ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 11 (462)

Посвящается Анатолию Дмитриевичу Ляшко в связи с его семидесятилетием

УДК 519.68

Р.Р. ШАГИДУЛЛИН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПО КРИВИЗНЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

1. Введение

Исследуются выпуклые формы равновесия замкнутой бесконечно длинной упругой цилиндрической оболочки при стремлении изгибной жесткости к нулю. Упрощающие исследования предположения: касательно приложенные внешние нагрузки, а также внешние моменты отсутствуют, срединная поверхность нерастяжима, первоначальная форма оболочки круговая.

Уравнения статического равновесия цилиндрической оболочки в этих допущениях следующие [1]:

$$\frac{dT}{ds} + k(s)N(s) = 0, \quad \frac{dN}{ds} - k(s)T(s) - f(s) = 0, \quad \frac{dM}{ds} - N(s) = 0. \tag{1}$$

Здесь $T(s)$, $N(s)$ — соответственно касательное и перерезывающее усилия в точке контура деформированного цилиндра с дуговой координатой s; $f(s)$ — линейная плотность нормально действующей нагрузки; при движении в направлении возрастания s внешняя нормаль направлена вправо; $M(s)$ — изгибающий момент, связанный с кривизной направляющей $k(s)$ формулой Лява,

$$M(s) = D(k(s) - k_{\text{н}}(s)), \tag{2}$$

D — изгибная жесткость, $k_{\text{н}}(s)$ — кривизна контура цилиндра в недеформированном состоянии. Пусть s меняется в пределах интервала $[0,2]$, тогда $k_{\text{н}}(s) = \pi$. Дополнительно к (1) и (2) ставятся условия замкнутости

$$\int_0^2 \cos\left(\int_0^s k(\xi)d\xi\right)ds = \int_0^2 \sin\left(\int_0^s k(\xi)d\xi\right)ds = 0 \tag{3}$$

и условие на угол поворота касательной при полном обходе контура

$$\int_0^2 k(\xi)d\xi = 2\pi. \tag{4}$$

Рассматриваются только классические решения задачи (1), (2); предполагается, что $k(s) \in C^2[0,2]$. Из последнего уравнения (1), исключая M с помощью (2), получаем $N(s) = Dk'(s)$, и тогда из первого уравнения (1) следует, что величина

$$\omega = \frac{T(s)}{D} + \frac{1}{2}k^2(s) \tag{5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00260).

является константой, не зависящей от s. Второе уравнение системы (1) преобразуется в уравнение

$$k''(s) + \frac{1}{2}k^3(s) - \omega k(s) = \frac{1}{D}f(s). \tag{6}$$

Предположим, что нагрузка $f(s)$ симметрична относительно $s = 1$. Например, рассматривается деформация при симметричном обтекании упругого цилиндра, удерживаемого в потоке жестким защемлением в точке $s = 0$. Нет принципиальных трудностей в переносе полученных результатов на общий случай, предположение введено для упрощения доказательств. Для симметричного относительно $s = 1$ решения $k(s)$ условия (3), (4) принимают вид

$$\int_0^1 \cos\left(\int_1^s k(\xi)d\xi\right)ds = 0, \quad k'(1) = 0, \quad \int_0^1 k(s)ds = \pi. \tag{7}$$

Результаты исследования неотрицательных решений задачи (6), (7) при D, стремящемся к нулю, подытожены в теоремах 1, 2. Результат теоремы 2 получен при помощи техники, применявшейся для доказательства теоремы 1, с привлечением теории Лэре–Шаудера.

Из работ других авторов, изучавших изгиб упругого кольца, отметим работу [2]. Из нее, в частности, следует, что множество всех решений (6), (7) может быть неограниченным в пространстве $W_2^1(0,1)$. Автору настоящей статьи, однако, неизвестны публикации, содержащие результаты, подобные теореме 1.

2. Вспомогательные результаты

Пусть последовательность строго положительных чисел $D_1, D_2, \ldots$ стремится к нулю, и для каждого натурального числа n обозначим через $k_n(s)$ непрерывное неотрицательное решение уравнения (6), при условиях (7) определяющее кривую без самопересечений и соответствующее значению $D = D_n$. Функция $f(s)$ предполагается принадлежащей $C^1[0,1]$. Константа ω_n определяется задачей (6), (7).

Лемма 1. *Пусть $\omega_n D_n \geq \beta > 0$ для всех n, и пусть ε — произвольно фиксированное положительное число. Тогда существует такое число N, что любое экстремальное значение M_n функции $k_n(s)$, достигаемое в критической точке, при $n \geq N$ удовлетворяет одному из неравенств*

$$|M_n/2\sqrt{\omega_n} - 1| \leq \varepsilon \quad \textit{или} \quad M_n/\sqrt{\omega_n} \leq \varepsilon.$$

Доказательство. В дальнейшем символами $c, c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать константы, не зависящие от n; $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ — константы, от n не зависящие, которые можно брать произвольно малыми, если ограничиться достаточно большими номерами n; $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — малые константы, задаваемые априорно. Пусть M_n — произвольно фиксированное экстремальное значение функции $k_n(s)$, принимаемое этой функцией в критической точке $b_n \in [0,1]$.

