \to \infty$. Так как в силу леммы 3.1 из [1] и условия в), наложенного на функцию G, функции семейства $I_1(u^s)$, $s = 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $\overline{\Omega}$, то будем считать

$$|I_1(u^s) - \hat{q}|^{(0)}_{\overline{\Omega}} \to 0, \quad s \to \infty, \quad \hat{q} \in C(\overline{\Omega}), \quad \hat{q}(x) \le q(x), \quad x \in X,$$
$$\max\{0, I^j_1(u^s) - \overline{q}^j_1, \ldots, I^j_{l_j}(u^s) - \overline{q}^j_{l_j}\} \to 0, \quad s \to \infty, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Так как к тому же $\hat{X}_k \subset \hat{X}_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, то на основании последнего предельного соотношения и определения функции β_j выберем такую подпоследовательность s_k, $k = 1, 2, \ldots$, последовательности $s = 1, 2, \ldots$, что $I_0(u^{s_k}) \ge \beta_k(\overline{q}^k) - \delta^k$, $\delta^k \ge 0$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$, и, значит, можно утверждать, что $\limsup\limits_{k\to\infty} \beta_k(\overline{q}^k) \le \beta(q)$. Покажем, что одновременно выполняется и неравенство $\liminf\limits_{k\to\infty} \beta_k(\overline{q}^k) \ge \beta(q)$, что, очевидно, и будет означать окончание доказательства леммы. Предположим, что это неравенство не выполняется и без ограничения общности $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k(\overline{q}^k) = \alpha < \beta(q)$. Это строгое неравенство означает, что найдется такая последовательность управлений u^s, $s = 1, 2, \ldots$, что $\max\{0, I^s_1(u^s) - \overline{q}^s_1, \ldots, I^s_{l_s}(u^s) - \overline{q}^s_{l_s}\} \to 0$, $I_0(u^s) \to \alpha$, $s \to \infty$. Первое из последних двух предельных соотношений в силу равностепенной непрерывности на $\overline{\Omega}$ семейства функций $I_1(u^s)$, $s = 1, 2, \ldots$, приводит к последовательности включений $u^s \in \mathcal{D}^{\varepsilon^s}_q$ для некоторой последовательности чисел $\varepsilon^s \ge 0$, $\varepsilon^s \to 0$, $s \to \infty$, которые в совокупности со вторым из отмеченных предельных соотношений противоречат тому, что $\beta(q)$ есть значение задачи (P_q). $\square$

Определение 3.1 (напр., [8]–[10]). Вектор $n \in R^m$ называется проксимальной нормалью или проксимальным нормальным вектором к множеству $C \subset R^m$ в точке $x \in \overline{C}$, если существуют вектор $u \notin \overline{C}$ и число $\lambda > 0$ такие, что $n = \lambda(u - x)$, $|u - x| = \rho(u, C)$, $\rho(u, C) \equiv \inf\limits_{c \in C} |u - c|$. При этом вектор $u - x$ согласно [10] называется перпендикуляром к C в x. Множество всех проксимальных нормалей к C в точке $x \in \overline{C}$ обозначается через $PN_C(x)$ ([8], [9]).

Пусть $q^{k,i} \in R^{l_k}$, $\zeta^i \in R^{l_k}$, $\eta^i \in R^1$, $i = 1, 2, \ldots$, — такие последовательности, что

$$q^{k,i} \to q^k, \quad |\beta_k(q^k)| < +\infty, \quad \beta_k(q^{k,i}) \to \beta_k(q^k), \quad \eta^i \ge 0, \quad i \to \infty, \tag{3.2}$$
$$(\zeta^i, -\eta^i) \in PN_{\operatorname{epi} \beta_k}(q^{k,i}, \beta_k(q^{k,i})).$$

Существование таких последовательностей вытекает из проксимальной нормальной формулы для конуса нормалей Кларка ([8], теорема 3.1; [9]; [10], предложение 2.5.7).

Рассуждая, как и при доказательстве леммы 8 из [5] (см. также [4], лемма 4.3), из (3.2) можем вывести, что, если $u^{i,s}$, $s = 1, 2, \dots,$ — произвольное м. п. р. в задаче $(P^k_{q^{i,k}})$ в смысле (3.1) $(\gamma^s = \gamma^{i,s},\ \varepsilon^s = \varepsilon^{i,s})$, то последовательность $(u^{i,s}, q^{k,i})$, $s = 1, 2, \dots,$ является м.п.р. в том же смысле в задаче

$$I^i(u, q') \equiv \lambda^i \eta^i I_0(u) - \langle \lambda^i \zeta^i, q' \rangle + \frac{1}{2} \|(q', I_0(u)) - (q^{k,i}, \beta_k(q^{k,i}))\|^2 \to \inf, \tag{3.3}$$
$$I^k(u) \in \mathcal{M}^k + q', \quad q' \in \overline{S_P}, \quad u \in \mathcal{D},$$

где S_P — шар достаточно большого радиуса $P > 0$ с центром в нуле пространства R^{l_k} такой, что $q^k \in S_P$, $\lambda^i > 0$, $i = 1, 2, \dots,$ — некоторая последовательность чисел. При этом, как было доказано,

$$\lambda^i \eta^i I_0(u^{i,s}) - \langle \lambda^i \zeta^i, q^{k,i} \rangle + \frac{1}{2} \|(q^{k,i}, I_0(u^{i,s})) - (q^{k,i}, \beta_k(q^{k,i}))\|^2 \leq$$
$$\leq \lambda^i \eta^i \beta_k(q^{k,i}) - \langle \lambda^i \zeta^i, q^{k,i} \rangle + \lambda^i \eta^i \gamma^{i,s} + \frac{1}{2} (\gamma^{i,s})^2, \tag{3.4}$$
$$I^k_j(u^{i,s}) - q^{k,i}_j \leq \varepsilon^{i,s}, \quad j = 1, \dots, l_k, \quad \gamma^{i,s}, \varepsilon^{i,s} \to 0, \quad s \to \infty,$$

