ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 9 (532)

УДК 517.956

С.А. АЛДАШЕВ

ЗАДАЧИ ДАРБУ–ПРОТТЕРА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Задачи Дарбу на плоскости для линейных гиперболических уравнений хорошо изучены [1], [2]. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены в [3]. Из-за отсутствия эффективных методов исследования задач Дарбу–Проттера для многомерных гиперболических уравнений требуется их дополнительное изучение. В этом направлении мало работ (см. [4]). С использованием изложенного в [4] метода в данной работе исследованы взаимно сопряженные задачи Дарбу–Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений.

1. Постановки задач и основные результаты. Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\dots,x_m,t)$, ограниченная поверхностями $|x| = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi + \varepsilon$, $|x| = 1 - \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$ и плоскостью $t = 0$, $0 \le t \le t_0$; $t_0 : \frac{1-\varepsilon}{2} = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1,\dots,x_m)$, а $0 \le \varepsilon < 1$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S соответственно.

В области D_ε рассмотрим взаимно сопряженные вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения

$$g(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

$$g(t)\Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^m a_i v_{x_i} - bv_t + dv = 0, \tag{1*}$$

где $g(t) > 0$ при $t > 0$ и $g(0) = 0$, $g(t) \in C([0,t_0]) \cap C^2((0,t_0))$, $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^m a_{ix_i} - b_t$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,\dots,x_m$, $m \ge 2$.

Уравнения (1) встречаются при математическом моделировании процессов взрыва горных пород [5], [6].

Исследуются

Задача 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x), \quad u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x) \tag{2}$$

или

$$u_t|_S = \nu(x), \quad u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x). \tag{3}$$

Задача 2. Найти в области D_ε решение уравнения (1^*) из класса $C^1(\overline{D}_\varepsilon)\cap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_S = \tau(x), \quad v|_{S_1} = \sigma_1(x) \tag{4}$$

или

$$v_t|_S = \nu(x), \quad v|_{S_1} = \sigma_1(x). \tag{5}$$

В дальнейшем перейдем от декартовых координат $x_1,\dots,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,\dots,\theta_{m-1}$, t, сохранив обозначения из [4], [7].

Пусть Ω_ε — проекция области D_ε на плоскости (r,t) с границами $\Gamma_\varepsilon : r = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi+\varepsilon$, $\Gamma_1 : r = 1-\int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$ и $\Gamma : t=0$, $\varepsilon\le r\le 1$.

Пусть далее $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\le k\le k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_{m-1})$, $W^l_2(D_\varepsilon)$, $l=0,1,\dots,$ — пространства Соболева, а $\widetilde{S}=\{(r,\theta)\in S,\ \varepsilon<r<(1+\varepsilon)/2\}$. Введем множество функций

$$B^l_1(S)=\Big\{f(r,0): f\in W^l_2(S),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}(\|f^k_n(r)\|^2_{C^3((\varepsilon,1))}+\|f^k_n(r)\|^2_{C^1([\varepsilon,1])})\exp 2(n^2+n(m-2))<\infty,\ l\ge m-1\Big\}.$$

Если $a_i(x,t),b(x,t),c(x,t)\in W^l_2(D_\varepsilon)$, $i=1,\dots,m$, $l\ge m+1$, то имеет место

Теорема 1. 1) *Пусть $\varepsilon=0$ и $\tau(r,\theta)=r^3\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)=r^3\nu^*(r,\theta)$,*

$$\sigma_0(r,\theta)=r^2\sigma^*_0(r,\theta), \quad \tau^*(r,\theta),\nu^*(r,\theta)\in B^l_1(S), \quad \sigma^*_0(r,\theta)\in B^l_1(\widetilde{S}).$$

Тогда задача 1 имеет бесчисленное множество решений.

2) *Если $\varepsilon>0$ и $\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)\in B^l_1(S)$, $\sigma_\varepsilon(r,\theta)\in B^l_1(\widetilde{S})$, то задача 1 однозначно разрешима.*

Теорема 2. 1) *Пусть $\varepsilon=0$ и $\tau(r,\theta)=r^4\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)=r^4\nu^*(r,\theta)$, $\sigma_1(r,\theta)=(r-\frac12)^{(m+5)/2}\sigma^*_1(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta),\nu^*(r,\theta)\in W^l_2(S)$, $\sigma^*_1(r,\theta)\in W^l_1(S\setminus\widetilde{S})$, $l>(6+3m)/2$.*

2) *Пусть $\varepsilon>0$ и $\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)\in B^l_1(S)$, $\sigma_1(r,\theta)\in B^l_1(S\setminus\widetilde{S})$. Тогда задача 2 имеет единственное решение.*

При $g(t)=t^p$, $p=\mathrm{const}\ge 0$, эти теоремы установлены в [4], [7], [8].

