ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 7 (530)

УДК 517.927

А.И. ВАГАБОВ, З.А. АБДУРАХМАНОВ

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В [1]–[2] был предложен метод решения смешанных задач для квазилинейных параболических и гиперболических уравнений, сводящий их решение к решению системы интегральных уравнений. Рассуждения этих работ ограничены случаем старших частей вида $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. В данной статье разработана общая теория в случае плоских квазилинейных смешанных задач для параболических систем с переменными коэффициентами в старшей части. В [1]-[3] указана литература по рассматриваемому вопросу.

1. Постановка проблемы и вспомогательная граничная задача

1. Рассматривается квазилинейная параболическая система

$$c(x)\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f\Big(t,x,v,\frac{\partial v}{\partial x}\Big),\quad 0<x<1,\ \ 1<t\le T, \tag{1}$$

$$U(v)=\Big(a\frac{\partial v}{\partial x}+a^1v\Big)_{x=0}+\Big(b\frac{\partial v}{\partial x}+b^1v\Big)_{x=1}=0,\quad 0\le t\le T,$$

$$V(v)=dv(t,0)+d^1v(t,1)=0\quad 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$v(0,x)=\psi(x), \tag{3}$$

где $c(x)$, $\psi(x)$, $v(t,x)$, $f(t,x,v,\frac{\partial v}{\partial x})$ — $n\times n$-вещественные матричные функции, a, a^1, b, b^1, d, d^1 — постоянные $n\times n$-матрицы.

Предполагаются выполненными следующие условия.

1) $c(x)\in C^2[0,1]$.

2) Характеристические корни $\varphi_1^2(x),\dots,\varphi_n^2(x)$ матрицы $c(x)$ различны при всех x, их вещественные части положительны, аргументы этих корней и аргументы их разностей не зависят от x. Поэтому либо $\varphi_k(x)=\pm|\varphi_k(x)|e^{i\alpha}$, $k=\overline{1,n}$, $-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}$, либо $\varphi_k(x)=\pm p(x)e^{i\alpha_k}$, $-\frac{\pi}{4}<\alpha_k<\frac{\pi}{4}$, $p(x)>0$.

3) $f(t,x,v,w)$ — непрерывно дифференцируемая функция в области

$$\Big\{0\le x\le 1,\ 0\le t\le T,\ \|v-\Phi(t,x)\|\le Q,\ \Big\|w-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big\|\le Q\Big\},$$

где $Q=\mathrm{const}$, $\|v(t,x)\|=\max\limits_{x,t}|v(t,x)|$, $|v|=\max\limits_{i,j}|v_{ij}|$, Φ — решение задачи (1)–(3) при $f\equiv 0$.

4) $\det\{ad^1\mathcal{D}(0)\}+(-1)^{n+1}\det\{db\mathcal{D}(1)\}\ne 0$, где $\mathcal{D}(x)=\mathrm{diag}(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))$ — диагональная матрица.

5) $\psi(x)\in C^2[0,1]$, $\psi^{(i)}(x)|_{x=0,1}=0$, $i=0,1$.

Решение задачи (1)–(3) ищется в линейном пространстве $\mathcal{D}(T)$ $n\times n$-матричных функций $v(t,x)$, $(t,x)\in[0,T]\times[0,1]$ (с указанной выше нормой $\|v\|$) таких, что

$$\|v-\Phi(t,x)\|\le Q,\quad \Big\|\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big\|\le Q.$$

2. Введем вспомогательную краевую задачу с комплексным параметром λ:

$$l(y) \equiv y'' - \lambda^2 c(x) y = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

$$U(y) = 0, \quad V(y) = 0, \tag{5}$$

где $y(x,\lambda)$ — $n \times n$-матрица.

Прямыми $\operatorname{Re}\lambda(\varphi_i - \varphi_j) = 0$, $i \neq j$, $\operatorname{Re}\lambda(\varphi_i + \varphi_j) = 0$ разобьем λ-плоскость на конечное число секторов S с вершиной в 0. В каждом из секторов S при некоторой нумерации φ-корней справедливы неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda\varphi_1(x) \le \dots \le \operatorname{Re}\lambda\varphi_n(x) \le 0 \le \operatorname{Re}\lambda\varphi_{n+1}(x) \le \dots \le \operatorname{Re}\lambda\varphi_{2n}(x), \quad \lambda \in S \tag{6}$$

($\varphi_{n+k} = -\varphi_{n-k+1}$ при $k \le n$).

Теорема 1. *Для любого фиксированного сектора S существует фундаментальная система двух матричных решений уравнения (4), аналитических по λ в секторе S при $|\lambda| \gg 1$ и имеющих в нем асимптотические представления*

$$y^k(x,\lambda) = \left\{ m(x) + \frac{m^k(x)}{\lambda} + \frac{E(x,\lambda)}{\lambda^2} \right\}^{(-1)^k} e^{\lambda \int\limits_0^x \mathcal{D}(\zeta) d\zeta}, \quad k = 0, 1, \tag{7}$$

где $m(x)$ — $n \times n$-матрица, для которой

$$m^{-1}(x) c(x) m(x) = \mathcal{D}^2(x), \quad m \in C^2[0,1], \tag{8}$$

а E — покомпонентно ограниченная матрица при $\lambda \in S$, $|\lambda| \gg 1$.