а нижняя грань $\overset{\wedge}{\beta}{}^i_k$ в задаче (3.3) равна $\overset{\wedge}{\beta}{}^i_k = \lambda^i \eta^i \beta_k(q^{k,i}) - \langle \lambda^i \zeta^i, q^{k,i} \rangle$. Здесь

$$\overset{\wedge}{\beta}{}^i_k \equiv \lim_{t \to 0} \overset{\wedge}{\beta}{}^{i,t}_k, \quad \overset{\wedge}{\beta}{}^{i,t}_k \equiv \inf_{\overset{\wedge}{\mathcal{D}}{}^t} I^i(u, q'),$$

$$\overset{\wedge}{\mathcal{D}}{}^t \equiv \{(u, q') \in \overset{\wedge}{\mathcal{D}} : I^k_j(u) - q'_j \leq t,\ j = 1, \dots, l_k\}, \quad \overset{\wedge}{\mathcal{D}} \equiv \mathcal{D} \times \overline{S_P},$$

а в качестве метрики $\hat{d}$ на $\overset{\wedge}{\mathcal{D}}$ берется метрика $\hat{d}((u^1, q^1), (u^2, q^2)) \equiv d(u^1, u^2) + |q^1 - q^2|$. Будем без ограничения общности считать, что $\varepsilon^{i,s} > 0\ \forall i, s = 1, 2, \dots$ Из (3.4) следует, что

$$I^i(u^{i,s}, q^{k,i}) \leq \overset{\wedge}{\beta}{}^{i,\varepsilon^{i,s}}_k + r^{i,s}, \quad (u^{i,s}, q^{k,i}) \in \overset{\wedge}{\mathcal{D}}{}^{\varepsilon^{i,s}}, \quad r^{i,s} \equiv \overset{\wedge}{\beta}{}^i_k - \overset{\wedge}{\beta}{}^{i,\varepsilon^{i,s}}_k + \lambda^i \eta^i \delta^{i,s} + \frac{1}{2} (\delta^{i,s})^2,$$

откуда в силу полноты метрического пространства $\overset{\wedge}{\mathcal{D}}{}^{\varepsilon^{i,s}}$, непрерывности на нем функционала I^i (см. лемму 3.2 в [1]) и вариационного принципа Экланда [11] следует существование пары $(u^{i,s,1}, q^{k,i,s}) \in \overset{\wedge}{\mathcal{D}}{}^{\varepsilon^{i,s}}$, дающей решение в задаче

$$I^i(u, q') + \sqrt{r^{i,s}}\, \hat{d}((u, q'), (u^{i,s,1}, q^{k,i,s})) \to \inf, \quad (u, q') \in \overset{\wedge}{\mathcal{D}}{}^{\varepsilon^{i,s}}, \tag{3.5}$$

и удовлетворяющей неравенствам

$$\hat{d}((u^{i,s}, q^{k,i}), (u^{i,s,1}, q^{k,i,s})) \leq \sqrt{r^{i,s}}, \quad I^i(u^{i,s,1}, q^{k,i,s}) \leq I^i(u^{i,s}, q^{k,i}). \tag{3.6}$$

При этом в силу первой оценки (3.6) и оценок лемм 3.1, 3.3 из [1] можно утверждать $I_0(u^{i,s,1}) - \beta_k(q^{k,i}) \to 0$, $s \to \infty$, т. е. последовательность $u^{i,s,1}$, $s = 1, 2, \dots,$ также является м. п. р. в задаче $(P^k_{q^k})$ при $q^k = q^{k,i}$. Из (3.5) можно заключить, что

$$J_\xi(u^{i,s,1}, q^{k,i,s}) \leq \inf_{\overset{\wedge}{\mathcal{D}}} J_\xi(u, q') + \gamma, \quad \gamma > 0, \quad \overset{\wedge}{\mathcal{D}} \equiv \mathcal{D} \times \overline{S_P}, \tag{3.7}$$

где $J_\xi(u, q') \equiv \max\{I^i(u, q') - I^i(u^{i,s,1}, q^{k,i,s}) + \gamma + \sqrt{r^{i,s}}\, \hat{d}((u, q'), (u^{i,s,1}, q^{k,i,s})),\ I^k_j(u) - q'_j - \varepsilon^{i,s},\ j = 1, \dots, l_k\}$. В силу (3.7) применим вариационный принцип Экланда еще раз — теперь уже к функционалу J_ξ, который является, очевидно, также непрерывным функционалом на полном метрическом пространстве $\overset{\wedge}{\mathcal{D}}$. В результате получаем пару $(u^{i,s,1,\gamma}, q^{k,i,s,\gamma}) \in \overset{\wedge}{\mathcal{D}}$, являющуюся решением в задаче

$$J_\xi(u,q') + \sqrt{\gamma}\, d((u,q'),(u^{i,s,1,\gamma}, q^{k,i,s,\gamma})) \to \inf, \quad (u,q') \in \overset{\wedge}{\mathcal{D}},$$

и удовлетворяющую неравенствам

$$\hat{d}((u^{i,s,1}, q^{k,i,s}),(u^{i,s,1,\gamma}, q^{k,i,s,\gamma})) \le \sqrt{\gamma}, \quad I^i(u^{i,s,1,\gamma}, q^{k,i,s,\gamma}) \le I^i(u^{i,s,1}, q^{k,i,s}). \tag{3.8}$$

