ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

УДК 517.518.822

Д.В. АЛЕКСЕЕВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ВЕСОМ ЧЕБЫШЕВА–ЭРМИТА

В данной работе доказаны прямые теоремы для приближения функций многих переменных “углом” и “прямоугольником” из алгебраических полиномов и обратная теорема для приближения “углом”. Соответствующие результаты для функций одной переменной были получены ранее в работах [1] и [2], а для приближения “углом” в метрике L_2 — в [3].

Введем обозначения. Пусть $\rho(x)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)$ — весовая функция, $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^N)$ — множество измеримых по Лебегу функций N переменных $f(x_1,\dots,x_N)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\rho}=\begin{cases}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x)\rho(x)|^p dx\right)^{1/p} & \text{при } 1\le p<\infty;\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^N}|f(x)\rho(x)| & \text{при } p=\infty.\end{cases}$$

Определим оператор обобщенного сдвига по i-й переменной

$$T_h^i f(x_1,\dots,x_N)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\dots,x_{i-1},u,x_{i+1},\dots,x_N)\exp(-y^2)dy,$$

где $u=e^{-h}(x_i+y\sqrt{e^{2h}-1})$. Введем дифференциальный оператор $D_i=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. Этот оператор задан на классе $\Lambda_p(D_i)$ функций $f\in L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$, для которых существует функция g, эквивалентная f и такая, что при почти всех $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_N)$ существует $\frac{\partial g}{\partial x_i}$, абсолютно непрерывная по x_i на любом конечном отрезке и при этом $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}, x_i\frac{\partial g}{\partial x_i}\in L_{p,\rho}$. Обозначим

$$\Lambda_p(D_i^{r_i})=\{f\in\Lambda_p(D_i)\mid D_if\in\Lambda_p(D_i^{r_i-1})\},\quad \Lambda_p(D_{i_1\dots i_k}^{r_1\dots r_k})=\{f\in\Lambda_p(D_{i_k}^{r_k})\mid D_{i_k}^{r_k}f\in\Lambda_p(D_{i_1\dots i_{k-1}}^{r_1\dots r_{k-1}})\}.$$

Определим обобщенный модуль гладкости

$$\Omega_{i_1\dots i_k}^{r_1\dots r_k}(f,\delta_1,\dots,\delta_k)_{p,\rho}=\sup_{|h_j|\le\delta_j,\ j=1\div k}\|(I-T_{h_1}^{i_1})^{r_1}\cdot\ldots\cdot(I-T_{h_k}^{i_k})^{r_k}f\|_{p,\rho},$$

где I – тождественный оператор. Пусть K-функционал

$$K_{i_1\dots i_k}^{r_1\dots r_k}(f,\delta_1,\dots,\delta_k)_{p,\rho}=\inf_{g_{l_1\dots l_j}\in\Lambda_p(D_{i_{l_1}\dots i_{l_j}}^{r_1\dots r_k})}\{\|f-\widehat{\Sigma}g_{l_1\dots l_j}\|_{p,\rho}+\widehat{\Sigma}\delta_{l_1}^{r_{l_1}}\cdots\delta_{l_j}^{r_{l_j}}\|D_{i_{l_1}}^{r_{l_1}}\dots d_{i_{l_j}}^{r_{l_j}}g_{l_1\dots l_j}\|_{p,\rho}\},$$

где $\widehat{\Sigma}$ обозначает $\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{1\le l_1<l_2<\dots<l_j\le k}$. Пусть $A\le cB$, где c — постоянная, зависящая, быть может, от p, N, k, r_i, если эти параметры входят в A или B, и не зависящая от других параметров, входящих в выражения A и B. В этом случае будем использовать обозначение $A\preceq B$ и говорить, что A не превосходит B с константой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00010).