Доказательство. Заменой $y' = \lambda y_1$ сведем (4) к системе

$$Y' = \lambda C(x) Y, \quad 0 < x < 1, \tag{9}$$

$$C(x) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c(x) & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

I — $n \times n$-единичная матрица.

Пусть $M(x)$ — матрица, для которой

$$M^{-1}(x) C(x) M(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(x) & 0 \\ 0 & -\mathcal{D}(x) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Можно принять $M(x) = \left(\begin{smallmatrix} m & m \\ m\mathcal{D} & -m\mathcal{D} \end{smallmatrix}\right)$. Действительно,

$$\det \begin{pmatrix} m & m \\ m\mathcal{D} & -m\mathcal{D} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} m & 0 \\ m\mathcal{D} & -2m\mathcal{D} \end{pmatrix} = (-2)^n \det m^2 \mathcal{D} \neq 0$$

и далее

$$C(x)M(x) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(x) & m(x) \\ m\mathcal{D} & -m\mathcal{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\mathcal{D} & -m\mathcal{D} \\ c(x)m & c(x)m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m \\ m\mathcal{D} & -m\mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{D} & 0 \\ 0 & -\mathcal{D} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для разных секторов S матрицы $m(x)$ отличаются лишь порядком столбцов.

Согласно известной теореме ([4], с. 114) система (9) имеет фундаментальное матричное решение

$$\widetilde{Y}(x,\lambda) = \left\{ M(x) + \frac{\widetilde{M}(x)}{\lambda} + \frac{\widetilde{E}(x,\lambda)}{\lambda^2} \right\} e^{\lambda \int\limits_0^x \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\zeta) & 0 \\ 0 & -\mathcal{D}(\zeta) \end{pmatrix} d\zeta}, \tag{12}$$

$\widetilde{M} \in C^1[0,1]$, $\lambda \in S$, $|\widetilde{E}(x,\lambda)| \le C$, $|\lambda| \gg 1$. Учитывая связь систем (4) и (9), из решения (12) получаем два решения (7), указанные в теореме. $\square$

Запишем покомпонентно фундаментальную систему (7) в виде $2n$ столбцов

$$y_{ij}(x,\lambda)=\left\{m_{ij}(x)+\frac{\eta_{ij}(x)}{\lambda}+\frac{E_{ij}(x,\lambda)}{\lambda^2}\right\}e^{-\lambda\int\limits_0^x\varphi_j(\zeta)d\zeta}, \tag{13}$$

$\lambda\in S$, $\{y_{ij}\}_1^n\equiv y^0$, $\{y_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{n+1,2n}}\equiv y^1$, $\eta_{ij}(x)\in C^1[0,1]$, $m_{ij+n}(x)=m_{ij}(x)$ при $i\le n$.

Теорема 2. *Матричная функция Грина* $G(x,\xi,\lambda)=\{G_{ij}\}_1^n$ *задачи* (4)–(5) *имеет вид* $G_{ij}(x,\xi,\lambda)=\frac{\Delta_{ij}(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$, *где*

$$\Delta_{ij}(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} g_{ij}(x,\xi,\lambda) & y_{i1}(x,\lambda) & \dots & y_{i2n}(x,\lambda)\\ U_1(g_j(x,\xi,\lambda))_x & u_{1,1}(\lambda) & \dots & u_{1,2n}(\lambda)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ U_{2n}(g_j(x,\xi,\lambda))_x & u_{2n,1}(\lambda) & \dots & u_{2n,2n}(\lambda)\end{vmatrix},$$

$$\Delta(\lambda)=\det\{u_{ij}(\lambda)\}_1^{2n},\quad u_{ij}(\lambda)=U_i(y_j(x,\lambda)), \tag{14}$$

y_j — *j-й столбец выбранной фундаментальной матрицы решений уравнения* (4), $U_i(y_j)$ — *результат подстановки в i-е из граничных условий* (5) *j-го столбца решений* (13). *Аналогичный смысл имеет* $U_i(g_j(x,\xi,\lambda))_x$, *индекс x за скобкой означает, что функционал U_i применяется по этой переменной,*

$$g_{ij}(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}y_{ik}(x,\lambda)z_{kj}(\xi,\lambda) & \text{при } 0\le\xi\le x;\\ -\sum\limits_{k=n+1}^{2n}y_{ik}(x,\lambda)z_{kj}(\xi,\lambda) & \text{при } x\le\xi\le b,\quad i,j=\overline{1,n},\end{cases}$$

$z_{kj}(\xi,\lambda)=\frac{W_{j+n,k}(\xi,\lambda)}{W(\xi,\lambda)}$, $k=\overline{1,2n}$,

$$W(\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} & \dots & y_{1,2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_{n1} & \dots & y_{nn} & \dots & y_{n,2n}\\ \frac{dy_{11}}{d\xi} & \dots & \frac{dy_{1n}}{d\xi} & \dots & \frac{dy_{1,2n}}{d\xi}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{dy_{n1}}{d\xi} & \dots & \frac{dy_{nn}}{d\xi} & \dots & \frac{dy_{n,2n}}{d\xi}\end{vmatrix}, \tag{15}$$

$W_{j+n,k}$ — *алгебраическое дополнение элементов с индексами $j+n$, k в определителе W.*

Доказательство. Определитель $W(\xi,\lambda)\ne0$, т.к. он отличается от определителя фундаментальной матрицы — решения системы (9) множителем λ^{-n} (см. также [4], с. 116). Проверим выполнение свойств функции Грина согласно ее определению ([4], с. 114).

