Известия вузов. Математика
2016, №1, с. 3–13

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С.Н. КИЯСОВ

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВЕКТОРА ПРИ ИЗВЕСТНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ

Аннотация. Предложен метод построения канонической системы решений задачи линейного сопряжения для двумерного вектора при наличии одного частного решения задачи.

Ключевые слова: матрица-функция, задача линейного сопряжения, каноническая система решений, факторизация.

УДК: 517.544

Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- ($0 \in D^+$, $\infty \in D^-$),

$$G_n(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & \dots & g_{1n}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & \dots & g_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}(t) & g_{n2}(t) & \dots & g_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

— H-непрерывная и неособенная на Γ матрица-функция порядка n ($\Delta(t) = \det G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$). Однородная задача линейного сопряжения для n-мерного вектора состоит в отыскании кусочно-аналитической вектор-функции

$$\mathbf{w}(z) = \big(w^1(z), w^2(z), \dots, w^n(z)\big)$$

с H-непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^{\pm}(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G_n(t)\mathbf{w}^-(t). \tag{2}$$

Качественная теория задачи (2) в классах гёльдеровских функций изложена в [1]. Однако, имеется сравнительно немного примеров матриц-функций, для которых решение задачи может быть записано в замкнутой форме — запись решения задачи в интегралах типа Коши и решения определенного числа линейных алгебраических систем. Одним из таких примеров служит решение задачи линейного сопряжения для мероморфных матриц-функций в работе [2]. В [3] доказана возможность построения *канонической системы решений* ([1], с. 30) задачи линейного сопряжения для двумерного вектора, если известно одно частное кусочно-мероморфное решение задачи без нулей и полюсов на контуре и выделены классы задач, разрешимых в замкнутой форме. Сам алгоритм построения канонической системы решений сводился к решению пяти скалярных задач линейного сопряжения и определенного числа линейных алгебраических систем, которые появлялись, если требовалось удовлетворять условиям разрешимости этих задач. В работе [4] приведен метод построения канонической системы решений задачи линейного сопряжения для трехмерного вектора,

Поступила 02.04.2015

если известны два кусочно-аналитических в конечной части плоскости решения

$$\mathbf{w}_1(z) = \big(w_1^1(z), w_1^2(z), w_1^3(z)\big)\,, \quad \mathbf{w}_2(z) = \big(w_2^1(z), \quad w_2^2(z), w_2^3(z)\big) \tag{3}$$

задачи (2) с матрицей-функцией $G_3(t)$ (матрицей-функцией (1) для $n = 3$) порядков k_1 и k_2 на бесконечности, для которых разности

$$\begin{gathered} w_{ij}(z) = w_1^i(z)w_2^j(z) - w_1^j(z)w_2^i(z), \quad i,j = 1,2,3, \quad i \neq j, \quad w_{ij}(z) = -w_{ji}(z), \\ w_i^1(z)w_{23}(z) + w_i^2(z)w_{31}(z) + w_i^3(z)w_{12}(z) \equiv 0, \quad i = 1,2, \end{gathered} \tag{4}$$

при некоторых значениях индексов i, j не обращаются в нуль на контуре и в соответствующих областях конечной плоскости. Было отмечено, что общий случай может быть приведен к случаю

$$w_{12}^+(z) \neq 0, \quad z \in D^+ \cup \Gamma, w_{12}^-(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\} \tag{5}$$

при помощи перестановки компонент искомого решения и граничных условий (2) и записан вид функций канонической системы решений задачи при выполнении условий (5). Однако, такое приведение может усложнить окончательный вид полученных формул в связи с возможностью появления у разностей (5) нулей на контуре и в соответствующих областях.

В данной работе показано, что метод построения канонической системы решений задачи линейного сопряжения для трехмерного вектора, предложенный в работе [4], может быть применен для построения канонической системы решений задачи линейного сопряжения для двумерного вектора, если известно одно частное решение задачи. При таком подходе, на наш взгляд, не только значительно упрощаются теоретические выкладки, но и сам вид решений задачи линейного сопряжения становится более “прозрачным”.

Суть предлагаемого метода состоит в следующем. Пусть $\mathbf{w}(z) = \big(w^1(z), w^2(z)\big)$ — кусочно-аналитическое в конечной части плоскости решение задачи (2) с матрицей-функцией $G_2(t)$ (матрицей-функцией (1) для $n = 2$). Тогда $\mathbf{w}_1(z) = \big(w^1(z), w^2(z), q(z)\big)$, где $q(z)$ — полином, будет решением однородной задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & 0 \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \Gamma. \tag{6}$$

Так как вектор-функция $\mathbf{w}_2(z) = (0, 0, q_1(z))$ ($z \in D^\pm$, $q_1(z)$ — полином) является решением задачи (2) с матрицей-функцией (6), то вектор-функции $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ определяют совокупность двух решений этой задачи. Очевидно, если $\varkappa_1 \geq \varkappa_2$ и $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$ — *частные индексы* и *суммарный индекс* матрицы-функции $G_2(t)$, а

$$X_2(z) = \begin{pmatrix} x_{11}(z) & x_{12}(z) \\ x_{21}(z) & x_{22}(z) \end{pmatrix}$$

— *каноническая матрица* ([1], с. 31) задачи линейного сопряжения с матрицей функцией $G_2(t)$, то

$$X(z) = \begin{pmatrix} x_{11}(z) & x_{12}(z) & 0 \\ x_{21}(z) & x_{22}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

будет канонической матрицей задачи (2) с матрицей-функцией (6) и порядками столбцов на бесконечности $-\varkappa_1$, $-\varkappa_2$, 0 (частные индексы матрицы-функции (6), которые, вообще говоря, уже нельзя считать упорядоченными по убыванию, равны $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, 0).