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $f \in L_{p,\rho}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le N$, $\delta_j \in (0,1)$, *тогда выполнены неравенства*

$$K^{r_1\dots r_k}_{i_1\dots i_k}(f,\delta_1,\dots,\delta_k)_{p,\rho} \preceq \Omega^{r_1\dots r_k}_{i_1\dots i_k}(f,\delta_1,\dots,\delta_k)_{p,\rho} \preceq K^{r_1\dots r_k}_{i_1\dots i_k}(f,\delta_1,\dots,\delta_k)_{p,\rho}.$$

Пусть $\mathbf{P}^{i_1\dots i_k}_{n_1\dots n_k} = \Big\{P = \sum\limits_{l_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum\limits_{l_k=0}^{n_k-1} c_{l_1\dots l_k} x_{i_1}^{l_1}\dots x_{i_k}^{l_k}\Big\}$, где $c_{l_1\dots l_k}$ не зависят от $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ и принадлежат $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^{N-k})$ как функции от остальных $N-k$ переменных. Будем обозначать

$$\mathbf{A}^{i_1\dots i_k}_{n_1\dots n_k} = \left\{A = \sum_{l=1}^{k} P^{i_l}_{n_l}, \ \text{ где } \ P^{i_l}_{n_l} \in \mathbf{P}^{i_l}_{n_l}\right\}.$$

Величина $E^{i_1\dots i_k}_{n_1\dots n_k}(f)_{p,\rho} = \inf\limits_{P\in\mathbf{P}^{i_1\dots i_k}_{n_1\dots n_k}} \|f-P\|_{p,\rho}$ называется наилучшим приближением "прямоугольником", а величина $Y^{i_1\dots i_k}_{n_1\dots n_k}(f)_{p,\rho} = \inf\limits_{A\in\mathbf{A}^{i_1\dots i_k}_{n_1\dots n_k}} \|f-A\|_{p,\rho}$ — наилучшим приближением "углом" по переменным $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le N$, $1 \le p \le \infty$, $f \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}^N)$. *Тогда*

$$E^{i_1\dots i_k}_{n_1\dots n_k}(f)_{p,\rho} \preceq \sum_{j=1}^{k} \Omega^{r_j}_{i_j}\left(f,\frac{1}{n_j}\right)_{p,\rho}.$$

Теорема 3. *Пусть* $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le N$, $1 \le p \le \infty$, $f \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}^N)$. *Тогда*

$$Y^{i_1\dots i_k}_{n_1\dots n_k}(f)_{p,\rho} \preceq \Omega^{r_1\dots r_k}_{i_1\dots i_k}\left(f,\frac{1}{n_1},\dots,\frac{1}{n_k}\right)_{p,\rho}.$$

Теорема 4. *Пусть* $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le N$, $1 \le p \le \infty$, $f \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}^N)$. *Тогда*

$$\Omega^{r_1\dots r_k}_{i_1\dots i_k}\left(f,\frac{1}{n_1},\dots,\frac{1}{n_k}\right)_{p,\rho} \preceq \frac{1}{n_1^{r_1}\dots n_k^{r_k}} \sum_{s_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{s_k=1}^{n_k} s_1^{r_1-1}\dots s_k^{r_k-1} Y^{i_1\dots i_k}_{s_1\dots s_k}(f)_{p,\rho}.$$

Доказательство теоремы 1. Для доказательства потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $h \in (0,1)$. *Тогда* T^i_h *— ограниченный оператор, т. е.* $\|T^i_h f\|_{p,\rho} \preceq \|f\|_{p,\rho}$ *при* $f \in L_{p,\rho}$.

Лемма 2. *Для любой* $f \in L_{p,\rho}$ *существует* $g_i \in \Lambda_p(D_i)$ *такая, что* $D_i g_i = f - c_i$, *где* $c_i = c_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_N) \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}^{N-1})$.

Лемма 3. *Пусть* $g_i \in \Lambda_p(D_i)$. *Тогда*

$$(T^i_h - I)g_i = \int_0^h T^i_\varphi D_i g_i \, d\varphi.$$

Лемма 4. *При* $h_1, h_2 > 0$, $h_1 + h_2 < 1$ *справедливо групповое свойство*

$$T^i_{h_1} T^i_{h_2} = T^i_{h_1+h_2}.$$

Лемма 5. *Пусть* $f \in \Lambda_p(D^r_i)$, $h \in (0,1)$. *Тогда*

$$(T^i_h - I)^r f = h^r \int_0^r \Pi_k(s) T^i_{hs} D^r_i f \, ds,$$

где $\Pi_r(s) = \sum\limits_{u=0}^{r} (-1)^{r+1} C^u_r \frac{(u-s)_+^{r-1}}{(r-1)!}$ *— ядро Пеано,* $(a)_+ = \max\{a,0\}$.