"Сгладим" далее функционал J_ξ, введя функционал J_ξ^h, $h \in [0,h_0]$, $h_0 > 0$, по формуле

$$J_\xi^h(u,q') \equiv \max\{I^i(u,q') - I^i(u^{i,s,1}, q^{k,i,s}) + \gamma + \sqrt{r^{i,s}}\,\hat{d}((u,q'),(u^{i,s,1}, q^{k,i,s})) +$$
$$+ \sqrt{\gamma}\,\hat{d}((u,q'),(u^{i,s,1,\gamma}, q^{k,i,s,\gamma})), I_j^{k,h}(u) - q_j' - \varepsilon^{i,s} + \sqrt{\gamma}\,\hat{d}((u,q'),(u^{i,s,1,\gamma}, q^{k,i,s,\gamma})),\ j = 1,\dots,l_k\},$$

где $I^{k,h}(u) \equiv (I_1^{k,h}(u),\dots,I_{l_k}^{k,h}(u))$,

$$I_j^{k,h}(u) \equiv 1/\operatorname{meas}(S_h(x^{k,j}) \cap \Omega) \int_{S_h(x^{k,j})\cap\Omega} G(x, z[u](x))\, dx,$$

$S_h(x^{k,j})$ — шар радиуса h с центром в $x^{k,j}$.

Благодаря равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности (см. оценку леммы 3.1 в [1]) множества решений $\{z[u] : u \in \mathcal{D}\}$, можно утверждать, что

$$\inf_{\overset{\wedge}{\mathcal{D}}} J_\xi^h(u,q') \to J_\xi(u^{i,s,1,\gamma}, q^{k,i,s,\gamma}) \equiv J_\xi^0(u^{i,s,1,\gamma}, q^{k,i,s,\gamma}) > 0, \quad h \to 0. \tag{3.9}$$

Из предельного соотношения (3.9) следует существование такой функции $\varepsilon(h) > 0$, $0 < h < h_0$, h_0 — некоторое достаточно малое число, $\varepsilon(h) \to 0$, $h \to \infty$, что

$$J_\xi^h(u^{i,s,1,\gamma}, q^{k,i,s,\gamma}) \le \inf_{\overset{\wedge}{\mathcal{D}}} J_\xi^h(u,q') + \varepsilon(h), \quad 0 < h < h_0.$$

Для получения необходимых условий субоптимальности ($\varepsilon(h)$-оптимальности) пары $(u^{i,s,1,\gamma}$, $q^{k,i,s,\gamma})$ в задаче $J_\xi^h(u,q') \to \inf$, $(u,q') \in \overset{\wedge}{\mathcal{D}}$, можно воспользоваться результатами работы [12], в которой достаточно подробно изложен метод получения условий субоптимальности в аналогичной задаче для квазилинейного эллиптического уравнения (см. задачу для функционала $J_{\xi,\rho}$ в [12], с. 1414). Применение метода указанной работы в аналогичной ситуации настоящей работы приводит к следующей теореме.

Теорема 3.1. *Существуют пара* $(u^{i,s,1,\gamma,h}, q^{k,i,s,\gamma,h}) \in \overset{\wedge}{\mathcal{D}}$,

$$d(u^{i,s,1,\gamma,h}, u^{i,s,1,\gamma}) + |q^{k,i,s,\gamma,h} - q^{k,i,s,\gamma}| \le \sqrt{\varepsilon(h)}, \tag{3.10}$$

вектор $\mu^{i,s,\gamma,h} \in R^{l_k+1}$,

$$\sum_{j=0}^{l_k} \mu_j^{i,s,\gamma,h} = 1, \quad \mu_j^{i,s,\gamma,h} \ge 0, \quad j = 0,1,\dots,l_k, \tag{3.11}$$

$$\mu_j^{i,s,\gamma,h}(J_\xi^h(u^{i,s,1,\gamma,h}, q^{k,i,s,\gamma,h}) - I_j^{k,h}(u^{i,s,1,\gamma,h}) + q_j^{k,i,s,\gamma,h} +$$
$$+\varepsilon^{i,s} - \sqrt{\gamma}\, d((u^{i,s,1,\gamma}, q^{k,i,s,\gamma}),(u^{i,s,1,\gamma,h}, q^{k,i,s,\gamma,h}))) = 0, \quad j = 1,\dots,l_k,$$

такие, что

$$\int_\Omega \max_{v\in U}\Big\{\mu_0^{i,s,\gamma,h}(\lambda^i\eta^i+I_0(u^{i,s,1,\gamma,h})-\beta_k(q^{k,i}))(H_0(x,z[u^{i,s,1,\gamma,h}](x),v,\eta_0[u^{i,s,1,\gamma,h}](x))-$$

$$-H_0(x,z[u^{i,s,1,\gamma,h}](x),u^{i,s,1,\gamma,h}(x),\eta_0[u^{i,s,1,\gamma,h}](x)))+$$

$$+\sum_{j=1}^{l_k}\mu_j^{i,s,\gamma,h}(H(x,z[u^{i,s,1,\gamma,h}](x),v,\eta_j^{k,h}[u^{i,s,1,\gamma,h}](x))-$$

$$-H(x,z[u^{i,s,1,\gamma,h}](x),u^{i,s,1,\gamma,h}(x),\eta_j^{k,h}[u^{i,s,1,\gamma,h}](x)))\Big\}\,dx\le$$

$$\le 2\operatorname{meas}\Omega(\mu_0^{i,s,\gamma,h}\sqrt{r^{i,s}}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\varepsilon(h)}), \tag{3.12}$$

$$\max_{q\in\overline{S}_P}\Big\langle-\mu_0^{i,s,\gamma,h}\lambda^i\zeta^i-\sum_{j=1}^{l_k}\mu_j^{i,s,\gamma,h}e^j,q-q^{k,i,s,\gamma,h}\Big\rangle\le 2\operatorname{meas}\Omega(\mu_0^{i,s,\gamma,h}\sqrt{r^{i,s}}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\varepsilon(h)}), \tag{3.13}$$