Через $\widetilde{a}^k_{in}(r,t)$, $\widehat{a}^k_{in}(r,t)$, $\widetilde{b}^k_n(r,t)$, $\widetilde{c}^k_n(r,t)$, $\widetilde{d}^k_n(r,t)$, ρ^k_n, $\overline{\tau}^k_n(r)$, $\overline{v}^k_n(r)$, $\overline{\sigma}^k_{\varepsilon n}(r)$, $\overline{\sigma}^k_{1n}(r)$ обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y^k_{n,m}(\theta)$ соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i\frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $\tau(r,\theta)$, $v(r,\theta)$, $\sigma_\varepsilon(r,\theta)$, $\sigma_1(r,\theta)$, $i=1,\dots,m$.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $\varepsilon\ge 0$. Для задачи 1 в [9], [10] получен следующий критерий единственности решения: решение однородной задачи 1 $u(x,t)\equiv 0\Leftrightarrow\varepsilon>0$.

Теперь покажем разрешимость задачи 1. Ее решение в сферических координатах будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}^k_n(r,t)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже. Тогда, как и в [4], [7], для $\overline{u}_n^k$ получим ряд

$$g(t)\rho_0^1\overline{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\overline{u}_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1+\sum_{i=1}^m\widehat{a}_{i0}^1\right)\overline{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\overline{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\overline{u}_0^1+$$
$$+\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^kg(t)\overline{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+\left(\frac{m-1}{r}\rho_n^kg(t)+\sum_{i=1}^m\widehat{a}_{in}^1\right)\overline{u}_{nr}^k+\widetilde{b}_n^k\overline{u}_{nt}^k+\right.$$
$$\left.+\left[\widetilde{c}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}g(t)+\sum_{i=1}^m(\widetilde{a}_{in}^k-n\widehat{a}_{in}^k)\right]\overline{u}_n^k\right\}=0,\quad \lambda_n=n(n+m-2). \quad (7)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_0^1\overline{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\overline{u}_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1\overline{u}_{0r}^1=0, \quad (8)$$

$$\rho_1^kg(t)\overline{u}_{1rr}^k-\rho_1^k\overline{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_1^kg(t)\overline{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^kg(t)\overline{u}_1^k=$$
$$=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m\widehat{a}_{i0}^1\overline{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\overline{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\overline{u}_0^1\right),\quad n=1,\quad k=\overline{1,k_1}, \quad (9)$$

$$\rho_n^kg(t)\overline{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_n^kg(t)\overline{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_n^kg(t)\overline{u}_n^k=$$
$$=-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m\widehat{a}_{in-1}^1\overline{u}_{n-1r}^1+\widetilde{b}_{n-1}^1\overline{u}_{n-1t}^1+\left[\widetilde{c}_{n-1}^1+\sum_{i=1}^m(\widehat{a}_{in-2}^1-(n-1)\widetilde{a}_{in-1}^1)\right]\overline{u}_{in-1}^1\right\}, \quad (10)$$

$k=\overline{1,k_1}$, $n=2,3,\ldots$

Нетрудно показать, что если $\{\overline{u}_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots,$ — решение системы (8)–(10), то оно является и решением уравнения (7).

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ ([11], с. 81), из краевого условия (2) в силу (6) будем иметь

$$\overline{u}_n^k(r,t)|_\Gamma=\overline{\tau}_n^k(r),\quad \overline{u}_n^k(r,t)|_{\Gamma_\varepsilon}=\overline{\sigma}_{\varepsilon n}^k(r),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=1,2,\ldots \quad (11)$$

Таким образом, задача (1), (2) сведена к системе задач Дарбу в области Ω_ε для уравнений (8)–(10).