Лемма 6. *Пусть* $f \in L_{p,\rho}$, $h \in (0,1)$. *Тогда функция* $g_r = \int\limits_0^r \Pi_r(s) T^i_{hs} f\, ds$ *принадлежит* $\Lambda_p(D^r_i)$, *и при этом*

$$D^r_i g_r = \frac{1}{h^k}(T^i_h - I)^k f.$$

Лемма 7. *Пусть* $1 \le i_1 < \dots < i_k \le N$. *Тогда для любой* $f \in \Lambda_p(D^{r_1\dots r_k}_{i_1\dots i_k})$ *выполнено неравенство*

$$\Omega^{r_1\dots r_k}_{i_1\dots i_k}(f;\delta)_{p,\rho} \preceq \delta^{r_1}_{i_1}\dots\delta^{r_k}_{i_k}\|D^{r_1}_{{}_1}\dots D^{r_k}_{i_l} f\|_{p,\rho}.$$

Леммы 1–7 позволяют доказать теорему 1. Для наглядности теорема будет доказана в случае $N = k = 2$. Докажем левое неравенство. Из обобщенного неравенства треугольника для модулей гладкости имеем

$$\Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(f;\delta_1\delta_2) \preceq \Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(f-g_1-g_2-g_{12};\delta_1\delta_2) + \Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(g_1;\delta_1\delta_2) + \Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(g_2;\delta_1\delta_2) + \Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(g_{12};\delta_1\delta_2)$$

для произвольных

$$g_1 \in \Lambda_p(D^{r_1}_1),\ g_2 \in \Lambda_p(D^{r_2}_2),\ g_{12} \in \Lambda_p(D^{r_1r_2}_{12}). \tag{1}$$

Оценим первое слагаемое по лемме 1 как $\|f-g_1-g_2-g_{12}\|_{p,\rho}$, а остальные — по лемме 7. Получим

$$\Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(f;\delta_1\delta_2) \preceq \|f-g_1-g_2-g_{12}\|_{p,\rho} + \delta^{r_1}_1\|D^{r_1}_1 g_1\|_{p,\rho} + \delta^{r_2}_2\|D^{r_2}_2 g_2\|_{p,\rho} + \delta^{r_1}_1\delta^{r_2}_2\|D^{r_1}_1 D^{r_2}_2\|_{p,\rho}.$$

Взяв точную нижнюю грань от правой части по всем g_1, g_2, g_{12}, удовлетворяющим (1), получим определение K-функционала, что и требовалось доказать.

Докажем правое неравенство. Рассмотрим функции вида

$$\begin{aligned}
g_1 &= \int_0^{r_1}\int_0^{r_2}\Pi_{r_1}(t_1)\Pi_{r_2}(t_2)\big(I-(I-T^1_{\frac{\delta_1t_1}{r_1}})^{r_1}\big)(I-T^2_{\frac{\delta_2t_2}{r_2}})^{r_2} f\,dt_1dt_2,\\
g_2 &= \int_0^{r_1}\int_0^{r_2}\Pi_{r_1}(t_1)\Pi_{r_2}(t_2)\big(I-(I-T^2_{\frac{\delta_2t_2}{r_2}})^{r_2}\big)(I-T^1_{\frac{\delta_1t_1}{r_1}})^{r_1} f\,dt_1dt_2,\\
g_{12} &= \int_0^{r_1}\int_0^{r_2}\Pi_{r_1}(t_1)\Pi_{r_2}(t_2)\big(I-(I-T^1_{\frac{\delta_1t_1}{r_1}})^{r_1}\big)\big(I-(I-T^2_{\frac{\delta_2t_2}{r_2}})^{r_2}\big) f\,dt_1dt_2,
\end{aligned}$$