где $\eta_0[u^{i,s,1,\gamma,h}]$, $\eta_j^{k,h}[u^{i,s,1,\gamma,h}]$ *— решения сопряженной задачи* (*см. лемму* 3.3 *в* [1]),

$$\frac{\partial}{\partial x_j}a_{i,j}(x)\eta_{x_i}+\nabla_z a(x,z[u](x),u(x))\eta=\psi(x),\quad \eta(x)=0,\quad x\in S, \tag{3.14}$$

при $u=u^{i,s,1,\gamma,h}$ *и соответственно при*

$$\psi(x)=-\nabla_z F(x,z[u^{i,s,1,\gamma,h}](x),u^{i,s,1,\gamma,h}(x))$$

и

$$\psi(x)=-1/\operatorname{meas}(S_h(x^{k,j})\cap\Omega)\chi_j^{k,h}(x)\nabla_z G(x,z[u^{i,s,1,\gamma,h}](x)),$$

$\chi_j^{k,h}$ *— характеристическая функция шара* $S_h(x^{k,j})$, $e^j\equiv(\overbrace{0,\dots,0}^{j-1},1,0,\dots,0)$, $r^{i,s}\equiv\hat{\beta}_k^i-\hat{\beta}_k^{i,\varepsilon^{i,s}}+\lambda^i\eta^i\delta^{i,s}+\frac{1}{2}(\delta^{i,s})^2\to 0$, $s\to\infty$,

$$H_0(x,z,u,\eta)\equiv\eta a(x,z,u)-F(x,z,u),\quad H(x,z,u,\eta)\equiv\eta a(x,z,u).$$

Определим на $\overline{\Omega}$ положительные меры Радона $\lambda_j^{k,h}$, $j=1,\dots,l_k$, сосредоточенные на множествах $S_h(x^{k,j})\cap\overline{\Omega}$, $j=1,\dots,l_k$, посредством равенств

$$\lambda_j^{k,h}(E)\equiv 1/\operatorname{meas}(S_h(x^{k,j})\cap\Omega)\int_E\chi_j^{k,h}(x)\,dx,$$

где $E\subset\overline{\Omega}$ — борелевское множество. Очевидно,

$$|\lambda_j^{k,h}|=1,\quad |\lambda_j^{k,h}-\delta_{x^{k,j}}|\to 0,\quad h\to 0,\quad j=1,\dots,l_k, \tag{3.15}$$

где $\delta_{x^{k,j}}$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $x^{k,j}$. Функция $\eta_j^{k,h}[u]$ есть решение сопряженной краевой задачи с мерой Радона $\mu=\lambda_j^{k,h}$ в правой части уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_j}a_{i,j}(x)\eta_{x_i}+\nabla_z a(x,z[u](x),u(x))\eta=-\nabla_z G(x,z[u](x))\mu,\quad \eta(x)=0,\quad x\in S. \tag{3.16}$$

В силу леммы 3.4 из [1] и предельного соотношения (3.15) можно утверждать, что

$$\|\eta_j^{k,h}[u]-\eta_j^k[u]\|_{\sigma,\Omega}^{(1)}\to 0,\quad h\to 0,\quad \sigma<n/(n-1), \tag{3.17}$$

где $\eta_j^k[u]$ — решение сопряженной задачи (3.16) с мерой Дирака $\mu=\delta_{x^{k,j}}$.

В соотношениях (3.10)–(3.13) можно перейти к пределу сначала при $h\to 0$, а затем — при $\gamma\to 0$. Такой достаточно очевидный повторный предельный переход осуществим в силу оценок (3.8), (3.10), условия нормировки (3.11), компактности шара в R^{l_k}, оценок лемм 3.1, 3.3, 3.4

из [1] (напр., предельное соотношение (3.17)). В результате указанного предельного перехода получаем следующую теорему.

Теорема 3.2. *Существует вектор* $\mu^{i,s} \in R^{l_k+1}$,

$$\sum_{j=0}^{l_k} \mu_j^{i,s} = 1, \quad \mu_j^{i,s} \ge 0, \ \ j = 0,1,\dots,l_k, \ \ \mu_j^{i,s}(I_j^k(u^{i,s,1}) - q_j^{k,i,s} - \varepsilon^{i,s}) = 0, \ \ j = 1,\dots,l_k,$$

такой, что

$$\int_\Omega \max_{v\in U} \Big\{ \mu_0^{i,s}(\lambda^i\eta^i + I_0(u^{i,s,1}) - \beta_k(q^{k,i}))(H_0(x, z[u^{i,s,1}](x), v, \eta_0[u^{i,s,1}](x)) -$$
$$-H_0(x, z[u^{i,s,1}](x), u^{i,s,1}(x), \eta_0[u^{i,s,1}](x))) + \sum_{j=1}^{l_k} \mu_j^{i,s}(H(x, z[u^{i,s,1}](x), v, \eta_j^k[u^{i,s,1}](x)) -$$
$$-H(x, z[u^{i,s,1}](x), u^{i,s,1}(x), \eta_j^k[u^{i,s,1}](x))) \Big\} dx \le 2\,\mathrm{meas}\,\Omega \mu_0^{i,s}\sqrt{r^{i,s}},$$

$$\max_{q\in \overline{S}_P} \Big\langle -\mu_0^{i,s}\lambda^i\zeta^i - \sum_{j=1}^{l_k} \mu_j^{i,s} e^j, q - q^{k,i,s} \Big\rangle \le 2\,\mathrm{meas}\,\Omega \mu_0^{i,s}\sqrt{r^{i,s}},$$

где величина $r^{i,s}$ *определена в теореме* 3.1.

Воспользовавшись условием близости (3.6) в метрике $\hat{d}$ двух пар $(u^{i,s,1}, q^{k,i,s})$, $(u^{i,s}, q^{k,i})$, на основе априорных оценок лемм 3.1, 3.3, 3.4 из [1], можем переписать теорему 3.2 в следующем виде в терминах пары $(u^{i,s}, q^{k,i})$.