Покажем существование константы c со следующим свойством: для всякого n функция $k_n(s)$ в некоторой точке a_n удовлетворяет неравенствам $k_n(a_n) \leq c$, $|k_n'(a_n)| \leq c$. Если имеет место случай $k_n'(0) \leq 0$ или $k_n(0) > \pi$, то в качестве a_n можно взять точку, где $k_n(s)$ достигает наименьшего значения. Тогда $k_n(a_n) \leq \pi$, $k_n'(a_n) = 0$. В противном случае определим положительную константу c_1 неравенствами $c_1/(c_1 - \pi) \leq 2$, $c_1 \geq \pi$. Если есть критическая точка θ_n, в которой $k_n(\theta_n) \leq c_1$, то в качестве c оставляем c_1, полагая $a_n = \theta_n$. Иначе рассмотрим наибольший интервал $[0, \sigma]$, на котором $k_n(s) \leq c_1$. Вне $[0, \sigma]$ всюду $k_n(s) > c_1$, поэтому

$$(1 - \sigma)c_1 < \int_0^1 k(s)ds = \pi \quad \text{или} \quad \sigma > 1 - \frac{\pi}{c_1}.$$

В некоторой точке θ_n интервала $[0, \sigma]$ имеем, что

$$k_n'(\theta_n) = (c_1 - k(0))/\sigma \leq c_1^2/(c_1 - \pi) \leq 2c_1.$$

Эти рассуждения показывают, что константа $2c_1$ обладает нужными нам свойствами для всех n. Введем обозначения $k_n(a_n) = m_n$, $k'_n(a_n) = l_n$. Умножая обе части уравнения (6) на $k'(s)$ и интегрируя по интервалу (a_n, s), получим следующее равенство (ниже, где это не вызывает недоразумений, индекс n опускаем для удобства записи):

$$4(k'_s)^2 = -k^4(s) + 4\omega k^2(s) + m^4 - 4\omega m^2 + 4l^2 + \frac{8}{D}\Big[f(s)k(s) - \int_a^s f'(t)k(t)dt - f(a)m\Big]. \qquad (8)$$

Отсюда, в частности, следует, что экстремальные значения функции $k(s)$ удовлетворяют соотношению

$$M^4 - 4M^2\Big(\omega + \frac{\varphi}{D}\Big) + 4\omega m^2 - m^4 - 4l^2 = 0, \qquad (9)$$

где φ обозначает величину

$$\frac{2}{M^2}\Big[f(b)M - \int_a^b f'(t)k(t)dt - f(a)m\Big].$$

Интерпретируя (9) как квадратное уравнение относительно M^2, получаем

$$M^2 = 2\Big(\omega + \frac{\varphi}{D}\Big) \pm 2\omega\sqrt{1+\alpha}, \qquad (10)$$

где

$$\alpha = \frac{2\varphi}{\omega D} + \frac{\varphi^2}{\omega^2 D^2} - \frac{m^2}{\omega} + \frac{m^4 + 4l^2}{4\omega^2}.$$

Выбору знака плюс в (10) перед квадратным корнем соответствует представление

$$M^2 = 2\Big(2\omega + 2\frac{\varphi}{D} + \frac{\varphi^2}{2\omega D^2} - \frac{m^2}{2} + \frac{m^4 + 4l^2}{8\omega} + \omega\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\alpha^j\Big). \qquad (11)$$

Минусу соответствует разложение в ряд

$$M^2 = 2\Big(\frac{m^2}{2} - \frac{\varphi^2}{2\omega D^2} - \frac{m^4 + 4l^2}{8\omega} - \omega\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\alpha^j\Big). \qquad (12)$$

Фиксируем некое положительное число E и рассмотрим экстремальные значения $M_n \geq E$. Для таких M_n числа $M_n|\varphi_n|$ равномерно ограничены по n и возможному выбору M_n, ибо

$$\Big|\int_a^b f'(t)k(t)dt\Big| \leq \max|f'(t)|\pi$$

для всех $a, b \in [0,1]$, $m_n/M_n \leq c/E$, $1/M_n \leq 1/E$. Аналогичное утверждение справедливо для последовательности α_n: $|\alpha_n| \leq c_1/M_n + \delta_1$.

Рассмотрим экстремальные значения M_n, удовлетворяющие уравнению (12) — уравнению, имеющему вид

$$\frac{M^2}{\omega} = \Big(\frac{m^2}{\omega} - \frac{m^4 + 4l^2}{4\omega^2}\Big) - \frac{\varphi^2}{\omega^2 D^2} - \alpha^2\psi(\alpha),$$

где $\psi(\alpha)$ — непрерывная, ограниченная на ограниченных интервалах функция. Учитывая оценки для φ_n, α_n, получаем неравенство $M^2/\omega \leq c_2/M^2 + \delta_2$, откуда

$$M^2 \leq (\delta_2\omega + \sqrt{\delta_2^2\omega^2 + 4c_2\omega})/2 \leq \delta_2(1+\delta_2)\omega \leq \varepsilon\omega$$

для $n \geq N_1$.

При номерах $n \geq N_1$ экстремальные значения M_n, бóльшие чем $(\varepsilon\omega)^{1/2}$, удовлетворяют, следовательно, уравнению (11), которое перепишем в виде

$$\frac{M^2}{4\omega} = 1 + \frac{\varphi}{\omega D} + \frac{\varphi^2}{4\omega^2 D^2} - \frac{m^2}{4\omega} + \frac{m^4 + 4l^2}{16\omega^2} + \alpha^2\psi(\alpha).$$

Отсюда вытекает оценка $|M^2/(4\omega) - 1| \leq c_3/(\varepsilon\omega)^{1/2} + \delta_3$. Увеличивая, если необходимо, N_1, добьемся того, чтобы $c_3/(\varepsilon\omega)^{1/2} + \delta_3 \leq \varepsilon$. Увеличивая, если необходимо, N_1 еще более, добьемся того, чтобы все экстремальные значения $M < E$ удовлетворяли соотношению $M/(2\sqrt{\omega}) \leq \varepsilon$.

