ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 5 (504)

УДК 514.76

М.В. СМОЛЬНИКОВА, С.Е. СТЕПАНОВ, И.Г. ШАНДРА

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Введение

Несмотря на обилие публикаций по гармоническим отображениям многообразий (см. обзоры [1]–[3]) на сегодняшний день нет определения инфинитезимального гармонического преобразования, не говоря уже о теории групп таких преобразований. Это резко контрастирует с теориями изометрических, конформных, проективных и других видов отображений и соответствующих им инфинитезимальных преобразований (см., напр., [4]–[9]).

Данной работой авторы намерены восполнить этот пробел. В статье изучаются инфинитезимальные гармонические преобразования и локальные группы инфинитезимальных гармонических преобразований римановых и келеровых многообразий.

Содержание первых трех параграфов данной статьи было анонсировано в [10], а четвертого — в [11].

1. Гармонические отображения римановых многообразий

1.1. Рассмотрим римановы многообразия (M, g) и $(\overline{M}, \overline{g})$ размерностей m и n соответственно и гладкое отображение $f : M \to \overline{M}$. Обозначим через $\{x^1, \dots, x^m\}$ локальные координаты в окрестности U точки $x \in M$, $\{\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n\}$ — локальные координаты в окрестности $\overline{U} \supset f(U)$ точки $\overline{x} = f(x) \in \overline{M}$, Γ^k_{ij}, $i, j, k = 1, \dots, m$, и $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$, — символы Кристофеля связностей Леви-Чивита ∇ и $\overline{\nabla}$ римановых многообразий (M, g) и $(\overline{M}, \overline{g})$ соответственно. Для того чтобы гладкое отображение $f : M \to \overline{M}$ римановых многообразий (M, g) и $(\overline{M}, \overline{g})$ было *гармоническим* (см., напр., [1]–[3]), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись уравнения Эйлера–Лагранжа

$$g^{ij}(\partial_i\partial_j f^\alpha - \Gamma^k_{ij}\partial_k f^\alpha + \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\partial_i f^\beta \partial_j f^\gamma) = 0 \qquad (1.1)$$

для контрвариантных компонент g^{ij} метрического тензора g и $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Замечание 1.1. В случае евклидова пространства уравнения (1.1) превращаются в систему уравнений Лапласа–Бельтрами $\Delta f^\alpha = \sum\limits_{j=1}^{m} \partial_j^2 f^\alpha = 0$, что и объясняет происхождение термина *гармоническое отображение*.

1.2. Если $\dim M = \dim \overline{M} = m$ и отображение $f : M \to \overline{M}$ является диффеоморфизмом, то локально отображение f будет осуществляться ([12], с. 67) по принципу равенства координат $\overline{x}^1 = x^1, \dots, \overline{x}^m = x^m$ соответствующих точек $\overline{x} = f(x)$. В этом случае уравнения Эйлера–Лагранжа (1.1) предстают в следующем виде:

$$g^{ij} T^k_{ij} = 0, \qquad (1.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00028).

где $T^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}$ — компоненты *тензора деформации* $T = \overline{\nabla} - \nabla$ связности Леви-Чивита ∇ многообразия (M, g) при отображении f на многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ ([4], с. 162; [6], с. 71). Отметим, что для произвольного диффеоморфизма $f : M \to \overline{M}$ тензор деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ рассматривают (см. там же) как гладкое сечение расслоения $TM \otimes S^2M$. В случае же гармонического диффеоморфизма тензор деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ в силу условия (1.2) становится бесследовым симметрическим тензорным полем — сечением расслоения $f^{-1}TM' \otimes S^2_0M$. Таким образом, доказана

Лемма 1.1. *Для того чтобы диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ риманова многообразия (M, g) на риманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ был гармоническим, необходимо и достаточно, чтобы тензор деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ связности Леви-Чивита ∇ многообразия (M, g) при отображении f на многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ был сечением тензорного расслоения $f^{-1}TM' \otimes S^2_0M$.*

2. Определение и примеры инфинитезимального гармонического преобразования

2.1. Произвольное векторное поле $\xi \in C^\infty TM$ порождает в окрестности U каждой точки x риманова многообразия (M, g) локальную 1-параметрическую группу инфинитезимальных преобразований $\varphi_t : U \to M$, задаваемых формулами $\varphi_t(x) = \overline{x}^k = x^k + t\xi^k$ для локальной системы координат $\{x^1, \ldots, x^m\}$ в окрестности U, параметра $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \subset \mathbf{R}$ и $\xi = \xi^k \partial_k$ ([13], с. 21–23; [14], с. 39–41). На этом основании векторное поле $\xi \in C^\infty TM$ называют еще *инфинитезимальным преобразованием в* (M, g).