С другой стороны, так как суммарный индекс матрицы-функции (6) равен $\varkappa$, то любая каноническая система решений задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией (6) имеет вид

$$\mathbf{v}_1(z) = \left(v_1^1(z), v_1^2(z), q_{-\varkappa_1}(z)\right), \quad \mathbf{v}_2(z) = \left(v_2^1(z), v_2^2(z), q_{-\varkappa_2}(z)\right),$$
$$\mathbf{v}_3(z) = (0, 0, c),$$

где $\widetilde{\mathbf{v}}_1(z) = \left(v_1^1(z), v_1^2(z)\right)$, $\widetilde{\mathbf{v}}_2(z) = \left(v_2^1(z), v_2^2(z)\right)$ — любая каноническая система решений задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией $G_2(t)$, c — постоянная, а $q_k(z)$ — произвольный полином степени k ($q_k(z) \equiv 0$, если $k < 0$). Так как для указанных решений $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ условия (5) не могут быть выполненными, будем предполагать, что для решений (3) задачи (2) с матрицей-функцией $G_3(t)$ реализуется один из следующих случаев:

$$w_{12}^+(z) \equiv 0, \quad w_{23}^+(z) \neq 0, \quad z \in D^+ \cup \Gamma, \quad w_{12}^-(z) \equiv 0, \quad w_{23}^-(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} w_{12}^+(z) \equiv 0, \quad w_{23}^+(z) \equiv 0, \quad w_{31}^+(z) \neq 0, \quad z \in D^+ \cup \Gamma, \\ w_{12}^-(z) \equiv 0, \quad w_{23}^-(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} w_{12}^+(z) \equiv 0, \quad w_{23}^+(z) \neq 0, \quad z \in D^+ \cup \Gamma, \\ w_{12}^-(z) \equiv 0, \quad w_{23}^-(z) \equiv 0, \quad w_{31}^-(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}; \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} w_{12}^+(z) \equiv 0, \quad w_{23}^+(z) \equiv 0, \quad w_{31}^+(z) \neq 0, \quad z \in D^+ \cup \Gamma, \\ w_{12}^-(z) \equiv 0, \quad w_{23}^-(z) \equiv 0, \quad w_{31}^-(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}. \end{gathered} \tag{10}$$

Запишем задачу линейного сопряжения (2) с матрицей-функцией $G_3(t)$ в скалярной форме:

$$\begin{aligned} w^{1+}(t) &= g_{11}(t)w^{1-}(t) + g_{12}(t)w^{2-}(t) + g_{13}(t)w^{3-}(t), \\ w^{2+}(t) &= g_{21}(t)w^{1-}(t) + g_{22}(t)w^{2-}(t) + g_{23}(t)w^{3-}(t), \\ w^{3+}(t) &= g_{31}(t)w^{1-}(t) + g_{32}(t)w^{2-}(t) + g_{33}(t)w^{3-}(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Пусть

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_1(z) = \left(v_1^1(z), v_1^2(z), v_1^3(z)\right), \quad \mathbf{v}_2(z) = \left(v_2^1(z), v_2^2(z), v_2^3(z)\right), \\ \mathbf{v}_3(z) = \left(v_3^1(z), v_3^2(z), v_3^3(z)\right) \end{gathered} \tag{12}$$

— каноническая система решений задачи (11) ($\mathbf{v}_i(z)$ имеет на бесконечности порядок $(-\varkappa_i)$, $i = 1, 2, 3$, $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \varkappa_3$, $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = \varkappa = \operatorname{ind} \det G_3(t)$ — ее суммарный индекс). Разложения решений (3) по функциям искомой канонической системы решений (12) имеют вид

$$\mathbf{w}_i(z) = p_{i1}(z)\mathbf{v}_1(z) + p_{i2}(z)\mathbf{v}_2(z) + p_{i3}(z)\mathbf{v}_3(z), \quad i = 1, 2, \tag{13}$$

где $p_{ij}(z)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ — некоторые полиномы.

В [4] было получено соотношение, связывающее разности (4) с функциями канонической системы решений (12):

$$p_j(t)\Delta^+(t) = v_j^{1+}(t)w_{23}^+(t) + v_j^{2+}(t)w_{31}^+(t) + v_j^{3+}(t)w_{12}^+(t), \tag{14}$$

$$p_j(t)\Delta^-(t) = v_j^{1-}(t)w_{23}^-(t) + v_j^{2-}(t)w_{31}^-(t) + v_j^{3-}(t)w_{12}^-(t), \tag{15}$$

$j = 1, 2, 3$, в которых через $\Delta^\pm(z)$ обозначены определители канонической матрицы $X(z)$ ($\Delta = \Delta^+/\Delta^-$, порядок Δ^- на бесконечности равен $-\varkappa$), а $p_j(z)$, $j = 1, 2, 3$, — полиномы, определенные равенствами

$$p_1 = p_{12}p_{23} - p_{13}p_{22}, \quad p_2 = p_{11}p_{23} - p_{13}p_{21}, \quad p_3 = p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12}. \tag{16}$$