Итак, требуемое разбиение экстремальных значений функции $k_n(s)$ на две непересекающиеся группы при достаточно больших номерах n получено. $\square$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Существуют положительные числа N, E такие, что для $n \geq N$ максимальный интервал (μ_n, ν_n), на котором $k_n(s) > \sqrt{\omega_n}$, если таковой существует, обладает свойством $\mu_n = 0$, $\nu_n \leq \varepsilon$; на $[2\varepsilon, 1]$ функция $k_n(s) \leq E$, на $[0, 2\varepsilon]$ функция $k_n(s) \leq c\sqrt{\omega_n}$.*

Доказательство. Число $\sqrt{\omega}$ разделяет две полученных группы экстремумов, и на одном из концов интервала (μ_n, ν_n) функция $k_n(s)$ равна $\sqrt{\omega_n}$. Допустим, что это левый конец; пусть s_n — координата первого максимума $k_n(s)$ на $[\mu_n, \nu_n]$. В следующих ниже оценках интеграла I произведена замена переменной $x = k(t)$, индексы n опущены, использовано представление производной (8)

$$I = \int_\mu^\nu k(t)dt \geq \int_\mu^s k(t)dt = \int_{\sqrt{\omega_n}}^{k(s)} x t'_x dx =$$

$$= \int_{\sqrt{\omega_n}}^{k(s)} 2x\Big(- x^4 + 4\omega x^2 + \frac{8}{D}\Big[x f(t(x)) - \int_a^{t(x)} f'(\xi) x(\xi) d\xi - f(a)m\Big] + m^4 - 4\omega^2 m^2 + 4l^2\Big)^{-1/2} dx.$$

Функция $Q(t) = -\int\limits_a^t f'(\xi)k_n(\xi)d\xi$ по модулю равномерно по n ограничена. В интеграле, оценивающем I снизу, перейдем от переменной x к переменной y: $x = 2\sqrt{\omega}y$, получим

$$I \geq \int_{1/2}^{k(s)/2\sqrt{\omega}} 2y\Big(y^2 - y^4 + \frac{1}{2\omega^2 D}(Q(t(x(y))) + f(t(x(y)))2\sqrt{\omega}y - f(a)m) + \frac{m^4 + 4l^2}{16\omega^2} - \frac{m^2}{4\omega}\Big)^{-1/2} dy.$$

Правая сторона неравенства имеет предел при $\omega \to \infty$, равный $2\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{3}\pi$. Следовательно, число обсуждаемых интервалов $[\mu, \nu]$, $k(\mu) = \sqrt{\omega}$, для рассматриваемого решения $k(s)$ при достаточно большом n не больше, чем $[\pi/(2\pi/3)] = 1$. Если бы интервал (μ, ν) был внутренним, интеграл $\int\limits_\mu^\nu k(t)dt$ оценивался бы снизу числом $4\pi/3$, что невозможно. Аналогичные рассуждения можно провести для случая $k_n(\nu_n) = \sqrt{\omega_n}$. При этом заметим, что точка первого максимума, лежащая левее ν, может не быть критической, совпадая с $s = 0$. Таким образом, приходим к выводу, что либо $\mu = 0$, либо $\nu = 1$. Заметим, что длина интервала становится сколь угодно малой с ростом n, поскольку $\nu_n - \mu_n \leq \pi/\sqrt{\omega_n}$. Для замкнутых, выпуклых форм равновесия, представляемых функцией $k_n(s)$, интервал $(\mu_n, 1)$ со свойствами, о которых идет речь в лемме, отсутствует при больших n. Действительно, на малом участке изменения s, длины меньшей ε, угол наклона касательной изменяется более, чем на

$$2\int_{\mu_n}^1 k_n(t)dt \geq \frac{4}{3}\pi - \varepsilon_1.$$

Следовательно, диаметр выпуклой фигуры, ограничиваемой контуром деформированной оболочки, меньше, чем $\varepsilon(1 + 1/(2\sin(\pi/6)))$. Соответственно, длина контура меньше, чем $3\pi\varepsilon$ ([3], с. 87), тогда как она равна 2. Поэтому далее полагаем $\mu_n = 0$. Взяв произвольно $\varepsilon > 0$, определим интервал $[\xi_n, 1]$, где в качестве ξ_n берем точку $\nu_n + \varepsilon/3$, если в интервале $(\nu_n, \nu_n + \varepsilon/3)$ нет экстремальных точек; берем первую экстремальную точку в противном случае. Убедимся, что

$$\lim_{n\to\infty} k_n(\xi_n)/\sqrt{\omega_n} = 0.$$

Действительно, пусть это не так, и $k_n(\xi_n)/\sqrt{\omega_n} = \alpha > 0$ для какой-то последовательности чисел n. Поскольку в этом случае ξ_n — не критические точки, имеем

$$\int_{\nu_n}^{1} k_n(t)dt \geq \int_{\nu_n}^{\xi_n} k_n(t)dt \geq \alpha\sqrt{\omega_n}\varepsilon/3 \to \infty$$

при $n \to \infty$. Это противоречит тому, что $\int\limits_0^1 k_n(t)dt = \pi$. По свойству экстремумов каждой группы из доказанного следует, что на интервалах $[\xi_n, 1]$ отношение $k_n(s)/\sqrt{\omega_n}$ равномерно по s стремится к нулю при $n \to \infty$.