Найдем решения этих задач. Каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$g(t)\overline{u}_{nrr}^k-\overline{u}_{ntt}^k+\frac{(m-1)g(t)}{r^2}\overline{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_ng(t)}{r^2}\overline{u}_n^k=f_n^k(r,t), \quad (12)$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r,t)\equiv 0$. Произведя в (12) замену переменных $\overline{u}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}v_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r$, $y=\frac{3}{2}\Big(\int\limits_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi\Big)^{\frac{2}{3}}$, получим

$$yv_{nrr}^k-v_{nyy}^k+\frac{\overline{\lambda}_ny}{r^2}v_n^k-b(y)v_{ny}^k=\overline{f}_n^k(r,y), \quad (13)$$
$$\lambda_n=\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4},\quad b(y)=\frac{1}{2g}\left[\frac{dg}{dy}-\frac{g}{y}\right],\quad \overline{f}_n^k(r,y)=r^{(m-1)/2}\frac{f_n^k(r,t)}{y^2}.$$

Полагая $v_n^k = w_n^k \exp\Big[-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(\xi)d\xi\Big]$, уравнение (13) приводим к виду

$$yw_{nrr}^k - w_{nyy}^k + \frac{\overline{\lambda}_n y}{r^2} w_n^k = c(y) w_n^k + \overline{f}_n^k(r,y), \tag{14}$$
$$c(y) = -\frac{1}{4}(b^2 + 2b'_y) \in C \quad (y>0), \quad \widetilde{f}_n^k(r,y) = \overline{f}_n^k(r,y)\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^y b(\xi)d\xi\right].$$

Уравнение (14), в свою очередь, с помощью замены переменных $r = r$, $x_0 = \frac{2}{3}y^{3/2}$ преобразуем в уравнение

$$w_{nrr}^k - w_{nx_0x_0}^k - \frac{1}{3x_0} w_{nx_0}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} w_n^k = g_n^k(r,x_0), \tag{15}$$
$$g_n^k(r,x_0) = \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \left\{ \widetilde{f}_n^k\left[r, \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] + c\left[\left(\frac{3}{2}x_0\right)^{\frac{2}{3}}\right] w_n^k\left[r, \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}.$$

При этом краевое условие (11) запишется в виде

$$w_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \quad w_n^k(r, r-\varepsilon) = \sigma_{\varepsilon n}^k(r), \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{16}$$
$$\tau_n^k(r) = r^{(m-1)/2}\overline{\tau}_n^k(r), \quad \sigma_{\varepsilon n}^k(r) = r^{(m-1)/2}\overline{\sigma}_{\varepsilon n}^k(r), \quad \varepsilon \le r \le 1.$$

Наряду с уравнением (15) рассмотрим

$$L_\alpha w_{\alpha,n}^k \equiv w_{\alpha,nrr}^k - w_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0} w_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} w_{\alpha,n}^k = g_{\alpha,n}^k(r,x_0), \tag{17}$$
$$L_0 w_{0,n}^k \equiv w_{0,nrr}^k - w_{0,nx_0x_0}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} w_{0,n}^k = g_{0,n}^k(r,x_0), \tag{18}$$
$$g_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha}\left\{\widetilde{f}_n^k\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right] + c\left[\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right] w_{\alpha,n}^k\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\right\},$$

$g_{0,n}^k(r,x_0) = \widetilde{f}_n^k(r,x_0) + c(x_0)w_{0,n}^k(r,x_0)$, $0 < \alpha = \mathrm{const} < 1$.

Уравнение (15) совпадает с (17) при $\alpha = \frac{1}{3}$.

Как доказано в ([12], с. 17; см. также [4]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (17) и (18).

1. Если $w_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (18), удовлетворяющее условию

$$w_{0,n}^{k,1}(r,0) = \tau_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_0} w_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{19}$$

то функция

$$w_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 w_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi \equiv 2^{-1}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) x_0^{1-\alpha} D_{0x_0^2}^{-\alpha/2}\left[\frac{w_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{20}$$

при $\alpha > 0$ есть решение уравнения (17) с данными (19).

2. Если $w_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ является решением задачи Коши для уравнения (18), удовлетворяющим условиям

$$w_{0,n}^{k,1}(r,0) = \frac{v_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\cdots(2q+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} w_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0,$$

то при $0 < \alpha < 1$ функция

$$w^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0) = \gamma_{2-\alpha+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q \left[x^{1-\alpha+2q}\int_0^1 w^{k,1}_{0,n}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\alpha}d\xi\right] \equiv$$

$$\equiv \gamma_{2-\alpha+2q}2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D^{\frac{\alpha}{2}-1}_{0x_0^2}\left[\frac{w^{k,1}_{0,n}(r,x_0)}{x_0}\right] \quad (21)$$

является решением уравнения (17) с данными

$$w^{k,2}_{\alpha,n}(r,0) = 0, \quad \lim_{x_0\to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} w^{k,2}_{\alpha,n} = v^k_n(r),$$

где $\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha = 2\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, D^α_{0t} — оператор Римана–Лиувилля [2], а $q \geq 0$ — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q \geq m+1$.