Локальные компоненты g_{ij} метрического тензора g и символы Кристофеля Γ^k_{ij} связности Леви-Чивита ∇ в результате инфинитезимального преобразования предстанут в следующем виде ([14], сс. 40, 41):

$$\overline{g}_{ij} = g_{ij} + t(L_\xi\, g_{ij}), \quad \overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + t(L_\xi\, \Gamma^k_{ij}). \tag{2.1}$$

Здесь

$$L_\xi\, g_{ij} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i; \quad L_\xi\, \Gamma^k_{ij} = \nabla_i \nabla_j \xi^k - R^k_{ijl}\xi^l, \tag{2.2}$$

где R^k_{ijl} — компоненты тензора кривизны R связности ∇, являются выражениями производных Ли ([13], с. 37) компонент g_{ij} тензора g и символов Кристофеля Γ^k_{ij} по отношению к векторному полю ξ.

В соответствии с общей теорией ([9], с. 9; [13], с. 19) гармонический диффеоморфизм f риманова многообразия (M, g) на себя назовем *гармоническим преобразованием* в многообразии (M, g). Аналогично, векторное поле ξ назовем *инфинитезимальным гармоническим преобразованием* в (M, g), если локальная однопараметрическая группа инфинитезимальных преобразований, порожденная векторным полем ξ в окрестности U каждой точки x многообразия (M, g), состоит из инфинитезимальных гармонических преобразований.

Согласно равенствам (2.1) заключаем, что определяющими для инфинитезимального гармонического преобразования ξ будут уравнения

$$g^{ij}(L_\xi\, \Gamma^k_{ij}) = 0. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Для того чтобы векторное поле $\xi \in C^\infty TM$ было инфинитезимальным гармоническим преобразованием в (M, g), необходимо и достаточно, чтобы его компоненты удовлетворяли дифференциальным уравнениям $\Delta\xi^k = 2R^k_j\xi^j$.*

Доказательство. Действие оператора Лапласа–Бельтрами Δ на произвольное векторное поле ξ выражается ([9], с. 203) следующей формулой: $\Delta\xi^k = -g^{ij}\nabla_i\nabla_j\xi^k + R^k_j\xi^j$, где $R_{ij} = g_{ik}R^k_j$

— компоненты тензора Риччи Ric многообразия (M, g). С другой стороны, на основании равенств (2.2) уравнениям (2.3) придадим следующий равносильный им вид:

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j\xi^k + R^k_j\xi^j = 0. \tag{2.4}$$

Из этих двух систем уравнений выводим $\Delta\xi^k = 2R^k_j\xi^j$. $\square$

Замечание 2.1. В случае евклидова пространства уравнения (2.4) предстают в виде системы уравнений Лапласа–Бельтрами $\Delta\xi^k = \sum\limits_{j=1}^{m}\partial^2_j\xi^k = 0$, что объясняет происхождение термина *инфинитезимальное гармоническое преобразование.*

2.2. Рассмотрим примеры инфинитезимальных гармонических преобразований. Первым примером будет инфинитезимальное конформное преобразование в (M, g), под которым понимают ([13], с. 284; [14], с. 47) векторное поле ξ, подчиняющееся условию

$$L_\xi\, g_{ij} = \nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i = \frac{2}{m}(\nabla_k\xi^k)g_{ij}. \tag{2.5}$$

При этом поле ξ называют *инфинитезимальной гомотетией* (соответственно *инфинитезимальной изометрией*), если в дополнение к (2.5) выполняется условие $\nabla_k\xi^k = \mathrm{const}$ (соответственно $\nabla_k\xi^k = 0$). Локальная однопараметрическая группа инфинитезимальных преобразований, порождаемая полем ξ, будет группой локальных конформных преобразований (соответственно группой локальных гомотетий или изометрий) тогда и только тогда, когда ξ — инфинитезимальное конформное преобразование (соответственно инфинитезимальная гомотетия или инфинитезимальная изометрия).