Теорема 3.3. *Пусть* $u^{i,s}$, $s = 1,2,\dots,$ *— произвольное м. п. р. в смысле* (3.1) *в задаче* $(P^k_{q^k})$ *при* $q^k = q^{k,i}$. *Тогда существуют последовательность чисел*

$$\gamma^{i,s} \ge 0, \quad s = 1,2,\dots, \quad \gamma^{i,s} \to 0, \quad s \to \infty,$$

ограниченная последовательность векторов $\mu^{i,s} \in R^{l_k+1}$,

$$\sum_{j=0}^{l_k} \mu_j^{i,s} = 1, \quad \mu_j^{i,s} \ge 0, \quad j = 0,1,\dots,l_k,$$
$$\mu_j^{i,s} = 0, \quad \text{если} \ \ |I_j^k(u^{i,s}) - q_j^{k,i}| \ge \gamma^{i,s}, \quad j = 1,\dots,l_k,$$

такие, что

$$\int_\Omega \max_{v\in U} \Big\{ \mu_0^{i,s}(\lambda^i\eta^i + I_0(u^{i,s}) - \beta_k(q^{k,i}))(H_0(x, z[u^{i,s}](x), v, \eta_0[u^{i,s}](x)) -$$
$$-H_0(x, z[u^{i,s}](x), u^{i,s}(x), \eta_0[u^{i,s}](x))) +$$
$$+\sum_{j=1}^{l_k} \mu_j^{i,s}(H(x, z[u^{i,s}](x), v, \eta_j^k[u^{i,s}](x)) - H(x, z[u^{i,s}](x), u^{i,s}(x), \eta_j^k[u^{i,s}](x))) \Big\} dx \le \gamma^{i,s},$$

$$\max_{q\in \overline{S}_P} \Big\langle -\mu_0^{i,s}\lambda^i\zeta^i - \sum_{j=1}^{l_k} \mu_j^{i,s} e^j, q - q^{k,i} \Big\rangle \le \gamma^{i,s}.$$

Как и в [3]–[6], примем для задачи $(P^k_{q^k})$ за определение стационарной последовательности следующее определение.

Определение 3.2. Последовательность управлений $u^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, назовем стационарной последовательностью в задаче $(P^k_{q^k})$, если существуют последовательность чисел $\gamma^i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $\gamma^i \to 0$, $i \to \infty$,

$$u^i \in \mathcal{D}^{k,\gamma^i}_{q^k} \equiv \{u \in \mathcal{D} : I^k_j(u) - q^k_j \leq \gamma^i, \ j = 1, \ldots, l_k\},$$

и ограниченная последовательность векторов $\mu^i \in R^{l_k+1}$, $i = 1, 2, \ldots$,

$$\sum_{j=0}^{l_k} \mu^{k,i}_j \neq 0, \quad \mu^i_j \geq 0, \ \ j = 0, 1, \ldots, l_k,$$
$$\mu^i_j = 0, \ \ \text{если} \ \ |I^k_j(u^i) - q^k_j| \geq \gamma^i, \ \ j = 1, 2, \ldots, l_k,$$

такие, что

$$\int_\Omega \max_{v \in U} \Big\{ \mu^i_0 (H_0(x, z[u^i](x), v, \eta_0[u^i](x)) - H_0(x, z[u^i](x), u^i(x), \eta_0[u^i](x))) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l_k} \mu^i_j (H(x, z[u^i](x), v, \eta^k_j[u^i](x)) - H(x, z[u^i](x), u^i(x), \eta^k_j[u^i](x))) \Big\} \, dx \leq \gamma^i,$$

где $\eta_0[u^i]$ — решение задачи (3.14) с $u = u^i$, $\psi(x) = -\nabla_z F(x, z[u^i](x), u^i(x))$, $\eta^k_j[u^i]$ — решение задачи (3.16) с $u = u^i$, $\mu = \delta_{x^{k,j}}$, причем последовательность μ^i, $i = 1, 2, \ldots$, имеет только ненулевые предельные точки.

Вместе с этим определением, как и в [3]–[6], введем множества множителей $L^{k,\lambda}_{q^k} \equiv \Big\{ -\sum_{j=1}^{l_k} \mu_j e^j \in R^{l_k} : \mu \equiv (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{l_k}) \in R^{l_k+1}, \ \mu \neq 0, \ \mu_0 = \lambda$, существует стационарная в задаче $(P^k_{q^k})$ последовательность пар, для которой соответствующая ей, согласно определению стационарной последовательности, последовательность векторов μ^i, $i = 1, 2, \ldots$, имеет вектор μ в качестве своей предельной точки$\Big\}$, $\lambda = 0, 1$; $M^{k,0}_{q^k} \equiv L^{k,0}_{q^k} \bigcup \{0\}$, $\widehat{M}^{k,1}_{q^k} \equiv L^{k,1}_{q^k}$.

Рассуждая так же, как и при обосновании теоремы 4.1 из [5] (см. также [4]), можно утверждать, что справедлива

Теорема 3.4. *Пусть* $\beta_k(q^k) < +\infty$. *Тогда*

$$(\partial \beta_k(q^k) \bigcap M^{k,1}_{q^k}) \bigcup (\partial^\infty \beta_k(q^k) \bigcap M^{k,0}_{q^k}) \setminus \{0\} \neq \emptyset,$$

и обобщенный градиент Кларка функции значений β_k *в точке* q^k *равен*

$$\partial \beta_k(q^k) = \overline{\text{conv}} \{ \partial \beta_k(q^k) \bigcap M^{k,1}_{q^k} + \partial^\infty \beta_k(q^k) \bigcap M^{k,0}_{q^k} \}.$$

Следствие 3.1. Если в некоторой окрестности O_{q^k} точки q^k все задачи $(P^k_{y^k})$, $y^k \in O_{q^k}$, нормальны, т. е. $M^{k,0}_{y^k} = \{0\}$, $y^k \in O_{q^k}$, причем множества $M^{k,1}_{y^k}$ равномерно по $y^k \in O_{q^k}$ ограничены постоянной K в некоторой норме $\|\cdot\|$ (напр., евклидовой, $\|\cdot\| = |\cdot|$), то функция значений β_k является липшицевой в этой норме на O_{q^k} с той же постоянной K.