1°. $G_{ij}(x,\xi,\lambda)$ непрерывна при $0\le x,\xi\le1$. Действительно, из формул (14), (15) видно, что достаточно проверить непрерывность $g_{ij}(x,\xi,\lambda)$ при $x=\xi$:

$$g_{ij}(\xi+0,\xi,\lambda)-g_{ij}(\xi-0,\xi,\lambda)=\sum_{k=1}^{2n}y_{ik}(\xi,\lambda)z_{kj}(\xi,\lambda)=$$

$$=\begin{array}{r}\\ \\ \\ \\ \\ (j+n)\\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} y_{11}(\xi,\lambda) & \dots & y_{1,2n}(\xi,\lambda)\\ \dots & \dots & \dots\\ y_{n1}(\xi,\lambda) & \dots & y_{n,2n}(\xi,\lambda)\\ \frac{dy_{11}(\xi,\lambda)}{d\xi} & \dots & \frac{dy_{1,2n}(\xi,\lambda)}{d\xi}\\ \dots & \dots & \dots\\ y_{i1}(\xi,\lambda) & \dots & y_{i,2n}(\xi,\lambda)\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{dy_{n1}(\xi,\lambda)}{d\xi} & \dots & \frac{dy_{n,2n}(\xi,\lambda)}{d\xi}\end{vmatrix}\frac{1}{W(\xi,\lambda)}=0,$$

$(j+n)$ указывает номер строки, в которой находятся элементы $y_{i1}\dots y_{i,2n}$.

2°. $G_{ij}(x,\xi,\lambda)$ при любом фиксированном $\xi\in(0,1)$ имеет непрерывные производные до 2-го порядка включительно в каждом из полуинтервалов $[0,\xi)$, $(\xi,1]$, причем

$$\frac{\partial G_{ij}(\xi+0,\xi,\lambda)}{\partial x}-\frac{\partial G_{ij}(\xi-0,\xi,\lambda)}{\partial x}=\frac{\partial g_{ij}(\xi+0,\xi,\lambda)}{\partial x}-\frac{\partial g_{ij}(\xi-0,\xi,\lambda)}{\partial x}=$$
$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{dy_{ik}(\xi,\lambda)}{d\xi}z_{kj}(\xi,\lambda)=\begin{cases}0 & \text{при } i\neq j;\\ 1 & \text{при } i=j.\end{cases}$$

Таким образом, $G'_x(x,\xi,\lambda)$ обладает нужным скачком при $x=\xi$.

3°. При фиксированном $\xi\in(0,1)$ согласно формулам (12), (13) имеем

$$l(G(x,\xi,\lambda))=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} l(g_j)_x & l(y_1) & \dots & l(y_{2n})\\ U_1(g_j)_x & u_{1,1}(\lambda) & \dots & u_{1,2n}(\lambda)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ U_{2n}(g_j)_x & u_{2n,1}(\lambda) & \dots & u_{2n,2n}(\lambda)\end{vmatrix}=0$$

ввиду равенства нулю элементов первой строки.

Аналогично, $U_i(G_j(x,\xi,\lambda))_x=0$, $i,j=\overline{1,2n}$, т. е. j-й столбец матрицы G удовлетворяет всем граничным условиям (5) при любом j. $\square$

2. Асимптотическое представление матрицы Грина и ее полюсы

Основываясь на (7), (13)–(15), найдем

$$z_{kj}(\xi,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{M_{j+n,k}(\xi)}{\det M(\xi)}\right]e^{-\lambda\int\limits_0^x\varphi_k(\zeta)d\zeta}, \tag{16}$$

($M_{j+n,k}(\xi)$ — алгебраическое дополнение элемента с индексами $(j+n,k)$ в $\det M(\xi)$),

$$g_{ij}(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda}[M(x,\xi,k)]e^{\lambda\int\limits_\xi^x\varphi_k d\zeta} & \text{при } 0\le\xi\le x;\\ -\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\lambda}[M(x,\xi,k)]e^{\lambda\int\limits_\xi^x\varphi_k d\zeta} & \text{при } x\le\xi\le 1,\end{cases} \tag{17}$$

$\lambda\in S$, где $M(x,\xi,k)=\frac{m_{ik}(x)M_{j+n,k}(\xi)}{\det M(\xi)}$. Вместо развернутых записей будем употреблять $[\alpha]\equiv\alpha+O(\frac{1}{\lambda})$, $|\lambda|\gg1$. Далее, используя теорему Лапласа, имеем

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}U(y^0) & U(y^1)\\ V(y^0) & V(y^1)\end{vmatrix}=\lambda^n\det m(0)m(1)\times$$
$$\times\Big\{\big(\det(b\ d\mathcal{D}(1))+(-1)^{n+1}\det(ad^1\mathcal{D}(0))\big)e^{\lambda\int\limits_0^1(\varphi_1+\dots+\varphi_n)d\zeta}+\cdots$$
$$+\big(\det(ad^1\mathcal{D}(0))+(-1)^{n+1}\det(bd\mathcal{D}(1))\big)e^{-\lambda\int\limits_0^1(\varphi_1+\dots+\varphi_n)d\zeta}\Big\},\quad\lambda\in S. \tag{18}$$