Возьмем число E такое, чтобы выполнялось соотношение $\max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| \leq \frac{1}{4}\beta E$. На любом подинтервале $\Delta_n \subseteq [\xi_n, 1]$, где $k_n(s) \geq E$, функция $k_n(s)$ выпуклая. Действительно, для $t \in \Delta_n$ имеем $k_n''(t) = \omega_n k_n(t)\big(1 - \frac{1}{2}\frac{k_n^2(t)}{\omega_n} + \frac{f(t)}{D_n\omega_n k_n(t)}\big)$. Последнее слагаемое в скобках допускает оценку

$$\left|\frac{f(t)}{D_n\omega_n k_n(t)}\right| \leq \frac{|f|_\infty}{\beta E} \leq \frac{1}{4},$$

поскольку $k_n^2(t) \leq \omega_n$, то для достаточно больших n имеем $k_n''(t) \geq \frac{1}{4}\omega_n k_n(t) > 0$. Пусть Δ_n — максимальный интервал, на котором $k_n(s) \geq E$. Из выпуклости $k_n(s)$ на Δ_n следует, что Δ_n не может быть внутренним подинтервалом в $[\xi_n, 1]$, поэтому множество $t : t \in [\xi_n, 1],\ k_n(t) \geq E$, представляется интервалом $[\xi_n, \theta_n]$. На $[\xi_n, \theta_n]$ функция $k_n(s)$ монотонно убывает, $k_n'(\theta_n) \leq 0$, с учетом этого для точек $t \in [\xi_n, \theta_n]$ проводим следующие оценки:

$$k_n'(\theta) - k'(t) = \int_t^\theta k''(s)ds \geq (\theta - t)\frac{1}{4}\omega E,$$

$$-k'(t) \geq (\theta - t)\frac{1}{4}\omega E,$$

$$k(t) - k(\theta) = -\int_t^\theta k'(s)ds \geq \int_t^\theta (\theta - t)\frac{1}{4}\omega E\,dt = \frac{1}{8}(\theta - t)^2\omega E,$$

$$k(\xi_n) \geq \frac{1}{8}(\theta_n - \xi_n)^2\omega E.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(\xi_n)/\sqrt{\omega_n} = 0$, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\theta_n - \xi_n) = 0$. Поэтому $|\nu_n - \mu_n| \leq \varepsilon/3$, $(\theta_n - \xi_n) \leq \varepsilon/3$ для достаточно больших n. □

Лемма 3. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n D_n = \infty$ и ε — произвольное фиксированное положительное число, то справедливо утверждение леммы 2 с заменой E на $E_n = 1/\sqrt{\omega_n D_n}$.*

Доказательство такое же, как и для леммы 2. Величина $|\frac{f(t)}{D_n\omega_n k_n(t)}|$ теперь меньше, чем $C/D_n\omega_n E_n$ — числа, стремящегося к нулю при $n \to \infty$. В соответствующем месте оцениваем $k_n(\xi_n) \geq (\theta_n - \xi_n)^2\omega_n E_n = (\theta_n - \xi_n)^2\sqrt{\omega_n/D_n}$, и учитываем, что $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(\xi_n)/\sqrt{\omega_n} = 0$.

Лемма 4. *Пусть последовательность положительных функций $k_n(s)$ представляет решения уравнения (6) при условиях замкнутости (3) и симметричности нагрузки $f(s)$ относительно $s = 1$. Пусть дополнительно выполнено условие $\varliminf\limits_{n\to\infty} |\omega_n| D_n = \beta > 0$. Тогда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |\omega_n| D_n < \infty$.*

Доказательство. Предполагая противное, примем, что $\lim\limits_{n\to\infty}|\omega_n|D_n = +\infty$. Рассмотрим случай $\omega_n > 0$ для всех n. Согласно лемме 3 функция $k_n(s)$ ограничена числом $E_n = 1/\sqrt{\omega_n D_n}$ вне интервала $[0, 2\varepsilon]$ при произвольно взятом $\varepsilon > 0$, если n достаточно большое. При этом $\int\limits_0^{2\varepsilon} k_n(t)dt \le \frac{2}{3}\pi$, ибо противоположное неравенство ведет к противоречию (см. доказательство леммы 2). Следовательно, $\int\limits_{2\varepsilon}^{1} k_n(t)dt \ge \frac{\pi}{3}$, с другой стороны, $\int\limits_{2\varepsilon}^{1} k_n(t)dt \le \frac{1}{\sqrt{\omega_n D_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Обратимся теперь к случаю, когда $\omega_n < 0$ для всех n. Интегрируя по интервалу $(0,1)$ равенство $-\omega_n D_n k_n(s) = -D_n k_n''(s) - \frac{1}{2}D_n K_n^3(s) + f(s)$, получим при условиях (7), что $-D_n\omega_n\pi \le \int\limits_0^1 f(s)ds + D_n k_n'(0)$. Оценим $k_n'(0)$, исходя из формулы (8), $4(k'(0))^2D^2 \le -4\omega D^2 c + Dk(0)c_1 + c_2$.

Рассуждения, использованные при доказательстве леммы 1, проходят и для случая $\omega < 0$, поэтому имеем $k(0) \le c_3\sqrt{|\omega|}$. Собирая вместе три последних неравенства, получаем $2\pi^2(D\omega)^2 \le 4Dc|\omega D| + c_1c_3\sqrt{D}\sqrt{|\omega D|} + c_4$. Это соотношение не может выполняться для сколь угодно больших значений $|\omega D|$. Полученные противоречия опровергают предположение. □

3. Поведение положительных по $k(s)$ решений системы (1), (3), (4) при $D \to 0$

Теорема 1. *Пусть для каждого $D_n > 0$, где $D_n \to 0$, $n = 1, 2, \dots$, выбрано положительное непрерывное решение $k_n(s)$ уравнения (6), где $s \in (0,1)$, а дополнительными выступают условия (7). Пусть,далее, функция $f \in C^1[0,1]$ и не равна тождественно нулю. Тогда справедливы следующие утверждения.*

Последовательность $k_n(s)$ допускает оценку $k_n(s) \le C/\sqrt{D_n}$ с константой C, не зависящей от s, n. При сколь угодно малом $\delta > 0$ последовательность $k_n(s)$ равномерно ограничена на отрезке $[\delta, 1]$.