Утверждение следствия непосредственно вытекает из равенства теоремы 3.4, теоремы 2.3.7 (формула конечных приращений в липшицевом случае) и предложения 2.9.7 из [10].

4. Липшицевость функции значений, типичность регулярности

Покажем сначала, что нормальность задачи (P_q) (см. определение 5.2 в [1]) влечет липшицевость ее функции значений в окрестности точки $q \in C(X)$. Покажем для этого предварительно, что из нормальности задачи (P_q) следует, что существует такое $\delta > 0$, для которого все множества $M^{k,1}_{y^k} \in R^{l_k}$, $k = 1, 2, \dots$, при $|y^k - \overline{q}^k|_\infty \le \delta$ равномерно по $k = 1, 2, \dots$ и по y^k ограничены в c-норме $|\cdot|_\infty$, где под c-нормой $|x|_\infty$ понимается, как обычно, величина $\max\{|x_1|, \dots, |x_{l_k}|\}$. Предположим, что это не так и, значит, существуют такие последовательности векторов $\widetilde{y}^k \in R^{l_k}$, $\lambda^k \in M^{k,1}_{y^k}$, $k = 1, 2, \dots$, что

$$|\widetilde{y}^k - \overline{q}^k|_\infty \to 0, \quad |\lambda^k|_\infty \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Это означает, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ существуют последовательность управлений $u^{k,i} \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$, последовательность чисел $\gamma^{k,i} \ge 0$, $i = 1, 2, \dots$, $\gamma^{k,i} \ge 0$, $\gamma^{k,i} \to 0$, $i \to \infty$,

$$u^{k,i} \in \mathcal{D}^{k,\gamma^{k,i}}_{\widetilde{y}^k} \equiv \{u \in \mathcal{D} : I^k_j(u) - \widetilde{y}^k_j \le \gamma^{k,i},\ j = 1, \dots, l_k\},$$

и ограниченная последовательность векторов $\mu^{k,i} \equiv (\mu^{k,i}_0, \widetilde{\mu}^{k,i}) \in R^{l_k+1}$, $i = 1, 2, \dots$,

$$\sum_{j=0}^{l_k} \mu^{k,i}_j \ne 0, \quad \mu^{k,i}_j \ge 0, \quad j = 0, 1, \dots, l_k,$$
$$\mu^{k,i}_j = 0, \quad \text{если} \ \ |I^k_j(u^{k,i}) - \widetilde{y}^k_j| \ge \gamma^{k,i}, \quad j = 1, 2, \dots, l_k,$$

такие, что

$$\int_\Omega \max_{v \in U} \Big\{ \mu^{k,i}_0 (H_0(x, z[u^{k,i}](x), v, \eta_0[u^{k,i}](x)) - H_0(x, z[u^{k,i}](x), u^{k,i}(x), \eta_0[u^{k,i}](x))) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l_k} \mu^{k,i}_j (H(x, z[u^{k,i}](x), v, \eta^k_j[u^{k,i}](x)) - H(x, z[u^{k,i}](x), u^{k,i}(x), \eta^k_j[u^{k,i}](x))) \Big\} dx \le \gamma^{k,i},$$

где $\eta_0[u^{k,i}]$ — решение задачи (3.14) с $u = u^{k,i}$, $\psi(x) = -\nabla_z F(x, z[u^{k,i}](x), u^{k,i}(x))$, $\eta^k_j[u^{k,i}]$ — решение задачи (3.16) с $u = u^{k,i}$, $\mu = \delta_{x^{k,j}}$, причем последовательность $\mu^{k,i}$, $i = 1, 2, \dots$, имеет своим пределом точку $(1, \lambda^k)$.

Пусть i_k, $k = 1, 2, \dots$, — такая последовательность, что

$$\gamma^{k,i_k} \to 0, \quad \gamma^{k,i_k}/|\lambda^k|_\infty \equiv \overline{\gamma}^k \to 0, \quad \mu^{k,i_k}_0/|\lambda^k|_\infty \equiv \overline{\mu}^k_0 \to 0,$$
$$|\widetilde{\mu}^{k,i_k}/|\lambda^k|_\infty|_\infty \to 1, \quad \widetilde{\mu}^{k,i_k}/|\lambda^k|_\infty \equiv \overline{\mu}^k = (\overline{\mu}^k_1, \dots, \overline{\mu}^k_{l_k}).$$

Тогда легко заметить, что последовательность $u^k \equiv u^{k,i_k} \in \mathcal{D}^{\overline{\gamma}^k_1}_q$, $k = 1, 2, \dots$, $\overline{\gamma}^k_1 \to 0$, $k \to \infty$, удовлетворяет соотношениям

$$\int_\Omega \max_{v \in U} \{ \overline{\mu}^k_0 (H_0(x, z[u^k](x), v, \eta_0[u^k](x)) - H_0(x, z[u^k](x), u^k(x), \eta_0[u^k](x))) +$$
$$+ (H(x, z[u^k](x), v, \eta^k[u^k](x)) - H(x, z[u^k](x), u^k(x), \eta^k[u^k](x))) \} dx \le \overline{\gamma}^k,$$