где $\Pi_r(t)$ — ядро Пеано. Используя тот факт, что $\int\limits_0^r \Pi_r(t)dt = 1$ ([4], с. 15–16), получим

$$f-g_1-g_2-g_{12} = \int_0^{r_1}\int_0^{r_2}\Pi_{r_1}(t_1)\Pi_{r_2}(t_2)\big(I-T^1_{\frac{\delta_1t_1}{r_1}}\big)^{r_1}\big(I-T^2_{\frac{\delta_2t_2}{r_2}}\big)^{r_2} f\,dt_1dt_2.$$

Отсюда, применив обобщенное неравенство треугольника и пользуясь доказанной в [4] неотрицательностью ядра Пеано, получим

$$\|f-g_1-g_2-g_{12}\|_{p,\rho} \le \Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(f;\delta_1\delta_2).$$

Теперь оценим $\|D^{r_1}_1 g_1\|_{p,\rho}$ (по лемме 6 $g_1 \in \Lambda_p(D^{r_1}_1)$). Применив лемму 6 с $h = s_1\delta_1/r_1$, получим

$$D^{r_1}_1 g_1 = \frac{1}{\delta^{r_1}_1}\sum_{s_1=1}^{r_1}(-1)^{r_1+s_1+1}C^{s_1}_{r_1}\left(\frac{r_1}{s_1}\right)^{r_1}\int_0^{r_2}\big(I-T^1_{\frac{\delta_1s_1}{r_1}}\big)^{r_1}\big(I-T^2_{\frac{\delta_2t_2}{r_2}}\big)^{r_2} f\,dt_2.$$

Оценивая норму этого выражения по обобщенному неравенству Минковского и домножая на $\delta^{r_1}_1$, установим, что

$$\delta^{r_1}_1\|D^{r_1}_1 g_1\|_{p,\rho} \preceq \Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(f;\delta_1\delta_2).$$

Проводя аналогичные выкладки для g_2, получим

$$\delta^{r_2}_2\|D^{r_2}_2 g_2\|_{p,\rho} \preceq \Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(f;\delta_1\delta_2).$$

Оценим теперь $\|D_1^{r_1}D_2^{r_2}g_{12}\|_{p,\rho}$. Применяя дважды лемму 6 (сначала с $h=s_1\delta_1/r_1$, а потом с $h=s_2\delta_2/r_2$), имеем

$$D_1^{r_1}D_2^{r_2}g_{12}=\frac{1}{\delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}}\sum_{s_1=1}^{r_1}\sum_{s_2=1}^{r_2}a(r_1,r_2,s_1,s_2)\big(I-T^1_{\frac{\delta_1 s_1}{r_1}}\big)^{r_1}\big(I-T^2_{\frac{\delta_2 s_2}{r_2}}\big)^{r_2}f,$$

где $a(r_1,r_2,s_1,s_2)$ — коэффициенты, не зависящие от f и δ_i. Умножая на $\delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}$ и оценивая норму по обобщенному неравенству треугольника, получаем

$$\delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}\|D_1^{r_1}D_2^{r_2}g_{12}\|_{p,\rho}\preceq\Omega_{p,\rho}^{r_1r_2}(f;\delta_1\delta_2).$$

Таким образом,

$$\|f-g_1-g_2-g_{12}\|_{p,\rho}+\delta_1^{r_1}\|D_1^{r_1}g_1\|_{p,\rho}+\delta_2^{r_2}\|D_2^{r_2}g_2\|_{p,\rho}+\delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}\|D_1^{r_1}D_2^{r_2}g_{12}\|_{p,\rho}\preceq\Omega_{p,\rho}^{r_1r_2}(f;\delta_1\delta_2).$$

Если эта оценка верна для конкретных g_1, g_2, g_{12}, то для нижней грани выражения она тем более выполнена. Следовательно, из определения K-функционала вытекает правое неравенство. $\square$

Для доказательства теорем 2, 3 потребуются леммы 8–13.