Предположим, что выполняются условия (7). Запишем второе и третье краевые условия (11) для функций (12) и значений $j = 1, 2, 3,$ учитывая (15) и (7):

$$v_j^{2+} = g_{21}\frac{(\Delta^- p_j - w_{31}^- v_j^{2-})}{w_{23}^-} + g_{22}v_j^{2-} + g_{23}v_j^{3-},$$
$$v_j^{3+} = g_{31}\frac{(\Delta^- p_j - w_{31}^- v_j^{2-})}{w_{23}^-} + g_{32}v_j^{2-} + g_{33}v_j^{3-}. \qquad (17)$$

Непосредственно, в рассматриваемом случае проверяется справедливость на Γ равенств

$$g_{i2}w_{23}^- - g_{i1}w_{31}^- = w_1^{i+}w_2^{3-} - w_2^{i+}w_1^{3-}, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (18)$$
$$g_{i3}w_{23}^- = w_2^{i+}w_1^{2-} - w_1^{i+}w_2^{2-}, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (19)$$

Преобразуем краевые условия (17) используя формулы (18), (19) при $i = 2, 3,$ придем к задаче линейного сопряжения

$$v_j^{2+} = \frac{w_1^{2+}w_2^{3-} - w_2^{2+}w_1^{3-}}{w_{23}^-}v_j^{2-} + \frac{w_2^{2+}w_1^{2-} - w_1^{2+}w_2^{2-}}{w_{23}^-}v_j^{3-} + \frac{g_{21}\Delta^- p_j}{w_{23}^-},$$
$$v_j^{3+} = \frac{w_1^{3+}w_2^{3-} - w_2^{3+}w_1^{3-}}{w_{23}^-}v_j^{2-} + \frac{w_2^{3+}w_1^{2-} - w_1^{3+}w_2^{2-}}{w_{23}^-}v_j^{3-} + \frac{g_{31}\Delta^- p_j}{w_{23}^-}.$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{\Omega}^+ = (v_j^{2+}, v_j^{3+}), \qquad (20)$$

$$\mathbf{W}^- = \big(W^{1-}(t), W^{2-}(t)\big) = \left(\frac{w_2^{3-}v_j^{2-} - w_2^{2-}v_j^{3-}}{w_{23}^-}, -\frac{w_1^{3-}v_j^{2-} - w_1^{2-}v_j^{3-}}{w_{23}^-}\right), \qquad (21)$$

придем к задаче линейного сопряжения

$$\mathbf{\Omega}^+(t) = F(t)\mathbf{W}^-(t) + \mathbf{f}(t), \quad t \in \Gamma, \qquad (22)$$

с матрицей-функцией, аналитически продолжимой в область D^+ и не имеющей там нулей:

$$F(t) = \begin{pmatrix} w_1^{2+}(t) & w_2^{2+}(t) \\ w_1^{3+}(t) & w_2^{3+}(t) \end{pmatrix}, \quad \det F(t) = w_{23}^+(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \qquad (23)$$

и вектор-функцией $\mathbf{f}(t) = (g_{21}(t)\Delta^-(t)p(t)/w_{23}^-(t), g_{31}(t)\Delta^-(t)p(t)/w_{23}^-(t))$. Полагая

$$\mathbf{W}^+(t) = F^{-1}(t)\mathbf{\Omega}^+(t) = \big(W^{1+}(t), W^{2+}(t)\big), \quad t \in \Gamma, \qquad (24)$$

где

$$W^{1+} = \frac{(w_2^{3+}v_j^{2+} - w_2^{2+}v_j^{3+})}{w_{23}^+}, \quad W^{2+} = -\frac{(w_1^{3+}v_j^{2+} - w_1^{2+}v_j^{3+})}{w_{23}^+}, \qquad (25)$$

придем к задаче "о скачке"

$$\mathbf{W}^+(t) = \mathbf{W}^-(t) + \mathbf{g}(t), \quad t \in \Gamma, \qquad (26)$$

с вектор-функцией

$$\mathbf{g} = F^{-1}\mathbf{f} = \left(\frac{(g_{21}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{2+})\Delta^- p_j}{w_{23}^+ w_{23}^-}, -\frac{(g_{21}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{2+})\Delta^- p_j}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right). \qquad (27)$$

Так как первая вектор-функция канонической системы решений $\mathbf{v_1}(z)$ имеет самый низкий из возможных порядков на бесконечности, то $-\varkappa_1 \leq \min(k_1, k_2)$. Поэтому, в общем случае, решение задачи (26), (27) согласно (4), (21) следует искать в классе кусочно-аналитических функций, ограниченных на бесконечности и для значения индекса $j=1$, на Γ получим

$$W^{1+} = P\left[\frac{(g_{21}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + c, \quad W^{2+} = -P\left[\frac{(g_{21}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + d,$$
$$W^{1-} = -Q\left[\frac{(g_{21}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + c, \ W^{2-} = Q\left[\frac{(g_{21}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + d,$$

