ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 5 (504)

УДК 519.854

Г.Г. ЗАБУДСКИЙ, Д.В. ФИЛИМОНОВ

РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ НА СЕТИ

1. *Постановка задачи.* Рассматривается минимаксный вариант задачи Вебера [1]–[5]. Требуется разместить n новых объектов $v_1, \dots, v_m$ в вершинах связной неориентированной сети, в которых расположены фиксированные объекты. В одной вершине можно размещать любое количество новых объектов. Пусть $d(v_i, v_s)$ — длина кратчайшего пути между вершинами v_i и v_s в сети, w_{ij} и v_{jk} — неотрицательные удельные стоимости связей между фиксированным объектом i и размещаемым j, а также размещаемых объектов j и k между собой, c_{ij} и b_{jk} — максимально допустимые расстояния между соответствующими объектами и пусть $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$. Размещением объектов назовем однозначное отображение $\pi : J \to I$, т.е. новый объект j размещается в вершину $v_{\pi(j)}$. Необходимо найти размещение, минимизирующее максимальную стоимость связи между объектами и удовлетворяющее ограничениям

$$\max(\max_{j,k\in J, j<k} v_{jk} d(v_{\pi(j)}, v_{\pi(k)}), \max_{i\in I, j\in J} w_{ij} d(v_i, v_{\pi(j)})) \to \min, \tag{1}$$

$$d(v_{\pi(j)}, v_{\pi(k)}) \le b_{jk}, \quad j,k \in J, \quad j < k, \tag{2}$$

$$d(v_i, v_{\pi(j)}) \le c_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J. \tag{3}$$

На произвольной сети задача (1)–(3) является NP-трудной [6]. Для решения задачи на древовидной сети в непрерывной постановке, т. е. когда допускается размещение объектов на дугах, разработаны полиномиальные алгоритмы [2], [5]. В [4] предложен полиномиальный алгоритм решения задачи (1)–(3) на дереве.

2. *Дискретные условия отделимости.* Известна следующая эквивалентная формулировка задачи (1)–(3) [5]:

$$z \to \min, \tag{4}$$

$$d(v_{\pi(j)}, v_{\pi(k)}) \le \min(z/v_{jk}, b_{jk}), \quad j,k \in J, \quad j < k, \tag{5}$$

$$d(v_i, v_{\pi(j)}) \le \min(z/w_{ij}, c_{ij}), \quad i \in I, \quad j \in J. \tag{6}$$

В [5] представлены необходимые и достаточные условия совместности ограничений (5)–(6) для непрерывной постановки задачи на древовидной сети для фиксированного z, называемые *условиями отделимости.* Для формулировки указанных условий при фиксированном значении z строится вспомогательная связная сеть $N(z)$. Каждому фиксированному объекту i ставится в соответствие узел E_i, $i \in I$, а каждому новому объекту j — узел N_j, $j \in J$. Вершины N_j и N_k соединяются дугой длины $l(N_j, N_k) = \min(z/v_{jk}, b_{jk})$, а вершины E_i и N_j — дугой длины $l(E_i, N_j) = \min(z/w_{ij}, c_{ij})$. *Прямым* путем в сети $N(z)$ между вершинами E_s и E_t (или N_j) называется путь, не содержащий вершин E_i, $i \ne s, t$. Обозначим через $L(E_s, E_t : z)$ длину кратчайшего прямого пути в сети $N(z)$ между вершинами E_s и E_t. Тогда условия отделимости имеют вид

$$L(E_s, E_t : z) \ge d(v_s, v_t), \quad s,t \in I, \quad s < t.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта INTAS 00-217.

Для общей сети указанные условия являются только необходимыми.

Пусть $L(E_s, N_j : z)$ — длина кратчайшего прямого пути между вершинами E_s и N_j в сети $N(z)$.

Теорема. *Если для фиксированного z существует размещение, удовлетворяющее ограничениям* (5)–(6), *то выполнены следующие дискретные условия отделимости*:

$$\forall j \in J \ \exists i \in I : L(E_s, N_j : z) \geq d(v_s, v_i), \quad s \in I. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть для некоторого z существует размещение π, удовлетворяющее (5)–(6) и дискретные условия отделимости не выполнены, т. е. $\exists j \in J$ такое, что $\forall i \in I \ \exists s \in I$, при котором неравенство (7) не выполняется. Полагаем $i = \pi(j)$. Пусть $(E_s, N_{j_1}, N_{j_2}, \ldots, N_{j_p}, N_j)$ — кратчайший прямой путь в $N(z)$ между E_s и N_j. Очевидно, для длин кратчайших путей между любыми вершинами v_q, v_r, v_t выполнено неравенство треугольника