Отметим, что G не зависит от выбора фундаментальных решений и от их нумерации. Наконец, для элементов первого столбца определителя $\Delta_{ij}(x,\xi,\lambda)$ установим

$$U_s(g_j)_x = -\sum_{j=1}^{n} a_{si} \sum_{k=n+1}^{2n} \varphi_k(0)[M(0,\xi,k)] e^{-\lambda \int\limits_0^\xi \varphi_k d\zeta} + \sum_{i=1}^{n} b_{si}^1 \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(1)[M(1,\xi,k)] e^{\lambda \int\limits_0^\xi \varphi_k d\zeta} \quad \text{при} \quad s \le n,$$

$$U_s(g_j)_x = -\sum_{i=1}^{n} d_{si} \sum_{k=n+1}^{2n} [M(0,\xi,k)] \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \int\limits_0^\xi \varphi_k d\zeta} + \sum_{i=1}^{n} d_{si}^1 \sum_{k=1}^{n} [M(1,\xi,k)] \frac{1}{\lambda} e^{\lambda \int\limits_0^\xi \varphi_k d\zeta} \quad \text{при} \quad s > n. \qquad (19)$$

Теорема 3. *В каждом секторе S при $|\lambda| \gg 1$ для элементов матрицы Грина справедливы асимптотические представления*

$$G_{ij}(x,\xi,\lambda) = g_{ij}(x,\xi,\lambda) + \sum_{k,l=1}^{2n} \frac{\varepsilon_{klij}(x,\xi,\lambda)}{\lambda} e^{\lambda \int\limits_{c_1}^{x} \varphi_k dt} e^{\lambda \int\limits_{c_2}^{\xi} \varphi_l dt}, \qquad (20)$$

где $c_1, c_2 = 0$, если $k,l \le n$; $c_1, c_2 = 1$, если $k,l > n$, $\varepsilon_{klij}(x,\xi,\lambda)$ — функции, ограниченные вне δ-окрестности нулей $\Delta(\lambda)$, асимптотика g_{ij} определена формулой (17).

Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ имеет счетное множество нулей, состоящее из 2μ ($\mu \le n$) групп. Значения s-й группы лежат в полосе $\prod_s$ конечной ширины, содержащей луч d_s, который входит в прямую $\operatorname{Re}\lambda\varphi_s = 0$, причем все эти лучи расположены в секторах $\frac{\pi}{4} < \arg\lambda < 3\frac{\pi}{4}$, $5\frac{\pi}{4} < \arg\lambda < 7\frac{\pi}{4}$. В λ-плоскости вне малых кругов радиуса δ с центрами в нулях $\Delta(\lambda)$ имеет место неравенство

$$|\Delta(\lambda)| \ge N_\delta |\lambda|^n \left| e^{-\lambda \int\limits_0^1 (\varphi_1 + \cdots + \varphi_n) d\zeta} \right|, \quad N_\delta > 0. \qquad (21)$$

Доказательство. Утверждение теоремы о нулях $\Delta(\lambda)$ и неравенство (21) следует из известной теории асимптотически показательного многочлена, каким является $\Delta(\lambda)$ согласно формуле (18) ([5]). Из условия параболичности 2) следует, что все лучи d_s лежат в секторах $\frac{\pi}{4} < \arg\lambda < 3\frac{\pi}{4}$, $5\frac{\pi}{4} < \arg\lambda < 7\frac{\pi}{4}$.

Для получения формулы (20), разложив $\Delta_{ij}(x,\xi,\lambda)$ по первой строке, получим

$$G_{ij}(x,\xi,\lambda) = g_{ij}(x,\xi,\lambda) + \sum_{k=1}^{2n} \frac{y_{ik}(x,\lambda)\Delta_j^k(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

и воспользуемся формулами (13), (16), (19), (21).

3. Формула интегрального преобразования

Определим контур $L = L_1 \cup L_2$, направленный снизу вверх, где $L_1 = (|\lambda| = H) \cap (|\arg\lambda| \le \frac{\pi}{4} + \varepsilon)$, $L_2 = (|\lambda| \ge H) \cap (\arg\lambda = \pm(\frac{\pi}{4} + \varepsilon))$, $H \gg 1$, $\varepsilon > 0$ — малое число.

Теорема 4. *Для любой непрерывной $n \times n$-матрицы $h(x)$, $0 \le x \le 1$, справедлива формула предельного интегрального представления*

$$h(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{\pi\sqrt{-1}} \int_L \lambda e^{\varepsilon\lambda^2} d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) c(\xi) h(\xi) d\xi, \quad 0 < x < 1. \qquad (22)$$

Сходимость в правой части равномерна по x на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (0,1)$.