где c, d — постоянные, $P=(I+S)/2$, $Q=(I-S)/2$ (I — единичный, S — сингулярный операторы). Тогда формулы (20), (21), (24), (25) позволяют записать представление для первой вектор-функции канонической системы решений (12) в виде

$$v_1^{2+} = w_1^{2+}\left(P\left[\frac{(g_{21}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + c\right) + w_2^{2+}\left(-P\left[\frac{(g_{21}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + d\right),$$
$$v_1^{3+} = w_1^{3+}\left(P\left[\frac{(g_{21}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + c\right) + w_2^{3+}\left(-P\left[\frac{(g_{21}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + d\right),$$

$$v_1^{1+} = \frac{(p_1\Delta^+ - v_1^{2+}w_{31}^+)}{w_{23}^+}; \tag{28}$$

$$v_1^{2-} = w_1^{2-}\left(-Q\left[\frac{(g_{21}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + c\right) + w_2^{2-}\left(Q\left[\frac{(g_{21}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + d\right),$$
$$v_1^{3-} = w_1^{3-}\left(-Q\left[\frac{(g_{21}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + c\right) + w_2^{3-}\left(Q\left[\frac{(g_{21}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{2+})\Delta^- p_1}{w_{23}^+ w_{23}^-}\right] + d\right),$$
$$v_1^{1-} = \frac{(p_1\Delta^- - v_1^{2-}w_{31}^-)}{w_{23}^-}.$$

Подставляя функции (28) в краевые условия (11) убеждаемся, что эти функции являются решением задачи для любого полинома $p_1(z)$. Кроме того, для степени s полинома $p_1(z)$ была указана оценка сверху: $s \le k_1+k_2+\varkappa+\min(k_1,k_2)$. Значит, для отыскания $\mathbf{v}_1(z)$ нужно неопределенными коэффициентами полинома $p_1(z)$ и постоянными c и d распорядиться так, чтобы вектор-функция с компонентами (28) имела самый низкий из возможных порядков $(-\varkappa_1)$ на бесконечности.

Из (4) и (14), (15) следует, что если одно из решений, например $\mathbf{w}_1(z)$, совпадет с $\mathbf{v}_1(z)$, то в (28) полином $p_1(z)$ будет тождественным нулем и первой функцией канонической системы решений с точностью до мультипликативной постоянной будет $\mathbf{w}_1(z)$, которая получатся из (28) при $d=0$.

Если для решений (3) выполняются условия (8), то, исключая из первого и третьего краевых условий (11), записанных для $\mathbf{v}_j(z)$, $j=1,2,3$, компоненту $\mathbf{v}_j^{1-}(t)$, согласно (15) получим

$$v_j^{1+} = g_{11}\frac{(\Delta^- p_j - w_{31}^- v_j^{2-})}{w_{23}^-} + g_{12}v_j^{2-} + g_{13}v_j^{3-},$$
$$v_j^{3+} = g_{31}\frac{(\Delta^- p_j - w_{31}^- v_j^{2-})}{w_{23}^-} + g_{32}v_j^{2-} + g_{33}v_j^{3-}.$$

Применяя формулы (15) и (19) для $i = 1, 3$, придем к задаче линейного сопряжения

$$v_j^{1+} = \frac{w_1^{1+}w_2^{3-} - w_2^{1+}w_1^{3-}}{w_{23}^{-}} v_j^{2-} + \frac{w_2^{1+}w_1^{2-} - w_1^{1+}w_2^{2-}}{w_{23}^{-}} v_j^{3-} + \frac{g_{11}\Delta^- p_j}{w_{23}^{-}},$$

$$v_j^{3+} = \frac{w_1^{3+}w_2^{3-} - w_2^{3+}w_1^{3-}}{w_{23}^{-}} v_j^{2-} + \frac{w_2^{3+}w_1^{2-} - w_1^{3+}w_2^{2-}}{w_{23}^{-}} v_j^{3-} + \frac{g_{31}\Delta^- p_j}{w_{23}^{-}}.$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{\Omega}^+ = (v_j^{1+}, v_j^{3+}), \tag{29}$$

и используя (21), придем к задаче (22) с матрицей-функцией, также аналитически продолжимой в область D^+ и не имеющей там нулей:

$$F(t) = \begin{pmatrix} w_1^{1+}(t) & w_2^{1+}(t) \\ w_1^{3+}(t) & w_2^{3+}(t) \end{pmatrix}, \quad \det F(t) = -w_{31}^{+}(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{30}$$

и вектор-функцией

$$\mathbf{f}(t) = (g_{11}(t)\Delta^-(t)p_j(t)/w_{23}^{-}(t), g_{31}(t)\Delta^-(t)p_j(t)/w_{23}^{-}(t)).$$

Решая задачу (26) для вектор-функций (21), (24) с компонентами

$$W^{1+} = -\frac{(w_2^{3+}v_j^{1+} - w_2^{1+}v_j^{3+})}{w_{31}^{+}}, \quad W^{2+} = \frac{(w_1^{3+}v_j^{1+} - w_1^{1+}v_j^{3+})}{w_{31}^{+}}, \tag{31}$$

и вектор-функцией

$$\mathbf{g} = F^{-1}\mathbf{f} = \left(-\frac{(g_{11}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{1+})\Delta^- p_j}{w_{31}^{+}w_{23}^{-}}, \frac{(g_{11}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{1+})\Delta^- p_j}{w_{31}^{+}w_{23}^{-}} \right)$$