$$d(v_q, v_r) + d(v_r, v_t) \geq d(v_q, v_t).$$

Из допустимости π и неравенства треугольника, имеем

$$L(E_s, N_j : z) = l(E_s, N_{j_1}) + \sum_{k=1}^{p-1} l(N_{j_k}, N_{j_{k+1}}) + l(N_{j_p}, N_j) \geq$$

$$\geq d(v_s, v_{\pi(j_1)}) + \sum_{k=1}^{p-1} d(v_{\pi(j_k)}, v_{\pi(j_{k+1})}) + d(v_{\pi(j_p)}, v_{\pi(j)}) \geq d(v_s, v_i).$$

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Трудоемкость вычисления величин $L(E_s, N_j : z)$ равна $O(mn^2)$, проверка дискретных условий отделимости требует $O(nm^2)$ операций.

3. *Алгоритм ветвей и границ.* Опишем основанный на схеме ветвей и границ алгоритм решения задачи (1)–(3) на произвольной сети. Принцип ветвления основан на последовательном размещении новых объектов в вершинах сети при условии выполнения ограничений на максимальные расстояния. Без ограничения общности полагаем, что новые объекты нумеруются с использованием невозрастания удельных стоимостей связи между ними. Дерево решений имеет следующий вид. Любому узлу на уровне j взаимно-однозначно соответствует множество допустимых размещений D_{hj} таких, что $\pi(j) = h$ для любого $\pi \in D_{hj}$. Корню дерева решений отвечает множество размещений, удовлетворяющих ограничениям (2)–(3)

$$D_{00} = \{\pi : d(v_{\pi(j)}, v_{\pi(k)}) \leq b_{jk}, \ j, k \in J, \ j < k, \ d(v_i, v_{\pi(j)}) \leq c_{ij}, \ i \in I, \ j \in J\}.$$

Если $D_{hj} \neq \emptyset$, то соответствующий узел дерева решений имеет m потомков

$$D_{i,j+1} = D_{hj} \cap \{\pi : \pi(j+1) = i\}, \quad i \in I.$$

Нетрудно видеть, что для любого j выполнены соотношения

$$D_{hj} = \bigcup_{i \in I} D_{i,j+1},$$

$$D_{i,j+1} \cap D_{lj+1} = \emptyset, \quad i, l \in I, \quad i \neq l.$$

Пусть $K \subseteq J$ — множество размещенных объектов на очередном шаге алгоритма. Нижняя оценка значения целевой функции, соответствующая узлу D_{ij} дерева решений, вычисляется следующим образом:

$$\max\{\max_{r,k \in K, \ r<k} v_{rk} d(v_{\pi(r)}, v_{\pi(k)}), \max_{l \in I, k \in K} w_{lk} d(v_l, v_{\pi(k)}),$$

$$\max_{k \in J/K} [\min_{s \in I} \max(\max_{r \in K} v_{rk} d(v_{\pi(r)}, v_s), \max_{l \in I} w_{lk} d(v_l, v_s))]\}, \quad \pi \in D_{ij}.$$

Отметим, что нижняя оценка определяется корректно. Трудоемкость ее вычисления равна $O(nm(n+m))$.

Используя в качестве z имеющееся рекордное значение целевой функции, производится отсев неперспективных ветвей в случае, если не выполняются дискретные условия отделимости.

Верхнюю оценку оптимального значения целевой функции (1) предлагается находить с помощью изложенного ниже алгоритма, решая задачу (1)–(3) на остовном дереве минимального веса исходной сети.

Для решения эквивалентной задачи (4)–(6) на древовидной сети в [4] предложен следующий алгоритм. Производится бинарный поиск оптимального значения целевой функции по ранжированным значениям

$$z \in \{0\} \cup \{w_{ij} d(v_i, v_l) : i, l \in I,\ i \neq l,\ j \in J\} \cup \{v_{jk} d(v_i, v_l) : j, k \in J,\ j < k,\ i, l \in I,\ i < l\}.$$

Проверка существования и построение допустимого размещения, удовлетворяющего ограничениям (2)–(3) ((5)–(6) при фиксированном z) производится алгоритмом $SDLA$ (Sequental Discrete Location Algorithm) [4].

Алгоритм $SDLA$.

Шаг 0. Определим $K_{ij} := c_{ij}$, $i \in I$, $j \in J$, $\overline{I} := I$, $\overline{J} := J$. На шаг 1.

