ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 9 (484)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.946

И.Б. ГАРИПОВ

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ B-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть R^+_{p+1} $(p\ge 2)$ — полупространство $x_p>0$ $(p+1)$-мерного пространства точек (x,t), $x=(x',x_p)$, $x'=(x_1,x_2,\dots,x_{p-1})$, а E^+_p — полупространство $x_p>0$ p-мерного евклидова пространства E_p, D — симметричная относительно координатной гиперплоскости $x_p=0$ область, ограниченная гиперповерхностью Γ. Обозначим через D^+ и Γ^+ части D и Γ, расположенные в E^+_p. Область D^+ ограничена гиперповерхностью Γ^+ и частью $\Gamma^{(0)}$ координатной гиперплоскости $x_p=0$. Гиперповерхность Γ^+ является гиперповерхностью класса $\Lambda_{1,B}$ [1], [2]. Обозначим через G^+_T цилиндр высоты $T>0$, основание которого совпадает с D^+, а образующие параллельны оси Ot. Верхнюю границу цилиндра G^+_T обозначим через H^+_T, а боковую поверхность — через $S^+_T=\Gamma^+_T\cup\Gamma^{(0)}_T$, где Γ^+_T и $\Gamma^{(0)}_T$ — части цилиндрической поверхности, которые образованы соответственно частями Γ^+ и $\Gamma^{(0)}$ границы D^+. Пусть $\widetilde G^+_T=G^+_T\cup H^+_T\cup\Gamma^{(0)}_T$, $\overline{G}^+_T=\widetilde G^+_T\cup\Gamma^+_T\cup D^+$.

В области G^+_T рассматривается B-параболическое уравнение

$$\Delta_B u-\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{1}$$

где $\Delta_B=\sum\limits_{i=1}^{p-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+B_{x_p}$, $B_{x_p}=\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}+\frac{k}{x_p}\frac{\partial}{\partial x_p}$, — оператор Бесселя, k — любое положительное число.

В данной работе строятся тепловые потенциалы типа простого и двойного слоев для уравнения (1), вычисляются предельные значения теплового потенциала типа двойного слоя и нормальной производной теплового потенциала типа простого слоя, первая краевая задача для уравнения (1) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

1. *Тепловые потенциалы типа простого и двойного слоев.* Известно [3], что функция

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{p+k-1}\pi^{\frac{p-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\dfrac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{p+k}{2}}} & \text{при } t>0;\\ 0 & \text{при } t\le 0 \ (\text{кроме } t=0,\ x=0)\end{cases}$$

является фундаментальным решением уравнения (1).

С помощью этой функции введем тепловые потенциалы, являющиеся решениями уравнения (1)

$$V(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{\Gamma^+}\nu(\xi,\tau)T^{\tau,\xi',\xi_p}_{t,x',x_p}G(x,t)\xi_p^k d\Gamma^+,$$
$$W(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{\Gamma^+}\rho(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial n_\xi}T^{\tau,\xi',\xi_p}_{t,x',x_p}G(x,t)\xi_p^k d\Gamma^+,$$

где $\nu(\xi,\tau)$ и $\rho(\xi,\tau)$ — плотности соответствующих потенциалов, n_ξ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ^+ в точке ξ, ξ — переменная точка границы Γ^+, x — переменная точка полупространства E_p^+, T_y^η — оператор обобщенного сдвига [3].

Положим

$$W(x,t)=I(x,t)+W^{(0)}(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{\Gamma^+}[\rho(\xi,\tau)-\rho(\xi\tau)]\frac{\partial}{\partial n_\xi}T_{t,x',x_p}^{\tau,\xi',\xi_p}G(x,t)\xi_p^k d\Gamma^+ + \\ +\int_{\Gamma^+}\rho(\xi,t)\xi_p^k\int_0^t\frac{\partial}{\partial n_\xi}T_{t,x',x_p}^{\tau,\xi',\xi_p}G(x,t)d\tau\, d\Gamma^+.$$

Используя схему, предложенную в работе [4], можно представить функцию $W^{(0)}(x,t)$ в виде

$$W^{(0)}(x,t)=\int_{\Gamma^+}\rho(\xi,t)\Big(-\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}(x_p\xi_p)^{-\frac{k}{2}}\frac{\cos\theta}{|x-\xi|^{p-1}}+\phi\Big)\xi_p^k d\Gamma^+,$$

где ϕ — регулярная часть интеграла $\int_0^t\frac{\partial}{\partial n_\xi}T_{t,x',x_p}^{\tau,\xi',\xi_p}G(x,t)d\tau$. Нетрудно доказать, что $I(x,t)$ — непрерывная функция.

2. *Предельные значения тепловых потенциалов типа простого и двойного слоев.* Предельные значения теплового потенциала V на Γ^+ равны его прямому значению. Очевидно, в точке $\xi_0\in\Gamma^+$ при $\xi_{0p}>0$ ядра тепловых потенциалов V и W имеют особенности такие же, что и их аналоги для уравнения теплопроводности. Следовательно, для предельных значений теплового потенциала W и нормальной производной V имеют место соотношения, аналогичные соотношениям из [4].