В случае конформного преобразования ξ непосредственные расчеты показывают ([5], гл. 2, § 5), что $\Delta\xi_k = 2R_{kj}\xi^j + m^{-1}(m-2)\nabla_k(\nabla_j\xi^j)$. А потому каждое инфинитезимальное конформное преобразование двумерного риманова многообразия (M, g) является гармоническим преобразованием. Для размерностей $n \geq 3$ это возможно только в случае, когда данное инфинитезимальное преобразование является либо гомотетией, либо изометрией.

Обратимся теперь к келерову многообразию (M, g, J), которое является римановым многообразием (M, g) четной размерности $m = 2n$ с почти комплексной структурой J, которая в каждой точке $x \in M$ является эндоморфизмом касательного пространства T_xM таким, что $J^2 = -\,\mathrm{id}$, и при этом $g(J, J) = g$ и $\nabla J = 0$. Векторное поле ξ, задающее инфинитезимальный автоморфизм почти комплексной структуры келерова многообразия $L_\xi\, J = 0$, называется (вещественным) *голоморфным векторным полем* ([15], с. 120).

К. Яно доказал ([5], гл. 4, § 6, теорема 6.5), что уравнения (2.4) являются следствиями уравнения $L_\xi\, J = 0$ и что в случае компактного келерова многообразия (M, g, J) верно и обратное утверждение. Таким образом, справедлива

Теорема 2.2. *Каждое (вещественное) голоморфное векторное поле на келеровом многообразии (M, g, J) является инфинитезимальным гармоническим преобразованием. В случае компактного многообразия (M, g, J) любое инфинитезимальное гармоническое преобразование в (M, g, J) является (вещественным) голоморфным векторным полем.*

3. Свойства инфинитезимального гармонического преобразования

Выше было установлено, что инфинитезимальное изометрическое преобразование в римановом многообразии (M, g) является гармоническим. Докажем теперь, что справедлива

Теорема 3.1. *Для того чтобы инфинитезимальное гармоническое преобразование ξ в римановом многообразии (M, g) было изометрическим, достаточно, чтобы многообразие (M, g) было компактным, а поле ξ — соленоидальным.*

Доказательство. Напомним ([9], с. 63), что равенства $\Delta\xi^k = 2R^k_j\xi^j$ и $\nabla_j\xi^j = 0$ являются необходимым и достаточным условием для того, чтобы ξ было инфинитезимальной изометрией компактного многообразия (M, g). Поэтому для доказательства достаточно обратиться к теореме 2.1. $\square$

В [16] было введено понятие *гармонического тензорного поля* φ на римановом многообразии (M, g) как сечения расслоения S^2M, локальные компоненты φ_{jk} которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям $g^{ij}\nabla_i\varphi_{jk} = 0$. Охарактеризуем инфинитезимальное гармоническое преобразование ξ в многообразии (M, g) в терминах гармонического тензорного поля φ.

Теорема 3.2. *Векторное поле ξ будет инфинитезимальным гармоническим преобразованием в римановом многообразии (M, g) тогда и только тогда, когда тензорное поле $\varphi = L_\xi g - (\operatorname{div}\xi)g$ является гармоническим на (M, g).*

Доказательство. Для тензорного поля $\varphi = L_\xi g - (\operatorname{div}\xi)g$ выпишем три группы очевидных равенств:

$$\begin{aligned}
\nabla_k\nabla_j\xi_i + \nabla_k\nabla_i\xi_j - \nabla_k(\nabla_l\xi^l)g_{ij} &= \nabla_k\varphi_{ij},\\
\nabla_j\nabla_k\xi_i + \nabla_j\nabla_i\xi_k - \nabla_j(\nabla_l\xi^l)g_{ik} &= \nabla_j\varphi_{ik},\\
\nabla_i\nabla_j\xi_k + \nabla_i\nabla_k\xi_j - \nabla_i(\nabla_l\xi^l)g_{kj} &= \nabla_i\varphi_{jk}.
\end{aligned}$$