Лемма 8. *Пусть $1\le i_1<\dots<i_k\le N$. Если $P\in\mathbf{P}^{i_1\dots i_k}_{n_1\dots n_k}$, то выполнено неравенство*

$$\|D_{i_1}^{r_1}\dots D_{i_k}^{r_k}P\|_{p,\rho}\preceq n_1^{r_1}\dots n_k^{r_k}\|P\|_{p,\rho}.$$

Пусть V_m^if — средние Валле-Пуссена ряда Фурье–Эрмита функции f по переменной x_i и $\pi_n^if=V_{[n/2]}^if$.

Лемма 9. *Пусть $f\in L_{p,\rho}$. Тогда $\|\pi_n^if\|_{p,\rho}\preceq\|f\|_{p,\rho}$.*

Лемма 10. *Если $f\in L_{p,\rho}$, то $\pi_n^if\in\mathbf{P}_n^i$.*

Лемма 11. *Если $f\in\Lambda_p(D_i)$, то*

$$\|\pi_n^if-f\|_{p,\rho}\preceq\frac{1}{n}\|D_if\|_{p,\rho}.$$

Лемма 12. *Пусть $1\le i_1<\dots<i_k\le N$ и пусть $P\in\mathbf{P}^{n_1\dots n_k}_{i_1\dots i_k}$, т. е.*

$$P=\sum_{s_1=0}^{n_1-1}\dots\sum_{s_k=0}^{n_k-1}c_{s_1\dots s_k}x_{i_1}^{s_1}\dots x_{i_k}^{s_k},\quad c_{s_1\dots s_k}\in L_{p,\rho}(\mathbb{R}^{N-k}).$$

Тогда $\Omega^{r_1\dots r_k}_{i_1\dots i_k}(P;\delta)\preceq(n_1\delta_1)^{r_1}\cdots(n_k\delta_k)^{r_k}\|P\|_{p,\rho}$.

Лемма 13. *Для любой $f\in L_{p,\rho}$ выполнено неравенство*

$$\|(I-\pi_{2n}^1)(I-\pi_{2m}^2)f\|_{p,\rho}\preceq Y_{nm}(f)_{p,\rho}.$$

Теоремы 2, 3 будут доказаны в случае $N=k=2$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим $P_{n_1n_2}(f)=(I-(I-\pi_{n_1}^1)^{r_1})(I-(I-\pi_{n_2}^2)^{r_2})$. По лемме 10 $P_{n_1n_2}\in\mathbf{P}^{12}_{n_1n_2}$. Следовательно, $E^{12}_{n_1n_2}(f)_{p,\rho}\le\|f-P_{n_1n_2}\|_{p,\rho}$. По неравенству треугольника

$$\|f-P_{n_1n_2}\|_{p,\rho}\le\|(I-\pi_{n_1}^1)^{r_1}f\|_{p,\rho}+\|(I-(I-\pi_{n_2}^2)^{r_2})f\|_{p,\rho}+\|(I-(I-\pi_{n_1}^1)^{r_1})(I-(I-\pi_{n_2}^2)^{r_2})f\|_{p,\rho},$$

а это по лемме 9 не превосходит с константой величины $\|(I-\pi_{n_1}^1)^{r_1}\|_{p,\rho}+\|(I-\pi_{n_2}^2)^{r_2}f\|_{p,\rho}$. Значит,

$$E_{n_1n_2}(f)\preceq\|(I-\pi_{n_1}^1)^{r_1}f\|_{p,\rho}+\|(I-\pi_{n_2}^2)^{r_2}f\|_{p,\rho}.\tag{2}$$

Рассмотрим произвольную $g_1\in\Lambda_p(D_1^{r_1})$. Тогда

$$\|(I-\pi_{n_1}^1)^{r_1}f\|_{p,\rho}\le\|(I-\pi_{n_1}^1)^{r_1}(f-g_1)\|_{p,\rho}+\|(I-\pi_{n_1}^1)^{r_1}g_1\|_{p,\rho}.$$

Оценивая первое слагаемое по лемме 9, а второе — по лемме 11, получим

$$\|(I-\pi_{n_1}^1)^{r_1}f\|_{p,\rho}\preceq\|f-g_1\|_{p,\rho}+\frac{1}{n_1^{r_1}}\|D_1^{r_1}g_1\|_{p,\rho}.$$