при $j = 1$ в классе кусочно-аналитических функций, ограниченных на бесконечности, для определения первой вектор-функции канонической системы решений (12) на Γ получим представление

$$v_1^{1+} = w_1^{1+}\left(-P\left[\frac{(g_{11}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{1+})\Delta^- p_1}{w_{31}^{+}w_{23}^{-}}\right] + c\right) + w_2^{1+}\left(P\left[\frac{(g_{11}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{1+})\Delta^- p_1}{w_{31}^{+}w_{23}^{-}}\right] + d\right),$$

$$v_1^{3+} = w_1^{3+}\left(-P\left[\frac{(g_{11}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{1+})\Delta^- p_1}{w_{31}^{+}w_{23}^{-}}\right] + c\right) + w_2^{3+}\left(P\left[\frac{(g_{11}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{1+})\Delta^- p_1}{w_{31}^{+}w_{23}^{-}}\right] + d\right),$$

$$v_1^{2+} = \frac{p_1\Delta^+}{w_{31}^{+}}; \tag{32}$$

$$v_1^{2-} = w_1^{2-}\left(Q\left[\frac{(g_{11}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{1+})\Delta^- p_1}{w_{31}^{+}w_{23}^{-}}\right] + c\right) + w_2^{2-}\left(-Q\left[\frac{(g_{11}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{1+})\Delta^- p_1}{w_{31}^{+}w_{23}^{-}}\right] + d\right),$$

$$v_1^{3-} = w_1^{3-}\left(Q\left[\frac{(g_{11}w_2^{3+} - g_{31}w_2^{1+})\Delta^- p_1}{w_{31}^{+}w_{23}^{-}}\right] + c\right) + w_2^{3-}\left(-Q\left[\frac{(g_{11}w_1^{3+} - g_{31}w_1^{1+})\Delta^- p_1}{w_{31}^{+}w_{23}^{-}}\right] + d\right),$$

$$v_1^{1-} = \frac{(p_1\Delta^- - v_1^{2-}w_{31}^{-})}{w_{23}^{-}}.$$

Пусть теперь для решений (3) выполняются условия (9). Тогда из второго и третьего краевых условий (11) для $v_j(z)$, $j = 1, 2, 3$, получим

$$v_j^{2+} = g_{21}v_j^{1-} + g_{23}v_j^{3-} + g_{22}\frac{\Delta^- p_j}{w_{31}^{-}}, \quad v_j^{3+} = g_{31}v_j^{1-} + g_{33}v_j^{3-} + g_{32}\frac{\Delta^- p_j}{w_{31}^{-}}. \tag{33}$$

Учитывая тождества в условиях (9), приходим к равенствам

$$g_{i1}w_{31}^{-} = w_2^{i+}w_1^{3-} - w_1^{i+}w_2^{3-}, \quad i = 1,2,3, \tag{34}$$

$$g_{i3}w_{31}^{-} = w_1^{i+}w_2^{1-} - w_2^{i+}w_1^{1-}, \quad i = 1,2,3. \tag{35}$$

Применяя (34), (35) для $i = 2,3$, перепишем (33) в виде

$$v_j^{2+} = \frac{w_2^{2+}w_1^{3-} - w_1^{2+}w_2^{3-}}{w_{31}^{-}}v_j^{1-} + \frac{w_1^{2+}w_2^{1-} - w_2^{2+}w_1^{1-}}{w_{31}^{-}}v_j^{3-} + \frac{g_{22}\Delta^{-}p_j}{w_{31}^{-}},$$

$$v_j^{3+} = \frac{w_2^{3+}w_1^{3-} - w_1^{3+}w_2^{3-}}{w_{31}^{-}}v_j^{1-} + \frac{w_1^{3+}w_2^{1-} - w_2^{3+}w_1^{1-}}{w_{31}^{-}}v_j^{3-} + \frac{g_{32}\Delta^{-}p_j}{w_{31}^{-}}.$$

Тогда для вектор-функций (20) и

$$\mathbf{W}^{-} = \left(-\frac{w_2^{3-}v_j^{1-} - w_2^{1-}v_j^{3-}}{w_{31}^{-}}, \frac{w_1^{3-}v_j^{1-} - w_1^{1-}v_j^{3-}}{w_{31}^{-}} \right) \tag{36}$$

придем к задаче (22), (23) с вектор-функцией

$$\mathbf{f}(t) = (g_{22}(t)\Delta^{-}(t)p_j(t)/w_{31}^{-}(t), g_{32}(t)\Delta^{-}(t)p_j(t)/w_{31}^{-}(t)).$$

Значит, для вектор-функции (24) с компонентами (25) придем к задаче (26), в которой

$$\mathbf{g} = F^{-1}\mathbf{f} = \left(\frac{(g_{22}w_2^{3+} - g_{32}w_2^{2+})\Delta^{-}p_j}{w_{23}^{+}w_{31}^{-}}, -\frac{(g_{22}w_1^{3+} - g_{32}w_1^{2+})\Delta^{-}p_j}{w_{23}^{+}w_{31}^{-}} \right).$$

Решая эту задачу при $j = 1$ в классе кусочно-аналитических функций, ограниченных на бесконечности, из (25), (36) для определения первой вектор-функции канонической системы решений (12) на Γ получим представление

$$v_1^{2+} = w_1^{2+}\left(P\left[\frac{(g_{22}w_2^{3+} - g_{32}w_2^{2+})\Delta^{-}p_1}{w_{23}^{+}w_{31}^{-}} \right] + c \right) + w_2^{2+}\left(-P\left[\frac{(g_{22}w_1^{3+} - g_{32}w_1^{2+})\Delta^{-}p_1}{w_{23}^{+}w_{31}^{-}} \right] + d \right),$$