Затем сложим почленно уравнения первой и второй групп и вычтем из полученного результата уравнения третьей группы, в результате получим

$$\begin{aligned}
&\nabla_k\nabla_j\xi_i + \nabla_j\nabla_k\xi_i - \xi_l R^l_{jki} - \xi_l R^l_{kji} - \nabla_k(\nabla_l\xi^l)g_{ij} -\\
&\qquad - \nabla_j(\nabla_l\xi^l)g_{ik} + \nabla_i(\nabla_l\xi^l)g_{jk} = \nabla_k\varphi_{ij} + \nabla_j\varphi_{ki} - \nabla_i\varphi_{jk}.
\end{aligned}$$

Последние уравнения после свертки их левой и правой частей с контрвариантными компонентами g^{ki} метрического тензора g примут следующий вид:

$$g^{kj}\nabla_k\nabla_j\xi_i + \xi_l R^l_i = g^{jk}\nabla_j\varphi_{ki}.$$

Теперь очевидно, что условия гармоничности инфинитезимального преобразования ξ и гармоничности тензорного поля $\varphi = L_\xi g - (\operatorname{div}\xi)g$ равносильны. $\square$

Хорошо известны “теоремы исчезновения” для инфинитезимальных конформных и изометрических преобразований ([13], с. 235; [15], с. 48). Докажем аналогичную теорему и для инфинитезимальных гармонических преобразований.

Теорема 3.3. *Компактное риманово многообразие (M, g) не допускает отличных от нуля инфинитезимальных гармонических преобразований, если кривизна Риччи этого многообразия отрицательна.*

Доказательство. Применим оператор Лапласа–Бельтрами Δ к функции $F = g_{ij}\xi^i\xi^j$ для произвольного инфинитезимального гармонического преобразования ξ многообразия (M, g). Найдем, что

$$\Delta F = g^{ij}\nabla_i\nabla_j(g_{ij}\xi^i\xi^j) = 2[-R_{ij}\xi^i\xi^j + g^{kl}g_{ij}(\nabla_k\xi^i)(\nabla_l\xi^j)]. \tag{3.1}$$

Далее, на основании предположения о кривизне Риччи многообразия (M, g) заключаем, что $\Delta F \geq 0$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой Хопфа ([17], с. 308; [14], сс. 29, 32–34), в силу которой из (3.1) следует $\xi = 0$. $\square$

Теорема 3.4. *Инфинитезимальное гармоническое преобразование ξ в компактном келеровом многообразии (M, g, J) постоянной скалярной кривизны разлагается в сумму $\xi = \xi' + J\xi''$, где ξ' и ξ'' являются инфинитезимальными изометриями в (M, g, J).*

Доказательство. Согласно теореме 2.3 каждое инфинитезимальное гармоническое преобразование ξ компактного келерова многообразия (M, g, J) является голоморфным (вещественным) преобразованием в (M, g, J). С другой стороны, по теореме А. Лихнеровича ([5], с. 92–98) подобное векторное поле ξ на компактном келеровом многообразии (M, g, J) постоянной скалярной кривизны разлагается в сумму $\xi = \xi' + J\xi''$, где ξ' и ξ'' суть инфинитезимальные изометрии в (M, g, J). $\square$

4. Векторное пространство инфинитезимальных гармонических преобразований

4.1. Рассмотрим пространство сечений $C^\infty S^p M$ векторного расслоения $S^p M$ ковариантных симметрических p-тензоров на n-мерном компактном ориентированном римановом многообразии (M, g). В соответствии с общей теорией ([5], гл. 4, § 1) полагаем

$$\langle \varphi, \overline{\varphi} \rangle = \int_M \frac{1}{p!} g(\varphi, \varphi') \tag{4.1}$$

для $g(\varphi, \varphi') = \varphi^{i_1 \dots i_p} \varphi'_{i_1 \dots i_p} = g^{i_1 k_1} \dots g^{i_p k_p} \varphi_{k_1 \dots k_p} \varphi'_{i_1 \dots i_p}$ и локальных компонент $\varphi'_{i_1 \dots i_p}$ и $\varphi_{k_1 \dots k_p}$ тензорных полей $\varphi, \varphi' \in C^\infty S^p M$.