Шаг 1. Если $\overline{J} = \emptyset$, то на шаг 9. Если $|\overline{I}| = 1$, то $\pi(k) := t$, $t \in \overline{I}$, $\forall k \in \overline{J}$, $\overline{I} := \overline{I}/\{t\}$ и на шаг 9. На шаг 2.

Шаг 2. Пусть $t \in \overline{I}$, т. ч. v_t — концевая вершина и v_s — смежная с ней. На шаг 3.

Шаг 3. Если $K_{ij} \geq d(v_t, v_s)$ $\forall j \in \overline{J}$, то на шаг 4, иначе на шаг 5.

Шаг 4. $K_{sj} := \min\{K_{sj}, K_{tj} - d(v_t, v_s)\}$, $j \in \overline{J}$, $\overline{I} := \overline{I}/\{t\}$. На шаг 1.

Шаг 5. Если $\exists k$, т. ч. $K_{tk} < d(v_t, v_s)$, то $\pi(k) := t$, $\overline{J} := \overline{J}/\{k\}$, и на шаг 6, иначе на шаг 4.

Шаг 6. Если $K_{ik} \geq d(v_i, v_{\pi(k)})$ $\forall i \in \overline{I}$, то на шаг 7, иначе на шаг 8.

Шаг 7. $\forall j \in \overline{J}$ $K_{tj} := \min\{K_{tj}, b_{jk}\}$. На шаг 5.

Шаг 8. Нет допустимого решения.

Шаг 9. Получаем допустимое решение.

Трудоемкость алгоритма $SDLA$ равна $O(n(m+n))$. Трудоемкость алгоритма решения задачи (4)–(6) на древовидной сети равна $O(m^2 n^2 \log(nm))$.

Отметим, что возможна ситуация, когда допустимого решения задачи не существует для любого остовного дерева, при том, что на исходной сети задача разрешима. В подобном случае следует использовать тривиальную верхнюю оценку $+\infty$.

Предлагается следующая стратегия обхода дерева решений: для получения первого допустимого решения используется поиск в глубину. Далее на очередном шаге алгоритма для ветвления выбирается узел, имеющий минимальное значение нижней границы.

4. *Результаты эксперимента.* Предлагаемый алгоритм реализован на ЭВМ, проведен вычислительный эксперимент с целью проверки его эффективности. Расчеты также выполнены с помощью пакета $ILOG\ CPLEX$ 6.5 с использованием целочисленной квадратичной модели рассматриваемой задачи, имеющей mn булевых переменных и $n + m^2 n + m^2 n(n-1)/2$ ограничений. Исходные данные генерировались случайным образом с равномерным распределением. Решались серии из 10 задач одинаковой размерности (m, n) — от $(10, 10)$ до $(500, 500)$. В результате эксперимента выяснилось, что с помощью пакета $CPLEX$ не удается получить решение задач размерностью $(40, 40)$ и выше за приемлемое время, при том, что среднее время решения задач размерности $(40, 40)$ предложенным здесь алгоритмом оказалось менее секунды. В таблице приведено среднее время решения задач (в сек.) на ПК с процессором Intel Celeron 1000 MHz.

Таблица

m	n	МВГ	CPLEX	m	n	МВГ
10	10	$0,1$	0,5	50	50	1
20	20	$0,1$	13	100	100	3
30	30	$0,1$	148	100	200	10
30	40	$0,2$	488	200	100	24
40	30	$0,4$	673	200	200	31
40	40	$0,5$	–	500	500	390

Литература

1. Забудский Г.Г. *Алгоритм решения одной задачи оптимального линейного упорядочения* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 12. – С. 73–78.
2. Забудский Г.Г., Филимонов Д.В. *О минимаксной и минисуммной задачах размещения на сетях* // Тр. XII Байкальской междунар. конф. “Методы оптимизации и их приложения”. – Иркутск, 2001. – С. 150–155.
3. Панюков А.В., Пельцвергер Б.В. *Оптимальное размещение дерева в конечном множестве* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1988. – Т. 28. – С. 618–620.
4. Филимонов Д.В. *Решение дискретной минимаксной задачи размещения на древовидной сети* // Материалы ежегодн. научн. семин. аспирантов и студентов-выпускников “Под знаком Σ”. – Омск, 2003. – С. 58–61.
5. Erkut E., Francis R.L., Tamir A. *Distance-constrained multifacility minimax location problems on tree network* // Networks. – 1992. – V. 22. – P. 37–54.
6. Kolen A. *Location problems on trees and in rectilinear plane* // Stitchting Math. Centrum, Kruislaan 413, 1098 SJ. – Amsterdam, The Netherlands. – 1982.

Омский филиал Института
математики Сибирского отделения
Российской Академии наук

Поступила
28.04.2003