Доказательство основано на использовании представлений (20), (17) и на вычислениях правой части в (22). Прежде всего установим, что предел интеграла в (22), соответствующий второй слагаемой сумме в представлении (20), равен нулю. Отбрасывая величины, равные нулю, сведем предел в (22) к выражению

$$I(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1}{\pi\sqrt{-1}} \int_0^x \left\{ \sum_{k=1}^{n} M(x,\xi,k) \int_L e^{\varepsilon\lambda^2 + \lambda \int\limits_\xi^x \varphi_k d\zeta} d\lambda \right\}_1^n c(\xi)h(\xi)d\xi +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1}{\pi\sqrt{-1}} \int_x^1 \left\{ \sum_{k=n+1}^{2n} M(x,\xi,k) \int_L e^{\varepsilon\lambda^2 + \lambda \int\limits_\xi^x \varphi_k d\zeta} d\lambda \right\}_1^n c(\xi)h(\xi)d\xi,$$

где $M(x,\xi,k) = \frac{m_{ik}(x)M_{j+n,k}(\xi)}{\det M(\xi)}$. Вычислив интеграл по L (см. лемму 1 из § 4), получим

$$I(x) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_0^x \left\{ \sum_{k=1}^{n} M(x,\xi,k) e^{-\frac{\left(\int\limits_\xi^x \varphi_k d\zeta\right)^2}{4\varepsilon}} \right\}_1^n c(\xi)h(\xi)d\xi +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_x^1 \left\{ \sum_{k=n+1}^{2n} M(x,\xi,k) e^{-\frac{\left(\int\limits_\xi^x \varphi_k d\zeta\right)^2}{4\varepsilon}} \right\}_1^n c(\xi)h(\xi)d\xi.$$

Итак, приходим к вычислению интеграла

$$I_k(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\left(\int\limits_\xi^x \varphi_k d\zeta\right)^2}{4\varepsilon}} d\xi = \text{ (в силу условия 2) на с. 3) } = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\alpha_k^2 \frac{\left(\int\limits_\xi^x |\varphi_k| d\zeta\right)^2}{4\varepsilon}} d\xi.$$

Совершив в последнем интеграле замену $2\sqrt{\varepsilon}\, y_k = \int\limits_\xi^x |\varphi_k(\zeta)| d\zeta$, $d\xi = -\frac{-2\sqrt{\varepsilon}}{|\varphi_k(\xi)|} dy_k$, имеем

$$I_k(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\frac{\int_0^x |\varphi_k| d\zeta}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{0} \frac{2f(\xi(y)k)e^{-\alpha_k^2 y_k^2}}{|\varphi_k(\xi(y_k))|} dy_k = -\frac{2f(x)}{|\varphi_k(x)|} \int\limits_\infty^0 e^{-\alpha_k^2 y_k^2} dy_k = \frac{2f(x)}{|\varphi_k(x)|\alpha_k} \int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2} dz,$$

т. к. $\frac{3\pi}{4} < \arg\alpha_k < \frac{5\pi}{4}$.

Таким образом, $I_k(x) = -\frac{f(x)\sqrt{\pi}}{\varphi_k(x)}$. Следовательно,

$$I(x) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{M(x,x,k)}{\varphi_k(x)} \right\}_1^n c(x)h(x) + \left\{ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{M(x,x,k)}{\varphi_k(x)} \right\}_1^n c(x)h(x) = \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{M(x,x,k)}{\varphi_k(x)} \right\}_1^n c(x)h(x). \tag{23}$$

Матрица $\{\dots\}_1^n$ в формуле (23) представляет правый верхний матричный блок размера $n \times n$ в матрице $M \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathcal{D}^{-1} \end{pmatrix} M^{-1} =$ в силу (11) $= C^{-1}(x)$ и т. к. согласно (10) $C^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & c^{-1}(x) \\ E & 0 \end{pmatrix}$, то $I(x) = c^{-1}(x)c(x)h(x) = h(x)$. □

4. Леммы об интегралах, связанных с задачей (1)–(3)

Непосредственным вычислением интегралов при $k = 0$ с последующим дифференцированием доказывается

Лемма 1. *Пусть* $t>0$, $\alpha\neq 0$, *тогда*

$$\int_L \lambda^{2k}e^{\lambda^2 t-\lambda\alpha}d\lambda = i\sqrt{\pi}\frac{d^k}{dt^k}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}{\sqrt{t}},$$

$$\int_L \lambda^{2k+1}e^{\lambda^2 t-\lambda\alpha}d\lambda = \frac{i\sqrt{\pi}}{2}\alpha\frac{d^k}{dt^k}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}{t^{3/2}},\quad k=0,1,2,\dots,\quad \int_R^\infty e^{-x^2}dx\le\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-R^2},\quad R>0.$$

Сходимость интегралов равномерна по $t\in(0,T)$.

Лемма 2. *Интегралы вида*

$$J_s=\int_L \lambda^s e^{\lambda^2(t-\tau)}d\lambda\int_0^1 e^{-\lambda\left|\int\limits_\xi^x\varphi d\zeta\right|}\eta_{ij}(\xi)d\xi\int_0^t f_{js}(\tau,\xi,v,w)d\tau,\quad |\eta_{ij}|<C,\quad \varphi(x)>0,$$

$$I_s=\int_L \lambda^s e^{\lambda^2(t-\tau)}d\lambda\int_0^1 \varepsilon_{ij}(x,\xi,\lambda)e^{-\lambda\left(\int\limits_0^x\varphi_k d\zeta+\int\limits_0^\xi\varphi_l d\zeta\right)}d\xi\int_0^t f_{js}(\tau,\xi,v,w)dt,$$

$s=0,1$, $|\varepsilon_{ij}|<C$, *сходятся абсолютно и равномерно при* $0\le x\le 1$, $0\le t\le T$, *причем справедливы оценки*

$$\max(|J_1|,|I_1|)\le C\sqrt{t}\max_{\mathcal{D}}|f_{js}|,\quad \max(|J_0|,|I_0|)\le Ct^\alpha\max_{\mathcal{D}}|f_{js}|$$

для любого $\alpha\in[\frac12,1)$.