Построим векторное поле X из локальных компонент $\varphi_{i_1 \dots i_p}$ и $\psi_{j i_1 \dots i_p}$ тензорных полей $\varphi \in C^\infty S^p M$ и $\psi \in C^\infty S^{p+1} M$, используя равенства $X^j = \varphi_{i_1 \dots i_p} \psi^{j i_1 \dots i_p}$. Далее, на основании теоремы Грина ([13], с. 259) $\int\limits_M \nabla_i X^i dV = 0$, и используя определенное глобально скалярное произведение (4.1), выводим равенство

$$\langle \delta^* \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \delta \psi \rangle. \tag{4.2}$$

Здесь $\delta^* : C^\infty S^p M \to C^\infty S^{p+1} M$ и $\delta : C^\infty S^{p+1} M \to C^\infty S^p M$ суть дифференциальные операторы первого порядка, определяемые следующими формулами (ср. с [15], с. 54–55):

$$(\delta^* \varphi)_{i_0 i_1 \dots i_p} = \nabla_{i_0} \varphi_{i_1 \dots i_{p-1} i_p} + \dots + \nabla_{i_p} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_{p-1}}, \quad (\delta \psi)_{i_1 \dots i_p} = -g^{j i_0} \nabla_j \psi_{i_0 i_1 \dots i_p}.$$

Равенство (4.2) свидетельствует о формальной сопряженности операторов δ^* и δ ([15], с. 626; [18], с. 69–70).

4.2. Определим на пространстве $C^\infty S^p M$ дифференциальный оператор второго порядка $\square : C^\infty S^p M \to C^\infty S^p M$ следующей формулой: $\square = \delta\delta^* - \delta^*\delta$. Непосредственные расчеты показывают, что оператор $\square$ является самосопряженным, т. е. $\langle \square\varphi, \varphi' \rangle = \langle \varphi, \square\varphi' \rangle$.

Полагая далее $\theta \in T_x^* M - \{0\}$ и $\varphi_x \in S_x^p M$, найдем символ $\sigma(\square)$ дифференциального оператора $\square$ ([15], с. 627–628; [18], сс. 64, 79, 87). Имеем

$$\sigma(\square)(\theta, x)\varphi_x = -i_{\theta^\#}(\theta \circ \varphi_x) + \theta \circ i_{\theta^\#} \varphi_x = -g(\theta, \theta)\varphi_x$$

для симметрического тензорного умножения $\circ$. Последнее равенство означает, что самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка $\square$ является лапласианом ([15], с. 77), а его ядро — конечномерным векторным пространством ([15], с. 631–632; [18], с. 178).

Поскольку

$$(\delta\delta^* \varphi)_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} i_p} = -g^{ji}(\nabla_i \nabla_j \varphi_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} i_p} + \nabla_i \nabla_{i_1} \varphi_{i_2 \dots i_{p-1} i_p j} + \dots + \nabla_i \nabla_{i_p} \varphi_{j i_1 \dots i_{p-1}});$$
$$(\delta^* \delta\varphi)_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{p-1} i_p} = -g^{ji}(\nabla_{i_1} \nabla_i \varphi_{j i_2 \dots i_p} + \nabla_{i_2} \nabla_i \varphi_{j i_3 \dots i_p i_1} + \dots + \nabla_{i_p} \nabla_i \varphi_{j i_1 \dots i_{p-1}}),$$

то используя тождество Риччи ([4], с. 42–43) найдем результат действия лапласиана $\Box = \delta\delta^* - \delta^*\delta$ на симметрическое тензорное поле φ:

$$(\Box\varphi)_{i_1\dots i_p} = -g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi_{i_1\dots i_p} - \sum_{a=1}^{p} R^k_{i_a}\varphi_{i_1\dots i_{a-1}ki_{a+1}\dots i_p} -$$

$$- g^{kj}g^{lm}\sum_{\substack{a,b=1,\\ a<b}}^{p} R_{i_aji_bm}\varphi_{i_1\dots i_{a-1}ki_{a+1}\dots i_{b-1}ji_{b+1}\dots i_p}. \quad (4.3)$$