$$v_1^{3+} = w_1^{3+}\left(P\left[\frac{(g_{22}w_2^{3+} - g_{32}w_2^{2+})\Delta^{-}p_1}{w_{23}^{+}w_{31}^{-}} \right] + c \right) + w_2^{3+}\left(-P\left[\frac{(g_{22}w_1^{3+} - g_{32}w_1^{2+})\Delta^{-}p_1}{w_{23}^{+}w_{31}^{-}} \right] + d \right),$$

$$v_1^{1+} = \frac{(p_1\Delta^{+} - v_1^{2+}w_{31}^{+})}{w_{23}^{+}}; \tag{37}$$

$$v_1^{1-} = w_1^{1-}\left(-Q\left[\frac{(g_{22}w_2^{3+} - g_{32}w_2^{2+})\Delta^{-}p_1}{w_{23}^{+}w_{31}^{-}} \right] + c \right) + w_2^{1-}\left(Q\left[\frac{(g_{22}w_1^{3+} - g_{32}w_1^{2+})\Delta^{-}p_1}{w_{23}^{+}w_{31}^{-}} \right] + d \right),$$

$$v_1^{3-} = w_1^{3-}\left(-Q\left[\frac{(g_{22}w_2^{3+} - g_{32}w_2^{2+})\Delta^{-}p_1}{w_{23}^{+}w_{31}^{-}} \right] + c \right) + w_2^{3-}\left(Q\left[\frac{(g_{22}w_1^{3+} - g_{32}w_1^{2+})\Delta^{-}p_1}{w_{23}^{+}w_{31}^{-}} \right] + d \right),$$

$$v_1^{2-} = \frac{p_1\Delta^{-}}{w_{31}^{-}}.$$

Сама вектор-функция $v_1(z)$ определяется как в (28).

Если выполняются условия (10) то, записывая первое и третье краевые условия (11) для вектор-функций (12), перепишем их в виде

$$v_j^{1+} = g_{11}v_j^{1-} + g_{13}v_j^{3-} + g_{12}\frac{\Delta^{-}p_j}{w_{31}^{-}}, \quad v_j^{3+} = g_{31}v_j^{1-} + g_{33}v_j^{3-} + g_{32}\frac{\Delta^{-}p_j}{w_{31}^{-}}.$$

Учитывая равенства (34), (35) для $i=1,3$, получаем

$$v_j^{1+}=\frac{w_2^{1+}w_1^{3-}-w_1^{1+}w_2^{3-}}{w_{31}^-}v_j^{1-}+\frac{w_1^{1+}w_2^{1-}-w_2^{1+}w_1^{1-}}{w_{31}^-}v_j^{3-}+\frac{g_{12}\Delta^-p_j}{w_{31}^-},$$
$$v_j^{3+}=\frac{w_2^{3+}w_1^{3-}-w_1^{3+}w_2^{3-}}{w_{31}^-}v_j^{1-}+\frac{w_1^{3+}w_2^{1-}-w_2^{3+}w_1^{1-}}{w_{31}^-}v_j^{3-}+\frac{g_{32}\Delta^-p_j}{w_{31}^-}.$$

Тогда для вектор-функций (29), (36) придем к задаче (22), (30), для которой

$$\mathbf{f}(t)=(g_{12}(t)\Delta^-(t)p_j(t)/w_{31}^-(t),g_{32}(t)\Delta^-(t)p_j(t)/w_{31}^-(t)).$$

Таким образом, для вектор-функции (24) с компонентами (31) получим задачу (17), в которой

$$\mathbf{g}=F^{-1}\mathbf{f}=\left(-\frac{(g_{12}w_2^{3+}-g_{32}w_2^{1+})\Delta^-p_j}{w_{31}^+w_{31}^-},\frac{(g_{12}w_1^{3+}-g_{32}w_1^{1+})\Delta^-p_j}{w_{31}^+w_{31}^-}\right).$$

Решая полученную задачу при $j=1$ в классе кусочно-аналитических функций, ограниченных на бесконечности, из (31), (36) для определения первой вектор-функции канонической системы решений (12) на Γ получим представление

$$v_1^{1+}=w_1^{1+}\left(-P\left[\frac{(g_{12}w_2^{3+}-g_{32}w_2^{1+})\Delta^-p_1}{w_{31}^+w_{31}^-}\right]+c\right)+ \\ +w_2^{1+}\left(P\left[\frac{(g_{12}w_1^{3+}-g_{32}w_1^{1+})\Delta^-p_1}{w_{31}^+w_{31}^-}\right]+d\right),$$

$$v_1^{3+}=w_1^{3+}\left(-P\left[\frac{(g_{12}w_2^{3+}-g_{32}w_2^{1+})\Delta^-p_1}{w_{31}^+w_{31}^-}\right]+c\right)+ \\ +w_2^{3+}\left(P\left[\frac{(g_{12}w_1^{3+}-g_{32}w_1^{1+})\Delta^-p_1}{w_{31}^+w_{31}^-}\right]+d\right),\quad v_1^{2+}=\frac{p_1\Delta^+}{w_{31}^+};\quad (38)$$

$$v_1^{1-}=w_1^{1-}\left(Q\left[\frac{(g_{12}w_2^{3+}-g_{32}w_2^{1+})\Delta^-p_1}{w_{31}^+w_{31}^-}\right]+c\right)+ \\ +w_2^{1-}\left(-Q\left[\frac{(g_{12}w_1^{3+}-g_{32}w_1^{1+})\Delta^-p_1}{w_{31}^+w_{31}^-}\right]+d\right),$$

$$v_1^{3-}=w_1^{3-}\left(Q\left[\frac{(g_{12}w_2^{3+}-g_{32}w_2^{1+})\Delta^-p_1}{w_{31}^+w_{31}^-}\right]+c\right)+ \\ +w_2^{3-}\left(-Q\left[\frac{(g_{12}w_1^{3+}-g_{32}w_1^{1+})\Delta^-p_1}{w_{31}^+w_{31}^-}\right]+d\right),\quad v_1^{2-}=\frac{p_1\Delta^-}{w_{31}^-},$$

из которого первая вектор-функция $\mathbf{v}_1(z)$ порядка $-\varkappa_1$ на бесконечности определится как указано выше.