Доказательство. Оценим J_s. Для удобства деформируем контур L в $L_{\frac{\pi}{3}}=\{\arg\lambda=\pm\frac{\pi}{3},\ |\lambda|\ge 0\}$. Для $l\in L_{\frac{\pi}{3}}$ имеем

$$\int_0^1\left|e^{-\lambda\left|\int\limits_\xi^x\varphi d\zeta\right|}\right|d\xi=\int_0^1 e^{-\frac12|\lambda|\left|\int\limits_\xi^x\varphi d\zeta\right|}d\xi=\frac{2}{|\lambda|}\int_0^1\left[\operatorname{sign}(x-\xi)\frac{1}{\varphi(\xi)}\frac{d}{d\xi}e^{-\frac12|\lambda|\left|\int\limits_\xi^x\varphi d\zeta\right|}\right]d\xi=$$

$$=\frac{2e^{-\frac12|\lambda|\left|\int\limits_\xi^x\varphi d\zeta\right|}}{|\lambda|\varphi(\xi)}\Bigg|_0^x-\frac{2e^{-\frac12|\lambda|\left|\int\limits_\xi^x\varphi d\zeta\right|}}{|\lambda|\varphi(\xi)}\Bigg|_x^1+\frac{2}{|\lambda|}\int_0^x e^{-\frac12|\lambda|\int\limits_\xi^x\varphi d\zeta}\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi^2(\xi)}d\xi-\frac{2}{|\lambda|}\int_x^1 e^{-\frac12|\lambda|\int\limits_\xi^x\varphi d\zeta}\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi^2(\xi)}d\xi\le\frac{C}{|\lambda|}.$$

Итак, $\int\limits_0^1\left|e^{-\lambda\left|\int\limits_\xi^x\varphi d\zeta\right|}\right|d\xi\le\frac{C}{|\lambda|}$. Теперь имеем при $s=1$

$$|J_1|\le C\int_0^t\max_{\mathcal{D}}|f_{js}|d\tau\int_0^\infty e^{-(t-\tau)\frac12|\lambda|^2}d|\lambda|<C\max_{\mathcal{D}}|f_{js}|\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty e^{-y^2}dy=C\max_{\mathcal{D}}|f_{js}|\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{t}.$$

Для проверки равномерной сходимости интеграла J_1 рассмотрим при большом R интеграл

$$J_{IR}=C\max_{\mathcal{D}}|f_{js}|\int_0^t d\tau\int_R^\infty e^{-(t-\tau)\frac12|\lambda|^2}d|\lambda|<\frac{C\max|f_{js}|}{\sqrt{2}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{R\sqrt{\frac{t-\tau}{2}}}^\infty e^{-y^2}dy.$$

На основании леммы 1 $\int\limits_{R\sqrt{\frac{t-\tau}{2}}}^\infty e^{-y^2}dy\le\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{R^2(t-\tau)}{2}}$. Следовательно,

$$J_{IR}<C\max|f_{js}|\int_0^t\frac{e^{-\frac{R^2(t-\tau)}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=\frac{2\sqrt{2}C\max|f_{js}|}{R}\int_0^{R\sqrt{\frac{t}{2}}}e^{-y^2}dy\le\frac{C\max|f_{js}|}{R}\sqrt{2\pi}$$

и J_{IR} можно сделать как угодно малым, выбирая большое R. Таким образом, обоснована абсолютная и равномерная сходимость интеграла J_1. В случае J_0 действуем подобным же образом:

$$J_0 = \int\limits_{\left(\substack{|\lambda|=H \\ |\arg\lambda|\le\frac{\pi}{3}}\right)} e^{\lambda^2(t-\tau)}d\lambda \int\limits_0^1 e^{-\lambda\left|\int\limits_\xi^x \varphi d\zeta\right|} \eta_{ij}(\xi)d\xi \int\limits_0^t f_{js}(\tau,\xi,v,w)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\left(\substack{|\lambda|=H \\ |\arg\lambda|\le\pm\frac{\pi}{3}}\right)} e^{\lambda^2(t-\tau)}d\lambda \int\limits_0^1 e^{-\lambda\left|\int\limits_\xi^x \varphi d\zeta\right|} \eta_{ij}(\xi)d\xi \int\limits_0^t f_{js}(\tau,\xi,v,w)d\tau.$$

Используя полученные выше оценки, найдем

$$|J_0| \le C_1 t \max_{\mathcal{D}} |f_{js}| + C_2 \int_0^t \max_{\mathcal{D}} |f_{js}| d\tau \int_H^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)|\lambda|^2}}{|\lambda|} d|\lambda| =$$

$$= C_1 t \max_{\mathcal{D}} |f_{js}| + C_2 \max_{\mathcal{D}} |f_{js}| \int_0^t d\tau \int_{H\sqrt{\frac{t-\tau}{2}}}^\infty \frac{e^{-y^2}}{y} dy \le$$

$$\le C_1 t \max_{\mathcal{D}} |f_{js}| + C_2 \max_{\mathcal{D}} |f_{js}| \int_0^t \left(\ln H \sqrt{\frac{t-\tau}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) d\tau$$

и оценка для J_0 очевидна. Такие же рассуждения проводятся для оценок I_1 и I_0. Аналогично устанавливается

Лемма 3. *Интегралы вида*

$$\int_L \lambda^s e^{\lambda^2(t-\tau)} d\lambda \int_0^1 e^{-\lambda\left(\int\limits_0^\xi \varphi_k d\zeta + \int\limits_0^x \varphi_l d\zeta\right)} \varepsilon_{sj}(x,\xi,\lambda)d\xi \int_0^t f_{sj}(\tau,\xi,v,w)d\tau$$

покомпонентно сходятся абсолютно и равномерно по $(\alpha, 1]$, $\alpha > 0$ *и* $t \in (0,T)$ *при любом* $s \in \mathbb{Z}$.