В пространстве $C[0,1]$ ограничена соответствующая $k_n(s)$ последовательность функций касательных усилий $T_n(s)$, а функции момента $M_n(s)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$. Перерезывающие усилия $N_n(s)$ стремятся к нулю равномерно на $[0,1]$, если $\omega_n < 0$, или на $[\delta, 1]$, если $\omega_n > 0$.

Если $\omega_n > 0$, то некоторая подпоследовательность $k_n(s)$ слабо сходится в $L_2(\delta, 1)$ к $k_0(s)$, а соответствующие $T_n(s)$ равномерно сходятся к константе T_0 при любом $\delta > 0$. При этом $k_0(s)$, T_0 не зависят от δ и являются решениями системы (1) при $N = M = 0$ в области $(0,1)$ с условием

$$\int_0^1 \cos\Big(\int_s^1 k_0(\xi)d\xi\Big)ds = 0.$$

Доказательство. Проверим, что $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty}|\omega_n|D_n > 0$. Предположим противное, и пусть $\varliminf\limits_{n\to\infty}|\omega_n|D_n = 0$. Для соответствующей подпоследовательности перепишем (10) в виде

$$M^2D = 2\Big(\omega D + \varphi \pm (\omega^2D^2 + 2\varphi\omega D + \varphi^2 - \omega D^2m^2 + \tfrac{1}{4}D^2(m^4 + 4l^2))^{1/2}\Big). \tag{13}$$

Убедимся, что $\lim\limits_{n\to\infty}(M_n^2D_n) = 0$. Если это не так, то некоторая подпоследовательность M_{n_j} стремится к бесконечности. Следовательно, φ_{n_j} стремятся к нулю, ибо допускают оценку $|\varphi_{n_j}| \le c_1/M_{n_j} + c_2/M_{n_j}^2$. Итак, в (13) все слагаемые стремятся к нулю, поэтому $\lim\limits_{j\to\infty}(M_{n_j}^2D_{n_j}) = 0$. Противоречие доказывает утверждение. Фиксируем $\gamma > 0$. Последовательность $k_n^2(\gamma)D_n$ также стремится к нулю, ибо в противном случае для некоторой подпоследовательности $k_{n_j}^2(\gamma)D_{n_j} \ge c$. Кроме того, на $[0,\gamma]$ функции $k_n(s)$ в этом случае убывают. Следовательно, $\pi \ge \int\limits_0^{\gamma} k_n(s)ds \ge$

$\frac{c}{\sqrt{D_n}}\gamma \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Из основного уравнения (6) для $e, d \in [\gamma, 1]$ получаем

$$\int_e^d D_n(\tfrac{1}{2}k_n^2(s) - \omega_n)k_n(s)ds + D_n(k_n'(d) - k_n'(e)) = \int_e^d f(s)ds.$$

Левый интеграл I допускает оценку

$$|I| \le \varepsilon_n \int_e^d k_n(s)ds = \pi\varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = \max_{\gamma\le s\le 1}(|\tfrac{1}{2}k_n^2(s) - \omega_n|D_n), \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Для оценки внеинтегрального слагаемого вновь обращаемся к основной "рабочей" формуле (8)

$$4D^2(k'(s))^2 \le 4|\omega|D^2k^2(s) + D^2|\omega|c_1 + Dk(s)c_2 + Dc_3.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что $\int\limits_e^d f(s)ds = 0$, следовательно, $f(s) \equiv 0$ на $[0, 1]$ в противоречие с допущениями теоремы. Итак, $\beta > 0$. (Исключительный случай $f(s) \equiv 0$ на $[0, 1]$ рассмотрен в лемме 7.)

Леммы 1, 2 (или их доказательства, очевидным образом измененные для случая $\omega < 0$) приводят к оценке $k_n(s) \le 2\sqrt{|\omega_n|}(1 + \varepsilon_n)$, $\varepsilon_n \to 0$, $s \in [0, 1]$; и к оценке $k_n(s) \le E$ на $[\delta, 1]$. Утверждаемое относительно последовательности $k_n(s)$ следует теперь из леммы 4.

Вспомним, что $\omega_n = k_n^2(s)/2 + T_n(s)/D_n$. Поэтому $|T_n|/D_n \le |\omega_n| + k_n^2(s)/2$. Учитывая, что $|\omega_n| \le C/D_n$, $k_n(s) \le C/\sqrt{D_n}$, получаем для некоторой константы c оценку $|T_n(s)| \le c$ для всех n и всех $s \in [0, 1]$.

Утверждение для моментной функции следует из равенства $M_n(s) = D_n(k_n(s) - k_{\text{н}}(s))$ и полученной уже оценки $k_n(s)$, утверждения относительно последовательности $N_n(s) = Dk_n'(s)$ вытекают из формулы (8) и лемм 2, 4.

Предположим, наконец, что все ω_n положительны. Для любой финитной в $(0, 1)$ функции $\varphi(s)$ имеем

$$\int_0^1 \varphi(s)N_n'(s)ds = -\int_0^1 \varphi'(s)N_n(s)ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

вся последовательность $N_n'(s)$ в смысле распределений стремится к нулю в области $(0, 1)$. Пусть последовательность $k_{n_j}(s)$ сходится слабо к $k_0(s)$ в $L_2(\delta, 1)$; вследствие первого уравнения системы (1) $T_{n_j}(s) \to T_0$ при $j \to \infty$ в $C[\delta, 1]$, где T_0 — константа. Переходя к пределу во втором уравнении (1) по последовательности n_j, получаем в области $(\delta, 1)$ равенство в смысле распределений

$$-k_0(s)T_0 - f(s) = 0. \tag{14}$$

Ввиду непрерывности $f(s)$ равенство (14) имеет место поточечно. Уменьшая δ и выбирая подпоследовательность из предыдущей последовательности, убеждаемся, что (14) имеет место в области $(0, 1)$. Для $k_0(s) = -f(s)/T_0$ сохраняется условие замкнутости

$$\int_0^1 \cos\left(\int_s^1 k_0(\xi)d\xi\right)ds = 0. \quad \square$$

Замечание. Если рассматриваемое как уравнение относительно T_0 последнее равенство имеет не более одного физически приемлемого решения, то вся исходная последовательность $k_n(s)$ сходится к $k_0(s)$ в смысле распределений в области $(0, 1)$.