где $\eta^k[u^k]$ — решение сопряженной задачи (3.16) с $u = u^k$ и с $\mu = \overline{\mu}^k \equiv \sum\limits_{j=1}^{l_k} \overline{\mu}^k_j \delta_{x^{k,j}}$ (здесь для меры сохранено то же обозначение, которое выше использовалось для вектора множителей), причем, очевидно, $\overline{\mu}^k_0 \to 0$, $|\overline{\mu}^k| \to 1$, $k \to \infty$, а положительная мера $\overline{\mu}^k \in M(\Omega)$ (как и в [1], $M(\Omega) \equiv C^*_0(\Omega)$, $C_0(\Omega)$ — пространство всех непрерывных функций на Ω, зануляющихся на $\partial\Omega$) сосредоточена на множестве $\{x \in X : |G(x, z[u^k](x) - q(x))| \le \overline{\gamma}^k_2\}$, $\overline{\gamma}^k_2 \to 0$, $k \to \infty$. Здесь и выше $\overline{\gamma}^k_s$, $k = 1, 2, \dots$, $s = 1, 2$, — некоторые последовательности неотрицательных чисел. Таким образом, последовательность u^k, $k = 1, 2, \dots$, является стационарной последовательностью в задаче (P_q) $(\gamma^k = \max\{\overline{\gamma}^k, \overline{\gamma}_1^k, \overline{\gamma}_2^k\})$, но не является нормальной стационарной последовательностью. Полученное противоречие говорит о том, что указанное выше свойство равномерной ограниченности множеств $M_{y^k}^{k,1}$ действительно имеет место. Практически повторяя проведенные рассуждения, можно показать, что все задачи $(P_{y^k}^k)$ при y^k, удовлетворяющем неравенству $|y^k - \overline{q}^k|_\infty \le \delta$, являются без ограничения общности и нормальными.

Таким образом, по следствию 3.1 функции значений $\beta_k(y^k)$, $|y^k - \overline{q}^k|_\infty \le \delta/2$, являются липшицевыми с не зависящей от $k = 1, 2, \ldots$ постоянной Липшица K. Отсюда следует, что условию Липшица с той же постоянной в $\delta/2$-окрестности точки $q \in C(X)$ удовлетворяет и функция значений исходной задачи (P_q). Действительно, пусть $q^1, q^2 \in C(X)$, $\|q^i - q\|_X^{(0)} \le \delta/2$, $i = 1, 2$. Тогда также выполняются и неравенства $|\overline{q}^{i,k} - \overline{q}^k|_\infty \le \delta/2$, $i = 1, 2$, где $\overline{q}^{i,k} \equiv (\overline{q}_1^{i,k}, \ldots, \overline{q}_{l_k}^{i,k})$, $\overline{q}_j^{i,k} = q^i(x_j^k)$, $j = 1, \ldots, l_k$, из которых по доказанному следует, что $|\beta_k(q^{1,k}) - \beta_k(q^{2,k})| \le K|\overline{q}^{1,k} - \overline{q}^{2,k}|_\infty$, $k = 1, 2, \ldots$ Переходя в силу леммы 3.1 к пределу при $k \to \infty$ в последнем неравенстве, получаем $|\beta(q^1) - \beta(q^2)| \le K\|q^1 - q^2\|_X^{(0)}$.

Оказывается, справедлив, в известном смысле, и обратный результат.

Теорема 4.1. *Пусть функция значений β задачи (P_q) является липшицевой в окрестности точки $q \in C(X)$. Тогда в задаче (P_q) для всех q' из некоторой окрестности q существуют регулярные м.п.р.*

Доказательство. Приведем лишь основную идею доказательства. Рассмотрим семейство зависящих от числового параметра ν задач $(\overline{P}_\nu) \equiv (P_{q+\nu\widetilde{q}})$, где $\widetilde{q} \equiv 1$. Так как функция β является липшицевой в окрестности q, то, очевидно, функция одного переменного $\overline{\beta}(\nu) \equiv \beta(q + \nu\widetilde{q})$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности нуля. Поэтому в силу проксимальной нормальной формулы для нормального конуса Кларка (напр., [10], предложение 2.5.7) найдутся такие последовательности чисел ν^i, ζ^i, η^i, $i = 1, 2, \ldots$, что

$$\nu^i \to 0, \ \ \overline{\beta}(\nu^i) \to \overline{\beta}(\nu), \ \ (\zeta^i, -\eta^i) \to (\zeta, -\eta) \ne 0, \ \ i \to \infty, \ \ \eta > 0,$$
$$(\zeta^i, -\eta^i) \in PN_{\mathrm{epi}\,\overline{\beta}}(\nu^i, \overline{\beta}(\nu^i)).$$

Пользуясь здесь той же аргументацией, на основе которой была записана вспомогательная задача (3.3), опять сделаем вывод, что любое м. п. р. $u^{i,k} \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots$, в смысле (3.1) в задаче $(\overline{P}_{\nu^i})$ является м. п. р. (в паре с ν^i) и в задаче

$$\lambda^i\eta^i I_0(u) - \lambda^i\zeta^i\nu' + \frac{1}{2}\|(\nu', I_0(u)) - (\nu^i, \overline{\beta}(\nu^i))\|^2 \to \inf, \tag{4.1}$$
$$I_1(u) \in \mathcal{M} + q + \nu'\widetilde{q}, \ \ \nu' \in S_P, \ \ u \in \mathcal{D},$$