Взяв инфимум по всем $g_1 \in \Lambda_p(D_1^{r_1})$, получим

$$\|(I - \pi^1_{n_1})^{r_1} f\|_{p,\rho} \preceq K_1^{r_1}(f, 1/n)_{p,\rho}.$$

Применяя теорему 1, имеем

$$\|(I - \pi^1_{n_1})^{r_1} f\|_{p,\rho} \preceq \Omega_1^{r_1}(f, 1/n_1)_{p,\rho}.$$

Аналогично доказывается, что $\|(I - \pi^2_{n_2})^{r_2} f\|_{p,\rho} \preceq \Omega_2^{r_2}(f, 1/n_2)_{p,\rho}$. Подстановкой этих оценок в (2) и завершается доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим $A_{n_1n_2} = f - Lf$, где L — оператор вида $Lf = (I - \pi^1_{n_1})^{r_1}(I - \pi^2_{n_2})^{r_2}$. Согласно лемме 10 $A_{n_1n_2} \in \mathbf{A}^{12}_{n_1n_2}$. Следовательно,

$$Y^{12}_{n_1n_2}(f)_{p,\rho} \le \|f - A_{n_1n_2}\|_{p,\rho} = \|Lf\|_{p,\rho}. \tag{3}$$

Выберем произвольные $g_1 \in \Lambda_p(D_1^{r_1})$, $g_2 \in \Lambda_p(D_2^{r_2})$, $g_{12} \in \Lambda_p(D_{12}^{r_1r_2})$. Из неравенства треугольника имеем

$$\|Lf\|_{p,\rho} \le \|L(f - g_1 - g_2 - g_{12})\|_{p,\rho} + \|Lg_1\|_{p,\rho} + \|Lg_2\|_{p,\rho} + \|Lg_{12}\|_{p,\rho}.$$

Оценивая слагаемые в правой части по леммам 9 и 11, получим

$$\|Lf\|_{p,\rho} \preceq \|f - g_1 - g_2 - g_{12}\|_{p,\rho} + \frac{1}{n_1^{r_1}}\|D_1^{r_1} g_1\|_{p,\rho} + \frac{1}{n_2^{r_2}}\|D_2^{r_2} g_2\|_{p,\rho} + \frac{1}{n_1^{r_1} n_2^{r_2}}\|D_1^{r_1} D_2^{r_2} g_{12}\|_{p,\rho}.$$

Взяв нижнюю грань правой части по всем $g_1 \in \Lambda_p(D_1^{r_1})$, $g_2 \in \Lambda_p(D_2^{r_2})$, $g_{12} \in \Lambda_p(D_{12}^{r_1r_2})$, получим

$$\|Lf\|_{p,\rho} \preceq K_{12}^{r_1r_2}\left(f, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right).$$

По теореме 1

$$\|Lf\|_{p,\rho} \preceq \Omega_{12}^{r_1r_2}\left(f, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right).$$

Подставив эту оценку в (3), завершим доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим выражение

$$\{I - \pi^1_1\}\{I - \pi^2_1\}f = \left\{I - \pi^1_{2^L} + \sum_{l=0}^{L-1}(\pi^1_{2^{l+1}} - \pi^1_{2^l})\right\}\left\{I - \pi^2_{2^M} + \sum_{m=0}^{M-1}(\pi^2_{2^{m+1}} - \pi^2_{2^m})\right\}f.$$

Раскрывая фигурные скобки, получим

$$\begin{aligned} f - \pi^1_1 - \pi^2_1 + \pi^1_1\pi^2_1 f = \sum_{l=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{M-1}(\pi^1_{2^{l+1}} - \pi^1_{2^l})(\pi^2_{2^{m+1}} - \pi^2_{2^m})f + \\ + (I - \pi^2_{2^M})\sum_{l=0}^{L-1}(\pi^1_{2^{l+1}} - \pi^1_{2^l})f + (I - \pi^1_{2^L})\sum_{m=0}^{M-1}(\pi^2_{2^{m+1}} - \pi^2_{2^m})f + (I - \pi^1_{2^L})(I - \pi^2_{2^M})f. \end{aligned} \tag{4}$$

Из свойств оператора $\pi^j_{n_j}$ следует, что $\pi^1_1 f$ зависит только от x, $\pi^2_1 f$ — только от y, а $\pi^1_1\pi^2_1 f$ постоянна почти всюду. Следовательно, они не влияют на величину обобщенного модуля гладкости. Таким образом, для того чтобы оценить величину $\Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(f; \delta_1\delta_2)$, достаточно оценить модули гладкости слагаемых, стоящих в правой части (4).