При этом функции $g^k_{\alpha,n}(r,x_0)$, $g^k_{0,n}(r,x_0)$ связаны формулами (20) в случае связи 1 и (21) в случае связи 2.

Теперь будем решать задачу (17), (16). Ее решение ищем в виде

$$w^k_{\alpha,n}(r,x_0) = w^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0) + w^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0),$$

где $w^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0)$ — решение задачи Коши (17), (19), а $w^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0)$ — решение задачи Дарбу для уравнения

$$L_\alpha w^{k,2}_{\alpha,n} = \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha} c\left(\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right)\omega^{k,2}_{\alpha,n} \quad (22)$$

с условием

$$w^{k,2}_{\alpha,n}(r,0) = 0, \quad w^{k,2}_{\alpha,n}(r,r-\varepsilon) = \sigma^k_{\varepsilon n}(r) - w^{k,1}_{\alpha,n}(r,r-\varepsilon), \quad \varepsilon \leq r \leq 1. \quad (23)$$

Учитывая формулы (20), (21), а также обратимость оператора D^α_{0t} ([2]), задачи (17), (19) и (22), (23) соответственно сводим к задаче (18), (19) и к задаче Дарбу для уравнения

$$L_0 w^{k,1}_{0,n} = c(x_0)\omega^{k,1}_{0,n} \quad (24)$$

с данными

$$\frac{\partial}{\partial x_0} w^{k,1}_{0,n}(r,0) = 0, \quad w^{k,1}_{0,n}(r,r-\varepsilon) = \varphi^k_{\varepsilon n}(r), \quad (25)$$

где $\varphi^k_{\varepsilon n}(r)$ — функция, выражающаяся через $\tau^k_n(r)$, $\sigma^k_{\varepsilon n}(r)$.

Задача Коши (18), (19) при $\varepsilon = 0$ аналогично [13], и при $\varepsilon > 0$ аналогично [14], сводится к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. Следовательно, и задача Коши (17), (19), также однозначно разрешима.

Если $\varepsilon = 0$, то задача Дарбу (24), (25) имеет бесчисленное множество решений [4], [7], а при $\varepsilon > 0$ — единственное решение [4].

Таким образом, сначала решив задачу (8), (11) ($n = 0$), а затем (9), (11) ($n = 1$) и т.д., найдем последовательно все $\overline{u}^k_n(r,t)$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots$

Далее, как и в [7], [10], доказывается, что функция (6) принадлежит классу $C^1(\overline{D}_\varepsilon)\cap C^2(D_\varepsilon)$, является решением задачи (1), (2), где $\overline{u}^k_n(r,t)$ определяются из двумерных задач Дарбу.

Теорема 1 для задачи (1), (2) доказана.

Справедливость этой теоремы для задачи (1), (3) с использованием результатов [4], [7] устанавливается аналогично.

3. Доказательство теоремы 2. Единственность решения задачи 2 доказана в [9], [10]. Теперь покажем ее разрешимость. Сначала рассмотрим задачу (1*), (4). Ее решение будем искать в виде ряда (6). Тогда, как в случае задачи (1), (2), функции $\overline{v}_n^k(r,t)$ будут удовлетворять системе уравнений (8)–(10), где $\widehat{a}_{in}^k$, $\widetilde{a}_{in}^k$, $\widetilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-\widehat{a}_{in}^k$, $-\widetilde{a}_{in}^k$, $-\widetilde{b}_n^k$, а $\widetilde{c}_n^k$ на d_n^k, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$

Из краевого условия (4) имеем

$$\overline{v}_n^k(r,t)|_\Gamma = \overline{\tau}_n^k(t), \quad \overline{v}_n^k(r,t)|_{\Gamma_1} = \overline{\sigma}_{1n}^k(r), \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\dots \tag{26}$$

Далее рассмотрим уравнение (15), к которому сводится (8)–(10), при этом условия (26) запишутся в виде

$$w_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \quad w_n^k(r,1-r) = \sigma_{1n}^k(r), \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\dots, \tag{27}$$
$$\sigma_{1n}^k(r) = r^{(m-1)/2}\sigma_{1n}^k(r).$$