Интегралы вида

$$\int_L \lambda^s e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^1 e^{-\lambda\left|\int\limits_\xi^x \varphi d\zeta\right|} \eta_{ij}(\xi)d\xi, \quad \int_L \lambda^s e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^1 \varepsilon_{ij}(x,\xi,\lambda) e^{-\lambda\left(\int\limits_0^\xi \varphi_k d\zeta + \int\limits_0^x \varphi_l d\zeta\right)} c(\xi)\psi(\xi)d\xi$$

покомпонентно и равномерно сходятся по $t \in [t_0, T]$, $t_0 > 0$, $0 < x < 1$, $s \in \mathbb{Z}$.

Лемма 4. *Задача* (1)–(3) *при* $f \equiv 0$ *и при условиях* 1, 2, 4, 5 *имеет единственное бесконечно дифференцируемое по* t *при* $0 < t \le T$, $0 < x < 1$, *классическое решение, представимое в виде*

$$\Phi(t,x) = -\frac{1}{\pi i} \int_L \lambda e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)c(\xi)\psi(\xi)d\xi. \tag{24}$$

Доказательство. Выполняя дифференцирование под знаком интегралов, что возможно на основании лемм 1, 3, найдем

$$c(x)\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\pi i}\int_L \lambda^3 e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^1 c(x)G(x,\xi,\lambda)c(\xi)\psi(\xi)d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_L \lambda e^{\lambda^2 t} d\lambda \left(\int_0^1 \lambda^2 c(x)G(x,\xi,\lambda)c(\xi)\psi(\xi)d\xi + \psi(x) \right) = 0,$$

$0 < x < 1$, $t > 0$. При дифференцировании по x мы воспользовались свойством 2° матрицы Грина (см. теорему 2). Далее, $\lim\limits_{t\to 0}\Phi(t,x) = \psi(x)$ согласно теореме 4. Очевидно также выполнение условия (2).

5. Интегральные уравнения и вспомогательные утверждения

Теорема 5. *Всякое решение* $v(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *служит первой компонентой решения системы интегральных уравнений*

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \Phi(t,x) - \frac{1}{\pi i}\int_L \lambda\, d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)d\xi \int_0^t f(t,\xi,v,w)e^{\lambda^2(t-\tau)}d\tau, \\ w(t,x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{\pi i}\int_L \lambda\, d\lambda \int_0^1 G'_x(x,\xi,\lambda)d\xi \int_0^t f(t,\xi,v,w)e^{\lambda^2(t-\tau)}d\tau, \end{aligned} \tag{25}$$

где $\Phi(t,x)$ — *решение* (24) *задачи* (1)–(3) *при* $f \equiv 0$.

Доказательство. Обе части равенства $\frac{\partial v e^{-\lambda^2\tau}}{\partial \tau} = \frac{\partial v}{\partial \tau}e^{-\lambda^2\tau} - \lambda^2 v e^{-\lambda^2\tau}$ для решения v задачи (1)–(3) проинтегрируем по τ от 0 до t и согласно (1) получим

$$v(t,\xi) = \psi(\xi)e^{\lambda^2 t} + \int_0^t \left(c^{-1}(\xi)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \lambda^2 v\right)e^{\lambda^2(t-\tau)}d\tau + \int_0^t c^{-1}(\xi) f\left(\tau,\xi,v(\tau,\xi),\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)e^{\lambda^2(t-\tau)}d\tau.$$

Применив к обеим частям этого соотношения оператор левой части формулы (22), найдем

$$\begin{aligned} v(t,x) = &-\frac{1}{\pi i}\int_L \lambda e^{\lambda^2 t}d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)c(\xi)\psi(\xi)d\xi - \\ &- \frac{1}{\pi i}\int_L \lambda\, d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)d\xi \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} f\left(\tau,\xi,v,\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)d\tau - \\ &- \frac{1}{\pi i}\int_L d\tau \int_L \lambda e^{\lambda^2(t-\tau)}d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \lambda^2 c(\xi)\right)v\, d\xi. \end{aligned} \tag{26}$$

Согласно леммам 2, 3 и формулам (17), (20) имеет место равномерная сходимость интегралов в формуле (26). Так как оператор $\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\ldots d\xi$ обратен оператору $\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \lambda^2 c(\xi)$, получим, что последний интеграл в правой части (26) равен $-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^t v(\tau,x)d\tau \int\limits_L \lambda e^{\lambda^2(t-\tau)}d\lambda = 0$.