Теорема 1 может быть использована для организации вычислений напряженно-деформированного состояния моментной оболочки как безмоментной с поправками типа погранслоя. В линейной постановке для сетчатых оболочек вращения алгоритм подобных вычислений подробно изложен в [4].

Теорема 1 сохраняет силу, если учитывать растяжимость срединной поверхности оболочки при линейном законе Гука, но при этом на последовательность положительных решений $k_n(s)$

накладывать дополнительное условие $\Lambda \geq \lambda_n(s) \geq \lambda > 0$ для всех n, где $\lambda_n(s) = ds/d\sigma$ — степень удлинения, σ — дуговая координата, отсчитываемая по недеформированному контуру.

Можно априори утверждать, что константа $\omega > 0$, если $f(s) \leq 0$.

4. Существование положительных решений

Технику доказательства лемм 1–4 можно использовать и для получения теоремы существования положительных решений задачи (6), (7).

Лемма 5. *Пусть $f(s) \leq 0$, $f \in C^1[0,1]$. Введем функцию $\varphi(s;t) = \frac{t}{D} f(s)$, D — фиксированная изгибная жесткость, параметр t меняется в интервале $[0,1]$.*

Множество положительных решений задачи

$$k''(s) + \frac{1}{2}k^3(s) - \omega k(s) = \varphi(s;t), \quad s \in (0,1), \tag{15}$$

при условиях (7) для всевозможных $t \in [0,1]$ ограничено в пространстве $W_2^{(1)}[0,1]$.

Доказательство. Пусть t_n таковы, что решения $k_n(s) \geq 0$, а соответствующие ω_n стремятся к бесконечности; это влечет, конечно, равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(\omega_n D) = \infty$. Последовательно проводим рассуждения лемм 1–4 с очевидными изменениями и приходим к противоречию, как в лемме 4. Отсюда следует, что множество всех ω, соответствующих положительному решению задачи (15), (7) при каком-либо t, ограничено.

Рассмотрим скалярное произведение

$$- \left(k''(s) + \tfrac{1}{2}k^3(s) - \omega k(s), k(s)\right) = -\int_0^1 k(\xi)'' k(\xi) d\xi - \tfrac{1}{2}\int_0^1 k^4(\xi) d\xi + \\ + \omega \int_0^1 k^2(\xi) d\xi = -(k'k)\big|_0^1 + \int_0^1 (k'(\xi))^2 d\xi - \tfrac{1}{2}\int_0^1 k^4(\xi) d\xi + \omega \int_0^1 k^2(\xi) d\xi. \tag{16}$$

Элементарные выкладки показывают, что

$$k'(0) = \frac{1}{D} N(0) = -\int_0^1 \varphi(s,t) \cos\left(\int_0^s k(\xi) d\xi\right) ds.$$

Следовательно, $|k'(0)| \leq c_1$, где c_1 — априорно вычисляемая константа. С другой стороны, по теореме вложения $W_2^{(1)}(0,1)$ в $C[0,1]$ имеем $k(0) \leq c_2\|k\|_{1,2}$, где $\|\cdot\|_{p,q}$ обозначает норму в соболевском пространстве $W_p^{(q)}(0,1)$. Фиксируя $\varepsilon > 0$, оценим первое слагаемое в правой части (16) следующим образом:

$$|k(1)k'(1) - k(0)k'(0)| \leq \varepsilon \|k\|_{1,2}^2 + \frac{c_3}{\varepsilon}.$$

Приступим к оценке третьего слагаемого в правой части (16). Для этого функцию $k(s)$ симметрично продолжим на интервал $[0,2]$. Пусть a — первая точка из $[0,1]$, где $k(s)$ достигает абсолютного минимума $m \leq \pi$. Отрезок графика функции $k(s)$ на интервале $[2-a, 2]$ симметрично продолжаем за точку 2 на интервал $[2, 2+a]$. Положим

$$y(s) = \begin{cases} k(s) - m, & s \in [a, 2+a]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определенная на всей прямой неотрицательная функция $y(s)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет всем условиям применимости мультипликативного неравенства Наги ([5], с. 383). Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^4(s) ds \leq c_4 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(s) ds\right]^{3/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (y_s'(s))^2 ds\right]^{1/2},$$

или

$$2\int_0^1 (k(s)-m)^4 ds \le c_4\Big[2\int_0^1 (k(s)-m)^2 ds\Big]^{3/2}\Big[2\int_0^1 (k'(s))^2 ds\Big]^{1/2}. \tag{17}$$

Учтем, что ограниченность констант ω_n вследствие равенства

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 k^3(\xi)d\xi - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varphi(\xi,t)d\xi - \frac{1}{\pi}k'(0)$$

равносильна ограниченности норм $k(s)$ в $L_3(0,1)$ равномерно по t, и, следовательно, ограничены интегралы

$$\int_0^1 k_n^2(s)ds.$$

Простыми вычислениями из (17) получаем $\frac{1}{2}\int\limits_0^1 k^4(\xi)d\xi \le \varepsilon\int\limits_0^1 (k'(\xi))^2 d\xi + \frac{c_5}{\varepsilon}$. Вследствие того же замечания относительно ω

$$\omega\int_0^1 k^2(\xi)d\xi \le c_6.$$

Собирая полученные оценки слагаемых последнего выражения в (16), имеем

$$(1-2\varepsilon)\|k\|_{1,2}^2 \le c_6 + \|k'' + \tfrac{1}{2}k^3 - \omega k\|_{0,2}\|k\|_{0,2}.$$