Перейдем теперь к построению второй вектор-функции $\mathbf{v}_2(z)$ канонической системы решений задачи (2). Согласно приведенным рассуждениям, ее следует искать как не связанную с уже построенной вектор-функцией $\mathbf{v}_1(z)$ никакой линейной комбинацией с полиномиальными коэффициентами порядка $-\varkappa_2=-(\varkappa-\varkappa_1)$ на бесконечности из представлений (28), (32), (37), (38), в которых неопределенный полином $p_1(z)$ заменен на полином $p_2(z)$

для степени которого и степеней полиномов $c(z)$, $d(z)$, в работе [4], также указана оценка сверху.

Вектор-функция $\mathbf{v}_3(z)$ в данном случае имеет вид $\mathbf{v}_3(z)=(0,0,c_1)$, c_1 – постоянная.

Замечание. Ограничения в (7)–(10) относятся, в основном, к технической стороне вопроса — методу решения задачи (22) и получения более простых формул в представлении вектор-функций канонической системы решений (12). Отметим также, что при получении соответствующих представлений, выбор уравнений в краевых условиях (11) определяется индексами $i,j=1,2,3$ "плюсовой" компоненты функций (4), не имеющей нулей на контуре и в области D^+. Поэтому, если имеются другие "плюсовые" компоненты (4), не равные тождественному нулю, то в этом представлении вид функции $w_1^{k+}(z)$, $k\neq i,j$, должен быть записан с учетом тождества (14). Кроме того, предложенный метод построения канонической системы решений может быть распространен на случай обращения разностей (4) в нуль в соответствующих областях, используя результаты работ [2], [3], [5], а в конечном числе точек контура — работы [6].

Пример. Рассмотрим задачу линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$G_2(t)=\begin{pmatrix}\frac{\cos t}{t^2} & \frac{\sin t}{t}\\ \frac{\sin t}{t} & \cos t\end{pmatrix},\quad t\in\Gamma:|t|=1, \tag{39}$$

мероморфно продолжимой в область $D^+:|z|<1$, $\det G_2(t)=\cos 2t/t^2$, $\varkappa=0$, $\Delta^+(t)=\cos 2t/(t^2-\pi^2/16)$, $\Delta^-(t)=t^2/(t^2-\pi^2/16)$. Частное решение задачи легко подбирается и за решение возьмем, например, $\mathbf{w}^-(z)=\big(z^2,0\big)$, $\mathbf{w}^+(z)=(\cos z, z\sin z)$. Тогда для задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$G_3(t)=\begin{pmatrix}\frac{\cos t}{t^2} & \frac{\sin t}{t} & 0\\ \frac{\sin t}{t} & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{40}$$

имеем два решения: $\mathbf{w}_1^-(z)=\big(z^2,0,0\big)$, $\mathbf{w}_1^+(z)=(\cos z, z\sin z,0)$, $\mathbf{w}_1^-(z)=(0,0,1)$, $\mathbf{w}_2^+(z)=(0,0,1)$. Разности (4) для этих решений равны: $w_{12}^{\pm}(t)\equiv 0$, $w_{13}^+(t)=\cos t\neq 0$, $t\in D^+\cup\Gamma$, $w_{13}^-(t)=t^2\neq 0$, $t\in D^-\cup\Gamma$, $w_{23}^+(t)=t\sin t$, $w_{23}^+(t)\equiv 0$. Так как $w_{23}^+(t)$ имеет нуль в области D^+, для нахождения первой вектор-функции канонической системы решение (12), возьмем представление (38), в котором согласно сделанному замечанию компоненту $v_1^{2+}(t)$ возьмем в виде $v_1^{2+}(t)=(p_1(t)\Delta^+(t)-w_{23}^+(t)v_1^{1+}(t))/w_{31}^+(t)$, где $p_1(t)$ — пока неопределенный полином второй степени: $p_1(t)=a_2t^2+a_1t+a_0$. Тогда представление (38) после соответствующих вычислений приводит к представлению

$$\begin{aligned}
v_1^{1+}(t)={}&\frac{16a_0\sin t}{\pi^2 t}-\frac{2(16a_0+4\pi a_1+\pi^2a_2)(\sin t-\cos t)}{\pi^2(4t-\pi)}-\\
&-\frac{2(16a_0-4\pi a_1+\pi^2a_2)(\sin t+\cos t)}{\pi^2(4t+\pi)}+c\cos t,\\
v_1^{2+}(t)={}&-\frac{16(a_2t^2+a_1t+a_0)\cos 2t}{(16t^2-\pi^2)\cos t}+\frac{16a_0\sin^2 t}{\pi^2\cos t}-\\
&-\frac{2(16a_0+4\pi a_1+\pi^2a_2)t\operatorname{tg} t(\sin t-\cos t)}{\pi^2(4t-\pi)}-\\
&-\frac{2(16a_0-4\pi a_1+\pi^2a_2)t\operatorname{tg} t(\sin t+\cos t)}{\pi^2(4t+\pi)}+ct\sin t,
\end{aligned} \tag{41}$$