Теперь рассмотрим задачу (17), (27). Ее решение будем искать в виде $w_{\alpha,n}^k(r,x_0) = w_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)+w_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$, где $w_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши (17), (19), а $w_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ — решение задачи Дарбу для уравнения (22) с данными

$$w_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0, \quad w_{\alpha,n}^{k,2}(r,1-r) = \sigma_{1n}^k(r) - w_{\alpha,n}^{k,1}(r,1-r), \quad \varepsilon \le r \le 1. \tag{28}$$

Нетрудно заметить, что, используя формулы (20), (21), задачи (17), (19) и (22), (28) можно свести соответственно к задаче Коши (18), (19) и к задаче Дарбу для (24) с условием

$$\frac{\partial}{\partial x_0} w_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \quad w_{0,n}^{k,1}(r,1-r) = \psi_{\varepsilon n}^k(r), \tag{29}$$

где $\psi_{\varepsilon n}^k(r)$ — функция, выражающаяся через $\tau_n^k(r)$, $\sigma_{1n}^k(r)$.

В § 2 однозначная разрешимость задачи Коши (18), (19) доказана.

В [4] показано, что при $\varepsilon \ge 0$ задача (24), (29) имеет единственное решение.

Следовательно, учитывая (19)–(21), найдем последовательно решения задач (8), (26) ($n=0$), (9), (26) ($n=1$) и (10), (26) ($n=2,3,\dots$).

Таким образом, функция вида (6) является решением задачи (1*), (4), и как в [7], [10], принадлежит искомому классу.

Теорема 2 для задачи (1*), (4) доказана. Ее справедливость для задачи (1*), (5) устанавливается аналогично.

Отметим, что теорема 1 при выполнении многомерных условий Проттера и Геллерстедта доказана в [15], [16], а при более "жестких" условиях на коэффициент уравнения — в [17].

Замечание. В теоремах принадлежность заданных функций $\tau(r,\theta), v(r,\theta) \in B_1^l(S)$, $\sigma_\varepsilon(r,\theta) \in B_1^l(\widetilde{S})$, $\sigma_1(r,\theta) \in B_1^l(S \setminus \widetilde{S})$ существенна. Как показывают примеры, построенные в [4], при нарушении этого условия, решения искомых задач даже для многомерного волнового уравнения могут не существовать.

Литература

1. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* – М.: Высш. школа, 1995. – 310 с.
3. Protter M.N. *New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type* // J. Rational Mech. and Anal. – 1954. – V. 3. – № 4. – P. 435–446.
4. Алдашев С.А. *Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений.* – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
5. Алдашев С.А., Ким Н.Х. *Математическая модель процесса промышленного взрыва в осесимметрическом случае* // Докл. НАН РК. – 2001. – № 2. – С. 5–7.

6. Алдашев С.А., Атабай Б.Ж. *Математическое моделирование процесса взрыва горных пород* // Тр. межд. конф.: Современ. проблемы мех. Ч. 2. Общая и прикладная механика. – Алматы: КазНУ, 2001. – С. 25–27.
7. Алдашев С.А. *О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 1. – С. 64–68.
8. Нуржанов Ш.Т. *Задачи Дарбу–Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Алматы, 2000. – 67 с.
9. Алдашев С.А. *Критерий единственности решения задачи Дарбу–Проттера для многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина* // Докл. НАН РК, Алматы. – 2002. – Т. 6. – С. 50–52.
10. Алдашев С.А. *Критерий единственности решения задачи Дарбу–Проттера для многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина* // Укр. матем. журн. – 2004. – Т. 56. – № 8. – С. 1119–1127.
11. Михлин С.Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
12. Терсенов С.А. *Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе.* – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1973. – 143 с.
13. Алдашев С.А. *Спектральные задачи Дарбу–Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений* // Укр. матем. журн. – 2003. – Т. 55. – № 1. – С. 100–107.
14. Алдашев С.А. *Некоторые задачи для многомерного интегро-дифференциального гиперболического уравнения* // Укр. матем. журн. – 2000. – Т. 52. – № 5. – С. 590–595.
15. Алдашев С.А. *О многомерных задачах Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 12. – С. 2097–2103.
16. Алдашев С.А. *О корректности задач Дарбу для многомерных вырождающихся гиперболических уравнений* // Доклады НАН РК. – 1993. – № 5. – С. 3–5.
17. Алдашев С.А. *Некоторые краевые задачи для многомерных гиперболических уравнений второго порядка* // Алгебра и матем. анализ. – Новосибирск: НГУ, 1990. – С. 66–74.

*Казахская академия транспорта
и коммуникаций*

Поступила
01.01.2005