Используя ε-неравенство Коши и непрерывность оператора вложения для соответствующих пространств, получаем

$$(1-2\varepsilon)\|k\|_{1,2}^2 \le c_6 + \frac{1}{2}\bigg(\frac{\|\varphi(s,t)\|_{0,2}^2}{\varepsilon} + \varepsilon\|k\|_{1,2}^2\bigg).$$

При достаточно малом ε отсюда следует искомая оценка $\|k\|_{1,2}^2 \le c_7$. $\square$

Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений относительно функции $k(s)$ и констант d, ω:

$$\begin{gathered} k(s) = d_+ + \int_0^s \int_1^\sigma [-\tfrac{1}{2}k_+^3(\xi) + \omega k(\xi) + \varphi(\xi,t)]d\xi\, d\sigma, \\ d = \int_0^1 k(\xi)d\xi - \pi + d, \quad \omega = \int_0^1 \cos\bigg(\int_1^s k(\xi)d\xi\bigg)ds + \omega. \end{gathered} \tag{18}$$

Здесь $k_+(\xi)$ — положительная часть функции $k(\xi)$, аналогично $d_+ = d$, если $d \ge 0$, иначе $d_+ = 0$.[1]

Лемма 6. *Пусть* $(k(s), d, \omega)$ *— решение уравнений* (18) *в пространстве* $X = C[0,1]\times E_1\times E_1$ (E_1 *— одномерное евклидово пространство), тогда* $k(s)$ *есть неотрицательное решение задачи* (6), (7).

Доказательство. Дважды дифференцируя первое уравнение системы (18), получаем

$$k''(s) + \frac{1}{2}k_+^3(s) - \omega k(s) = \varphi(s,t). \tag{19}$$

Помимо этого, из (18) следует, что $k(0) = d_+ \ge 0$, $k'(1) = 0$. Умножение (19) скалярно в пространстве $L_2(0,1)$ на функцию $k_-(s)$ (отрицательную часть $k(s)$) приводит к равенствам

$$\begin{gathered} (k'(s)k_-(s))\big|_0^1 - \int_0^1 k'(s)k'_-(s)ds - \omega\int_0^1 k(s)k_-(s)ds = \int_0^1 \varphi(s,t)k_-(s)ds, \\ \int_0^1 (k'_-(s))^2 ds + \omega\int_0^1 (k_-(s))^2 ds = \int_0^1 \varphi(s,t)k_-(s)ds. \end{gathered}$$

[1]Переход от функции $k(\xi)$ к $k_+(\xi)$ подсказан Р.З. Даутовым.

Левая часть последнего равенства неотрицательна, правая согласно предположениям на функцию φ — неположительна. Следовательно, $\int\limits_0^1 (k'_-(s))^2 ds = 0$, поэтому $k_-(s) = 0$. $\square$

Оператор A_t, определяемый правой частью (18), в пространстве X вполне непрерывен. Согласно лемме 5 найдется открытый шар $B_R(\theta)$ радиуса R с центром в нулевой точке θ пространства X, вне которого решения уравнения (18) отсутствуют.

Лемма 7. *Уравнение* (6) *при условиях* (3), (4), *если* $f(s) \equiv 0$, *имеет единственное положительное решение* $k(s) \equiv \pi$, $\omega = \pi^3/2$; *и оператор* $1 - A_0$ *в некоторой окрестности точки* $(\pi, \pi, \pi^3/2)$ *взаимно однозначен.*

Доказательство. Фиксируем некоторое положительное решение $k(s)$ задачи (6), (3), (4) при $f(s) \equiv 0$. Для его производной из (6) получаем представление

$$4(k'(s))^2 = -k^4(s) + 4\omega k^2(s) + c_0. \tag{20}$$

Не теряя общности рассуждений, можем считать, что в точке $s = 0$ функция $k(s)$ принимает свое наибольшее значение M. Поэтому $c_0 = M^2(M^2 - 4\omega)$. Другое выражение для c_0 получим, привлекая вторую производную $k(s)$,

$$c_0 = 4(k'(s))^2 + k^4(s) - 4\omega k^2(s) = 4(k'(s))^2 - 2k(s)k''(s) - 2\omega k^2(s) = 6(k'(s))^2 - (k^2(s))'' - 2\omega k^2(s).$$

Существует точка ξ, где функции $k^2(s)$ и $k(s)$ принимают минимальные значения. Воспользуемся этим для оценки постоянной c_0

$$\omega = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} k^3(\tau)d\tau > 0, \quad c_0 = -(k^2(\xi))''_{\xi\xi} - 2\omega k^2(\xi) < 0.$$

Следовательно, $4\omega - M^2 = m^2$ для некоторого m, и для производной в (20) можем написать новое выражение:

$$4(k'(s))^2 = -k^4(s) + M^4 + 4\omega k^2(s) - 4\omega M^2 = (-k^2(s) + M^2)(-m^2 + k^2(s)). \tag{21}$$

Отсюда видно, что $M^2 \geq k^2(s) \geq m^2$, $4\omega \geq M^2 \geq 2\omega$, а экстремальные значения $k(s)$ суть M и m.