Первое слагаемое есть сумма выражений вида $\{\pi^1_{2^{l+1}} - \pi^1_{2^l}\}\{\pi^2_{2^{m+1}} - \pi^2_{2^m}\}f = \{(I - \pi^1_{2^l}) - (I - \pi^1_{2^{l+1}})\}\{(I - \pi^2_{2^m}) - (I - \pi^2_{2^{m+1}})\}f$. Раскрывая фигурные скобки и применяя лемму 13, нетрудно получить оценку

$$\|(\pi^1_{2^{l+1}} - \pi^1_{2^l})(\pi^2_{2^{m+1}} - \pi^2_{2^m})f\|_{p,\rho} \preceq Y_{2^{l-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}.$$

Выражение, стоящее под знаком нормы, есть полином степени $2^{l+1} - 1$ по x и $2^{m+1} - 1$ по y. Следовательно, по лемме 12 можно оценить выражение

$$\Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}((\pi^1_{2^{l+1}} - \pi^1_{2^l})(\pi^2_{2^{m+1}} - \pi^2_{2^m})f; \delta_1\delta_2) \preceq \delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2} 2^{lr_1 + mr_2} Y_{2^{l-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}. \tag{5}$$

Второе слагаемое в правой части (4) есть сумма выражений вида

$$(I-\pi^2_{2^M})(\pi^1_{2^{l+1}}-\pi^1_{2^l})f=(I-\pi^2_{2^M})(I-\pi^1_{2^l})f-(I-\pi^2_{2^M})(I-\pi^1_{2^{l+1}})f.$$

Применив к ним лемму 12, получим

$$\Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}((I-\pi^2_{2^M})(\pi^1_{2^{l+1}}-\pi^1_{2^l})f;\delta_1\delta_2)\preceq\delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}2^{lr_1+Mr_2}Y_{2^{l-1}2^{M-1}}(f)_{p,\rho}. \tag{6}$$

Аналогично оцениваются компоненты третьего слагаемого

$$\Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}((I-\pi^1_{2^L})(\pi^1_{2^{m+1}}-\pi^2_{2^m})f;\delta_1\delta_2)\preceq\delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}2^{Nr_1+mr_2}Y_{2^{L-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}, \tag{7}$$

а четвертое слагаемое просто оценим величиной

$$\Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}((I-\pi^1_{2^l})(I-\pi^2_{2^M})f;\delta_1\delta_2)\preceq Y_{2^{L-1}2^{M-1}}(f)_{p,\rho}. \tag{8}$$

Взяв обобщенный модуль гладкости от обеих частей (4) и подставив оценки (5)–(8), получим

$$\begin{aligned}\Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(f;\delta_1\delta_2)\preceq\delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}\Bigg\{&\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{M-1}2^{r_1l+r_2m}Y_{2^{l-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}+\\&+\sum_{l=0}^{N-1}2^{r_1l+r_2M}Y_{2^{l-1}2^{M-1}}(f)_{p,\rho}+\sum_{m=0}^{M-1}2^{r_1L+r_2m}Y_{2^{L-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}\Bigg\}+Y_{2^{L-1}2^{M-1}}(f)_{p,\rho}.\end{aligned} \tag{9}$$

Подставив $\delta_1=2^{-L}$, $\delta_2=2^{-M}$ в (9), получим

$$\begin{aligned}\Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(f;\delta_1\delta_2)\preceq2^{-(r_1l+r_2M)}\Bigg\{&\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{M-1}2^{l(r_1-1)}2^{m(r_2-1)}2^{l+m}Y_{2^{l-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}+\\&+\sum_{l=0}^{L-1}2^{(r_1-1)l+r_2M}2^lY_{2^{l-1}2^{M-1}}(f)_{p,\rho}+\\&+\sum_{m=0}^{M-1}2^{r_1L+(r_2-1)m}2^mY_{2^{L-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}+2^{r_1N+r_2M}Y_{2^{L-1}2^{M-1}}(f)_{p,\rho}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{10}$$