4.3. Для векторного поля ξ введем дифференциальную форму θ такую, что $\theta^\# = \xi$ ([15], с. 47). Имеем

$$(\delta^*\theta)_{ij} = \nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i, \quad (\delta\theta) = -g^{ij}\nabla_i\xi_i, \quad (\delta^*\delta\theta)_j = -g^{ik}\nabla_j\nabla_k\xi_i,$$
$$(\delta\delta^*\theta)_j = -g^{ik}(\nabla_k\nabla_i\xi_j + \nabla_k\nabla_j\xi_i).$$

Теперь, используя тождество Риччи ([4], с. 42–43) найдем результат действия дифференциального оператора второго порядка $\Box = \delta\delta^* - \delta^*\delta$ на дифференциальную форму θ (ср. с (4.3))

$$(\Box\theta)_j = [(\delta\delta^* - \delta^*\delta)\theta]_j = -g^{ik}(\nabla_k\nabla_i\xi_j - \xi_l R^l_{ikj}) = -g^{ik}\nabla_k\nabla_i\xi_j + R^l_j\xi_l. \quad (4.4)$$

На основании равенства (4.4) заключаем, что справедлива

Теорема 4.1. *Инфинитезимальные гармонические преобразования в римановом многообразии (M, g) и только они составляют ядро лапласиана $\Box = \delta\delta^* - \delta^*\delta$.*

Нетрудно усмотреть, что инфинитезимальные гармонические преобразования в римановом многообразии (M, g) образуют $\mathbf{R}$-модуль, который обозначим через $\mathcal{H}(M, \mathbf{R})$. Поскольку оператор $\Box$ является лапласианом, то справедливо

Следствие 4.1. На компактном римановом многообразии (M, g) $\mathbf{R}$-модуль $\mathcal{H}(M, \mathbf{R})$ инфинитезимальных гармонических преобразований имеет конечную размерность.

В заключение заметим, что на компактном многообразии (M, g) с отрицательной кривизной Риччи $\dim\mathcal{H}(M, \mathbf{R}) = 0$ согласно теореме 3.3.

Литература

1. Eells J., Lemaire L. *A report on harmonic maps* // Bull. London Math. Soc. – 1978. – V. 10. – № 1. – P. 1–68.
2. Eells J., Lemaire L. *Another report on harmonic maps* // Bull. London Math. Soc. – 1988. – V. 20. – P. 385–584.
3. Давидов Й., Сергеев А.Г. *Твисторные пространства и гармонические отображения* // УМН. – 1993. – Т. 48. – № 3. – С. 3–96.
4. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* – М.: Ин. лит., 1948. – 316 с.
5. Yano K. *Differential geometry on complex and almost complex spaces.* – Oxford: Pergamon Press, 1965. – 326 p.
6. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 255 с.
7. Аминова А.В. *Группы преобразований римановых многообразий* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – ВИНИТИ, 1990. – Т. 22. – С. 97–165.
8. Yano K. *The theory of Lie derivatives and its applications.* – Amsterdam: North Holland, 1957. – 299 p.
9. Кобаяси Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1986. – 224 с.

10. Stepanov S.E. *The classification of harmonic diffeomorphisms* // Abstracts of the 5[th] International Conf. on Geom. and Appl. August 24–29, 2001, Varna. – Sofia: Union of Bulgarian Mathematicians. – 2001. – P. 55.
11. Smolnikova M.V. *On global geometry harmonic symmetric bilinear differential forms* // Тез. докл. международн. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 21–26 августа 2000 г., Суздаль. – Владимир: Изд-во Владимирск. ун-та, 2000. – С. 87-88.
12. Нарасимхан Р. *Анализ на действительных и комплексных многообразиях.* – М.: Мир, 1971. – 232 с.
13. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
14. Яно К., Бохнер С. *Кривизна и числа Бетти.* – М.: Ин. лит., 1957. – 152 с.
15. Бессе А. *Многообразия Эйнштейна.* – М.: Мир, 1990. – 703 с.
16. Garcia-Rio E., Vanhecke L., Vazquez-Abal E. *Harmonic endomorphism fields* // Illinois Journal of Mathematics. – 1997. – V. 41. – № 1. – P. 23–30.
17. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
18. Пале Р. *Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе.* – М.: Мир, 1970. – 359 с.

Владимирский государственный
педагогический университет

Московская финансовая академия

Поступила
20.02.2002