Приходим к тому, что v служит решением интегродифференциального уравнения

$$v(t,x) = \Phi(t,x) - \frac{1}{\pi i}\int_L \lambda\, d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)d\xi \int_0^t f\left(\tau,\xi,v,\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)e^{\lambda^2(t-\tau)}d\tau. \tag{27}$$

Вводя обозначение $\frac{\partial v}{\partial \xi} \equiv w(t,\xi)$ и дифференцируя по x обе части (27), придем к системе (25). Дифференцировать по параметру x под знаком интеграла можно ввиду лемм 2, 3.

Определение. Пусть $(v(t,x), w(t,x))$ — решение системы интегральных уравнений (25). Функцию $v(t,x)$ назовем обобщенным решением задачи (1)–(3). При этом $w = \frac{\partial v}{\partial x}$.

Теорема 6. *Задача* (1)–(3) *при условиях* 1)–5) § 1 *имеет единственное обобщенное решение в области* $\mathcal{D}(T)$.

Доказательство. Согласно теореме 5 достаточно установить однозначную разрешимость в $\mathcal{D}(T)$ системы (25). Из леммы 2 и формул (17), (20) следует, что интегральные операторы $A(v,w)$, $B(v,w)$ правых частей системы (25) имеют оценки

$$\max(\|A(v,w)\|, \|B(v,w)\|) \le C \max_{\mathcal{D}(T)} \|f\|\sqrt{t}. \tag{28}$$

Покажем, что оператор правой части системы (25) является оператором сжатия в пространстве $\mathcal{D}(t_0)$ при малом t_0. Это приводит к оценке тех же выражений A, B с той лишь разницей, что в них вместо f поставлена разность

$$\Delta(v_1,w_1;v_2,w_2) \equiv f(\tau,\xi,v_1(\tau,\xi),w_1(\tau,\xi)) - f(\tau,\xi,v_2(\tau,\xi),w_2(\tau,\xi)),$$

где v_1, v_2, w_1, w_2 — любые функции из $\mathcal{D}(t_0)$. По теореме о конечных приращениях ([6], с. 249) имеет место оценка

$$\|\Delta(v_1, w_1; v_2, w_2)\| \leq M \max(|v_1 - v_2|, |w_1 - w_2|), \tag{29}$$

где $M = \max\limits_{\mathcal{D}(T)} \left(\|\frac{\partial f}{\partial v}\|, \|\frac{\partial f}{\partial w}\|\right)$. Из (28), (29) следует оценка

$$\max(\|A(v_1 - v_2, w_1 - w_2)\|, \|B(v_1 - v_2, w_1 - w_2)\|) \leq C \max(|v_1 - v_2|, |w_1 - w_2|)\sqrt{t_0},$$

показывающая, что интегральный оператор системы (25) является оператором сжатия в пространстве $\mathcal{D}(t_0)$ при достаточно малых t_0, что доказывает существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(3) в $\mathcal{D}(t_0)$. Найденное решение может быть продолжено на $[t_0, 2t_0]$, если не вышли из области определения функции f. Для осуществления указанного продолжения следует принять за начальный момент $t = t_0$, а за начальную функцию — значение уже построенного решения v при $t = t_0$. Такими продолжениями можно построить решения системы (25) на всем пространстве $\mathcal{D}(T)$.

В заключение рассмотрим частный случай задачи (1)–(3), когда правая часть системы (1) не зависит от $\frac{\partial v}{\partial x}$. Тогда интегродифференциальное уравнение (27) обращается в интегральное матричное уравнение

$$v(t,x) = \Phi(t,x) - \frac{1}{\pi i}\int_L \lambda\, d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)d\xi \int_0^1 f(t,\xi,v)e^{\lambda^2(t-\tau)}d\tau. \tag{30}$$

Уже нетрудно установить, что решение v уравнения (30) служит классическим решением задачи (1)–(3). Для этого следует показать возможность введения операторов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ под знаки интегралов в (30). Прежде всего при дифференцировании по x под знаком интеграла в (30) по формулам (17), (20) приходим к интегралам из леммы 2, сходящимся равномерно при $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T$. Взятие второй производной по x под знаком интеграла приведет к дополнительному множителю λ под знаком интеграла. Интегрированием по частям по ξ придем к ситуации интегралов леммы 2. Аналогично получим интегралы по λ и τ, происходящие от внеинтегральных слагаемых и сходящиеся равномерно по $0 < x < 1$, $0 \leq t \leq T$. Таким образом, доказана

Теорема 7. *В случае, когда нелинейная часть f в уравнении* (1) *не зависит от $\frac{\partial v}{\partial x}$, обобщенное решение задачи* (1)–(3) *является классическим.*

Литература

1. Вагабов А.И. *Обобщенный метод Фурье решения смешанных задач для нелинейных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 1. – С. 90–100.
2. Вагабов А.И. *Задача о колебании конечной струны с нелинейным возмущением* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 3. – С. 17–21.
3. Акрамов Т.А., Вишневский М.П. *Некоторые качественные свойства системы реакция–диффузия* // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36. – № 1. – С. 3–19.
4. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969. – 526 с.
5. Tamarkin J. *Some general problems of ordinary linear differential equations and expansion of arbitrary function in series of fundamental functions* // Math. Zs. – 1923. – V. 27. – P. 1–54.
6. Шварц Л. *Анализ.* –М.: Мир, 1972. – 824 с.

Дагестанский государственный университет

Поступили
первый вариант 12.04.2004
окончательный вариант 25.07.2005