Теорема 1. *Пусть ν и ρ — непрерывные функции и $\Gamma^+\in\Lambda_{1,B}$. Тогда справедливы следующие предельные соотношения:*

$$W_i(\xi_0,t)=\lim_{\substack{(x,t)\to(\xi_0,t)\\ x\in D^+}}W(x,t)=\overline{W(\xi_0,t)}-\frac{1}{2}\rho(\xi_0,t), \tag{2}$$

$$W_e(\xi_0,t)=\lim_{\substack{(x,t)\to(\xi_0,t)\\ x\notin\overline{D}^+}}W(x,t)=\overline{W(\xi_0,t)}+\frac{1}{2}\rho(\xi_0,t), \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial V(\xi_0,t)}{\partial n_{\xi_0}}\right)_i=\lim_{\substack{(x,t)\to(\xi_0,t)\\ x\in D^+}}\frac{\partial V(x,t)}{\partial n_{\xi_0}}=\overline{\frac{\partial V(\xi_0,t)}{\partial n_{\xi_0}}}+\frac{1}{2}\nu(\xi_0,t), \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial V(\xi_0,t)}{\partial n_{\xi_0}}\right)_e=\lim_{\substack{(x,t)\to(\xi_0,t)\\ x\notin\overline{D}^+}}\frac{\partial V(x,t)}{\partial n_{\xi_0}}=\overline{\frac{\partial V(\xi_0,t)}{\partial n_{\xi_0}}}-\frac{1}{2}\nu(\xi_0,t), \tag{5}$$

где $\xi_0\in\Gamma^+$, $\overline{W(\xi_0,t)}$ — прямое значение теплового потенциала $W(x,t)$, $\overline{\frac{\partial V(\xi_0,t)}{\partial n_{\xi_0}}}$ — прямое значение нормальной производной теплового потенциала $V(x,t)$.

3. *Первая краевая задача.* Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1): найти в G_T^+ четное по x_p решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0}=\varphi(x) \tag{6}$$

и граничному условию

$$u|_{\Gamma_T^+}=\psi(x,t), \tag{7}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x,t)$ — четные по x_p непрерывные функции, причем $\varphi(x)|_{\Gamma^+} = \psi(x,0)$.

Теорема 2 (принцип максимального значения). *Если функция* $u \in C(\overline{G}_T^+) \cap C^2(\widetilde{G}_T^+)$, *четна по* x_p *и удовлетворяет в* $\widetilde{G}_T^+$ *уравнению* (1), *то* $u(x,t)$ *принимает наибольшее и наименьшее значение на границе* $\Gamma_T^+ \cup D^+$.

Теорема 3. *Первая краевая задача для B-параболического уравнения, т. е. задача* (1), (6), (7) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство этой теоремы очевидным образом следует из принципа максимального значения.

Решение первой краевой задачи с нулевым начальным условием

$$u|_{t=0} = 0 \tag{8}$$

находим в виде функции

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Gamma^+} \rho(\xi,\tau) \frac{\partial}{\partial n_\xi} T_{t,x',x_p}^{\tau,\xi',\xi_p} G(x,t) \xi_p^k d\Gamma^+, \tag{9}$$

которая удовлетворяет условию (8). Здесь плотность ρ — пока неопределенная функция. Подставляя функцию $u(x,t)$ в краевое условие (7) и учитывая предельные соотношения (2)–(5), найдем

$$\rho(x,t) = 2\int_0^t d\tau \int_{\Gamma^+} \rho(\xi,\tau) \frac{\partial}{\partial n_\xi} T_{t,x',x_p}^{\tau,\xi',\xi_p} G(x,t) \xi_p^k d\Gamma^+ - 2\psi(x,t).$$

Это интегральное уравнение фредгольмово по x и вольтеррово по t со слабой особенностью. Последнее обстоятельство позволяет решить это уравнение методом последовательных приближений.

Решение краевой задачи (1), (6), (7) ищем в виде

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t),$$

где w — решение задачи Коши для уравнения (1), т. е. задачи об отыскании четного по x_p ограниченного решения уравнения (1) в R_{p+1}^+, удовлетворяющего начальному условию (6), а v — решение краевой задачи об отыскании решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (8) и граничному условию

$$v|_{\Gamma_T^+} = \psi(x,t) - w(x,t)|_{\Gamma_T^+}.$$

В [3] показано, что решение задачи Коши для уравнения (1) имеет вид

$$w(x,t) = \frac{1}{2^{p+k-1}\pi^{\frac{p-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \int_{E_p^+} \varphi(\xi) T_{x',x_p}^{\xi',\xi_p} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{p+k}{2}}} \xi_p^k d\xi.$$

Литература

1. Панич О.И. *О потенциалах для полигармонического уравнения четвертого порядка* // Матем. сб. – 1960. – Т. 50. – № 3. – С. 335–368.
2. Денисова М.Ю. *О B-гармонических потенциалах* // 10-я Саратовск. зимн. школа "Совр. проблемы теории функций и их приложений". – Саратов, 2000. – С. 18–19.
3. Гарипов И.Б. *Решение задачи Коши для одного сингулярного уравнения теплопроводности методом смешанного преобразования Фурье–Бесселя* // Тр. X межвуз. научн. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи". – Самара, 2000. – С. 40–42.

4. Тихонов А.Н. *Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных* // Бюлл. МГУ. Сер. А. – 1937. – Т. 1. – № 9. – С. 1–45.

Казанский государственный педагогический университет

Поступила 25.05.2001