где $S_P \equiv (-P, P)$ — интервал достаточно большой длины такой, что $\nu^i \in S_P$, $\lambda^i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, — некоторая последовательность чисел. Запишем далее необходимые условия на м. п. р. $(u^{i,k}, \nu^i)$, $k = 1, 2, \ldots$, в задаче (4.1) (это делается по той же схеме, что применялась при доказательстве теоремы 4.1 в [1]), а затем перейдем в них к пределу при $i \to \infty$ (такой предельный переход осуществляется по той же схеме, что и аналогичный предельный переход при $i \to \infty$ в [5], в результате которого лемма 9 цитированной работы явилась следствием леммы 8 той же работы). Естественно, при таком предельном переходе существенное значение имеет $*$-слабая компактность шара в пространстве мер Радона (в [5] данный результат, естественно, не использовался, т. к. рассмотренная там задача содержала лишь конечное число функциональных ограничений). В результате действий по указанной схеме получаем м. п. р. u^s, $s = 1, 2, \ldots$, в задаче (P_q), удовлетворяющее всем соотношениям теоремы 4.1 в [1], причем $\mu_0^s \to \eta > 0$, что и позволяет говорить о регулярности задачи (P_q). $\square$

В общей же ситуации, когда липшицевость функции значений $\beta(q)$, вообще говоря, не имеет места, справедлив следующий общий результат, который можно интерпретировать как результат о типичности регулярного принципа максимума. При этом под типичностью выполнимости некоторого свойства на некотором метрическом пространстве "возможных ситуаций", в каждой из которых данное свойство "может иметь место", мы понимаем выполнимость этого свойства на всюду плотном в пространстве "возможных ситуаций" множестве.

Теорема 4.2. *Множество тех точек $q \in \operatorname{dom}\beta$, для которых в задаче (P_q) все м. п. р. являются регулярными, всюду плотно в $\operatorname{dom}\beta$.*

Доказательство этой теоремы, по сути дела, повторяет первую часть доказательства теоремы 4.1. Действительно, пусть $q \in \operatorname{dom}\beta$, $\widetilde{q} \in C(X)$ — произвольная положительная функция. Тогда $q + \nu\widetilde{q} \in \operatorname{dom}\beta$, $\nu \in \operatorname{dom}\overline{\beta}$ при $\nu \geq 0$ и функция значений $\overline{\beta}(\nu) \equiv \beta(q + \nu\widetilde{q})$, о которой идет речь при доказательстве теоремы 4.1, является лишь полунепрерывной снизу функцией числового параметра $\nu \geq 0$, т. к. именно таким свойством обладает согласно лемме 3.2 в [1] функция $\beta(q)$. Отсюда в силу ([8], теорема 7.1; [9]) следует, что всюду плотно на отрезке $[0, \nu_0]$, $\nu_0 > 0$, лежат точки ν, для которых существует проксимальная нормаль $(\zeta, -\eta) \in PN_{\operatorname{epi}\overline{\beta}}(\nu, \overline{\beta}(\nu))$ с $\eta > 0$. Последнее, как и при доказательстве теоремы 4.1, означает, что для некоторого $\lambda > 0$ любое м. п. р. $u^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots$, в задаче $(\overline{P}_\nu)$ является м. п. р. (в паре с ν) и в задаче (4.1) при $\lambda^i = \lambda$, $\eta^i = \eta$, $\zeta^i = \zeta$, $\nu^i = \nu$. Записывая принцип максимума для этого м. п. р. в указанной задаче (что делается по схеме доказательства теоремы 4.1 в [1]), получаем регулярный принцип максимума для м. п. р. u^k, $k = 1, 2, \ldots$, в задаче $(P_{q+\nu\widetilde{q}})$. Так как точка ν может быть взята сколь угодно близкой к нулю, то можно утверждать, что в любой окрестности элемента $q \in \operatorname{dom}\beta$ находится элемент $q + \nu\widetilde{q}$, для которого задача $(P_{q+\nu\widetilde{q}})$ регулярна, и, следовательно, утверждение теоремы можно считать доказанным.

Замечание 4.1. Используя вместо проксимальных нормалей [8]–[10] из определения 3.1 нормали в смысле [13], [14], можно усилить результат теоремы 4.2. А именно, можно показать, что для любого $q \in \operatorname{dom}\beta$ и любой положительной функции $\widetilde{q} \in C(X)$ в задаче $(P_{q+\nu\widetilde{q}})$ при п. в. $\nu \geq 0$ существуют только регулярные м. п. р.

Литература

1. Сумин М.И. *Субоптимальное управление полулинейными эллиптическими уравнениями с фазовыми ограничениями*, I: *принцип максимума для минимизирующих последовательностей, нормальность* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 33–44.
2. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 624 с.
3. Сумин М.И. *Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами* // Сб. докл. 1-й Международн. конф. "Математические алгоритмы" (Н. Новгород, 14–19 августа 1994 г.). – Н. Новгород, 1995. – С. 116–125.
4. Sumin M.I. *Suboptimal control of systems with distributed parameters*: *minimizing sequences, value function, regularity, normality* // Control and Cybernetics. – 1996. – V. 25. – № 3. – P. 529–552.
5. Сумин М.И. *Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: минимизирующие последовательности, функция значений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – № 1. – С. 23–41.
6. Сумин М.И. *Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: свойства нормальности, субградиентный двойственный метод* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – № 2. – С. 162–178.
7. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1973. – 576 с.

8. Borwein J.M., Strojwas H.M. *Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space, Part* I : *Theory* // Can. J. Math. – 1986. – V. 38. – № 2. – P. 431–452.
9. Borwein J.M., Strojwas H.M. *Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space, Part* II : *Applications* // Can. J. Math. – 1987. – V. 39. – № 2. – P. 428–472.
10. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* – М.: Наука, 1988. – 279 с.
11. Ekeland I. *On the variational principle* // J. Math. Anal. Appl. – 1974. – V. 47. – № 2. – P. 324–353.
12. Сумин М.И. *Оптимальное управление объектами, описываемыми квазилинейными эллиптическими уравнениями* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 8. – С. 1406–1416.
13. Мордухович Б.Ш. *Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления.* - М.: Наука, 1988. – 360 с.
14. Mordukhovih B.S., Shao Y. *Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – V. 348. – № 4. – P. 1235–1280.

Нижегородский государственный университет

Поступила
16.11.1998