Предположим, что $M \neq m$, а s_M и s_m — последовательные значения s, в которых $k(s_M) = M$, $k(s_m) = m$; можем считать, что $s_m < s_M$. Значение $k(s)$, $s \in [s_m, s_M]$, входит в следующее равенство:

$$\int_{s_m}^{s} ds = \int_{m}^{k(s)} \frac{2dx}{\sqrt{(M^2 - x^2)(x^2 - m^2)}}. \tag{22}$$

Здесь мы воспользовались заменой переменной $x = k(s)$ и формулой (21). Из (22) следует, что $k(s)$ — периодическая функция с периодом $2(s_M - s_m)$; пусть n — целое число периодов на интервале $[0, 2]$: $n = 1/(s_M - s_m)$. Оценим теперь интеграл $\int\limits_{s_m}^{s_M} k(s)ds$ с помощью той же самой замены

$$\frac{\pi}{n} = \int_{s_m}^{s_M} k(s)ds = \int_{m}^{M} \frac{2x\,dx}{\sqrt{(M^2 - x^2)(x^2 - m^2)}}.$$

Поскольку последний интеграл равен π, отсюда получаем $n = 1$. Но по теореме о четырех вершинах ([2], с. 60–62) замкнутая выпуклая кривая с непрерывно меняющейся касательной имеет, как минимум, четыре точки с экстремальными значениями $k(s)$. Полученное противоречие показывает, что $m = M$, и решение $k(s)$ равно постоянной, которую легко находим подстановкой в уравнение (6).

Элементарными выкладками проверяется, что единица не есть собственное число производной Фреше оператора A_0 в точке $P = (\pi, \pi, \pi^3/2)$. Это обеспечивает локальную взаимную однозначность отображения $1 - A_0$ в окрестности этой точки. Действительно, обозначим возмущение точки $P = (k_0(s), d_0, \omega_0)$ через $h_1(s)$, h_2, h_3. Ввиду положительности компонент точки P и малости возмущений $(d_0 + h_2)_+ - d_{0+} = h_2$, $(k_0 + h_1)_+^3 - (k_{0+})^3 = (k_0 + h_1)^3 - k_0^3$. Отсюда легко находим, что равенство $A_0'(P)h = h$, где $h = (h_1(s), h_2, h_3) \in X$, представляется системой уравнений

$$h_2 + \int_0^s \int_1^\sigma \left[\frac{\pi^2}{2}(\pi - 3)h_1(\xi) + \pi h_3\right] d\xi\, d\sigma = h_1(s),$$

$$h_2 + \int_0^1 h_1(\xi)d\xi = h_2, \quad h_3 - \int_0^1 \left(\sin(\pi s) \int_1^s h_1(\xi)d\xi\right) ds = h_3. \tag{23}$$

Для решения $h_1(s)$ имеем условия (следующие из второго и третьего уравнений (23))

$$\int_0^1 h_1(s)ds = 0, \quad \int_0^1 \cos(\pi s)h_1(s) = 0. \tag{24}$$

Покажем также, что $h_1'(0) = 0$, $h_1'(1) = 0$. Второе равенство немедленно следует из первого уравнения (23). Для получения другого равенства первое уравнение (23) дважды продиффеоенцируем по s

$$h_1''(s) - \alpha^2 h_1(s) = \pi h_3, \quad \alpha^2 = \frac{\pi^2}{2}(\pi - 3). \tag{25}$$

Умножим это равенство на $\cos(\pi s)$ и проинтегрируем по области $(0, 1)$

$$\int_0^1 h_1''(s)\cos(\pi s)ds = 0.$$

Последующие преобразования дают

$$\cos(\pi s)h_1'(s)\big|_0^1 + \pi \int_0^1 h_1'(s)\sin(\pi s)ds =$$
$$= -h_1'(0) + \pi \sin(\pi s)h_1(s)\big|_0^1 - \pi^2 \int_0^1 h_1(s)\cos(\pi s)ds = -h_1'(0) = 0.$$

Интегрируя вновь уравнение (25) по $(0, 1)$, получаем $h_3 = 0$.

Общее решение для однородного уравнения (25) записывается в виде $h_1(s) = c_1 e^{\alpha s} + c_2 e^{-\alpha s}$. Константы c_1, c_2 вычисляются из условий (24):

$$c_1(e^\alpha - 1) - c_2(e^{-\alpha} - 1) = 0, \quad c_1(e^\alpha + 1) - c_2(e^{-\alpha} + 1) = 0.$$

Определитель этой системы отличен от нуля. Поэтому $c_1 = c_2 = 0$, $h_1(s) \equiv 0$. Из первого уравнения (23) следует теперь, что $h_2 = 0$. Таким образом, утверждение о производной Фреше, а вместе с тем и лемма, доказаны. □

Однопараметрическое семейство вполне непрерывных операторов A_t преобразования банахова пространства X в себя, $0 \le t \le 1$, равностепенно непрерывно по t на шаре $B_R(\theta)$, не имеет на границе этого шара неподвижных точек, а вращение векторного поля $1 - A_0$ на $\partial B_R(\theta)$ равно единице, как следует из леммы 7. Следовательно, выполнены условия теоремы Лере–Шаудера ([6], с. 128–145), и имеет место

Теорема 2. *Пусть $f(s) \le 0$, $f \in C^1[0, 1]$. Тогда задача (6), (7) имеет неотрицательное решение.*

Литература

1. Галимов К.З. *Основы нелинейной теории тонких оболочек.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1975. – 326 с.
2. Таджибахш И. *Формы изгиба упругих колец* // В кн. "Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения". – М.: Мир, 1974. – С. 46–62.
3. Яглом И.М., Болтянский В.Г. *Выпуклые фигуры.* – М.–Л.: ГИЗТТЛ, 1951. – 344 с.
4. Клабукова Л.С., Пшеничнов Г.И. *Решение краевых задач моментных сетчатых оболочек вращения как безмоментных с поправами типа погранслоя* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1995. – Т. 35. – № 12. – С. 1854–1871.
5. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. *Неравенства.* – М.: Ин. лит., 1948. – 456 с.
6. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* – М.: ГИТТЛ, 1956. – 392 с.

Казанский государственный университет

Поступила
22.11.1999