$$v_1^{3+}(t) = d,$$
$$v_1^{1-}(t) = \frac{2(16a_0 + 4\pi a_1 + \pi^2 a_2)t^2}{\pi^2(4t - \pi)} - \frac{2(16a_0 - 4\pi a_1 + \pi^2 a_2)t^2}{\pi^2(4t + \pi)} + ct^2,$$
$$v_1^{2-}(t) = -\frac{16(a_2 t^2 + a_1 t + a_0)}{16t^2 - \pi^2}, \quad v_1^{3-}(t) = d.$$

Полагая в (41) $a_0 = 1/16, a_2 = a_1 = c = d = 0$, найдем первую вектор-функцию $\mathbf{v_1}(z)$ задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией (40) и порядком на бесконечности $-\varkappa_1 = 0$:

$$v_1^{1+}(t) = \frac{\sin t}{\pi^2 t} - \frac{2(\sin t - \cos t)}{\pi^2(4t - \pi)} - \frac{2(\sin t + \cos t)}{\pi^2(4t + \pi)},$$
$$v_1^{2+}(t) = -\frac{\cos 2t}{(16t^2 - \pi^2)\cos t} + \frac{\sin^2 t}{\pi^2 \cos t} - \frac{2t \operatorname{tg} t(\sin t - \cos t)}{\pi^2(4t - \pi)} - \frac{2t \operatorname{tg} t(\sin t + \cos t)}{\pi^2(4t + \pi)}, \qquad (42)$$
$$v_1^{3+}(t) = 0, \quad v_1^{1-}(t) = \frac{4t^2}{\pi(16t^2 - \pi^2)}, \quad v_1^{2-}(t) = -\frac{1}{16t^2 - \pi^2}, \quad v_1^{3-}(t) = 0.$$

Взяв в (41) $a_2 = 1/2$, $a_0 = a_1 = c = 0$, $d = 1$, определим вторую вектор-функцию $\mathbf{v}_2(z)$ канонической системы решений задачи:

$$v_2^{1+}(t) = -\frac{(\sin t - \cos t)}{(4t - \pi)} - \frac{(\sin t + \cos t)}{(4t + \pi)},$$
$$v_2^{2+}(t) = -\frac{8t^2 \cos 2t}{(16t^2 - \pi^2)\cos t} - \frac{t \operatorname{tg} t(\sin t - \cos t)}{(4t - \pi)} - \frac{t \operatorname{tg} t(\sin t + \cos t)}{(4t + \pi)}, \qquad (43)$$
$$v_2^{3+}(t) = 1, \quad v_2^{1-}(t) = \frac{2\pi t^2}{(16t^2 - \pi^2)}, \quad v_2^{2-}(t) = -\frac{8t^2}{16t^2 - \pi^2}, \quad v_2^{3-}(t) = 1,$$

порядок которой на бесконечности $-\varkappa_2$ также равен нулю. Третья вектор-функция канонической системы решений $\mathbf{v}_3(z) = (0, 0, 1)$. Тогда первые две компоненты вектор-функций $\mathbf{v}_1(z)$ и $\mathbf{v}_2(z)$ в представлениях (42), (43), определят каноническую систему решений задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией (39) и частными индексами $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$. Вычисляя определители канонической матрицы этой задачи, найдем

$$\Delta^+(z) = -2\cos 2z/\pi(16z^2 - \pi^2) \neq 0, \quad z \in D^+,$$
$$\Delta^-(z) = -2z^2/\pi(16z^2 - \pi^2) \neq 0, \qquad z \in D^- \setminus \{\infty\}.$$

Порядок $\Delta^-(z)$ на бесконечности равен $0 = -\varkappa_1 - \varkappa_2$. Значит, каноническая система решений рассмотренной задачи линейного сопряжения найдена верно.

Литература

[1] Векуа Н.П. *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи* (Наука, М., 1970).

[2] Адуков В.М. *Факторизация Винера–Хопфа кусочно-мероморфных матриц-функций*, Матем. сб. **200** (8), 3–24 (2011).

[3] Киясов С.Н. *Некоторые классы задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимые в замкнутой форме*, Изв. вузов. Матем., № 1, 3–20 (2013).

[4] Киясов С.Н. *Некоторые классы задач линейного сопряжения для трехмерного вектора, разрешимые в замкнутой форме*, Сиб. матем. журн. **56** (2), 389–408 (2015).

[5] Гахов Ф.Д. *Краевая задача Римана для системы n пар функций*, УМН **7** (4), 3–54 (1952).

[6] Гахов Ф.Д. *Особые случаи краевая задача Римана для системы n пар функций*, Изв. АН СССР, Сер. матем. **16** (2), 147–156 (1952).

С.Н. Киясов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Sergey.Kijasov@kpfu.ru

S.N. Kiyasov

Method of solving linear conjugation problem for two-dimensional vector for known partial solution

Abstract. We propose a method of construction of a canonical system of solutions to linear conjugation problem for two-dimensional vector in the presence of one partial solution to the problem.

Keywords: matrix-function, linear conjugation problem, canonical system of solutions, factorization.

S.N. Kiyasov

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Sergey.Kijasov@kpfu.ru