Очевидно, $\sum\limits_{s=0}^{S-1}2^{rs}\geq C_r2^{rS}$. Следовательно, заменив в оценке (10) 2^{r_1L} на $\sum\limits_{l=0}^{L-1}2^{r_1l}$ и 2^{r_2M} на $\sum\limits_{m=0}^{M-1}2^{r_2m}$, получим

$$\begin{aligned}&\Omega^{r_1r_2}_{p,\rho}(f;\delta_1\delta_2)\preceq\\&\preceq2^{-(r_1L+r_2M)}\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{M-1}2^{r_1l+r_2m}[Y_{2^{l-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}+Y_{2^{l-1}2^{M-1}}(f)_{p,\rho}+Y_{2^{L-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}+Y_{2^{L-1}2^{M-1}}(f)_{p,\rho}].\end{aligned}$$

Так как Y_{mn} есть невозрастающая функция по аргументам m и n, то выражение, стоящее в квадратных скобках, не превосходит $4Y_{2^{l-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}$. Следовательно,

$$\Omega^{r_1r_1}_{p,\rho}(f;\delta_1\delta_2)\preceq2^{-(r_1L+r_2M)}\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{M-1}2^{r_1l+r_2m}Y_{2^{l-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}. \tag{11}$$

Аналогично можно получить оценку

$$2^{l+m}Y_{2^{l-1}2^{m-1}}(f)_{p,\rho}\preceq\sum_{s_1=2^{l-2}+1}^{2^{l-1}}\sum_{s_2=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}Y_{s_1s_2}(f)_{p,\rho}.$$

Подставив эти величины в (11), получим

$$\Omega_{12}^{r_1 r_2}\left(f; \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\right) \preceq \frac{1}{R_1^{r_1} R_2^{r_2}} \sum_{s_1=1}^{R_1-1} \sum_{s_2=1}^{R_2-1} s_1^{r_1-1} s_2^{r_2-1} Y_{s_1 s_2}(f)_{p,\rho},$$

где $R_1 = 2^L$, $r_2 = 2^M$. Для того чтобы получить оценку для произвольных R_1, R_2, достаточно выбрать M и L так, что $2^L \le R_1 < 2^{L+1}$ и $2^M \le R_2 < 2^{M+1}$. $\square$

Следствие 1. Пусть $f \in L_{p,\rho}(R^N)$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le N$, $\delta_1, \dots, \delta_k \in (0,1)$, $\alpha_j < r_j$. Тогда

$$\theta_{i_1}^{r_1}(f, \delta_1)_{p,\rho} \preceq \delta_1^{\alpha_1}, \dots, \Omega_{i_k}^{r_k}(f, \delta_k)_{p,\rho} \preceq \delta_k^{\alpha_k}$$

в том и только том случае, когда

$$E_{n_1 \dots n_k}^{i_1 \dots i_k}(f)_{p,\rho} \preceq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j^{\alpha_j}}.$$

Следствие 2. Пусть $f \in L_{p,\rho}(R^N)$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le N$, $\delta_1, \dots, \delta_k \in (0,1)$, $\alpha_j < r_j$. Тогда

$$\Omega_{i_1 \dots i_k}^{r_1 \dots r_k}(f, \delta_1, \dots, \delta_k)_{p,\rho} \preceq \delta_1^{\alpha_1} \dots \delta_k^{\alpha_k}$$

в том и только том случае, когда

$$Y_{n_1 \dots n_k}^{i_1 \dots i_k}(f)_{p,\rho} \preceq \frac{1}{n_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot n_k^{\alpha_k}}.$$

Доказательство следствия 1. Если $\Omega_{i_j}^{r_j}(f)_{p,\rho} \preceq \delta_j^{\alpha_j}$, то $E_{n_1 \dots n_k}^{i_1 \dots i_k}(f)_{p,\rho} \preceq \sum\limits_{j=1}^{k} n_j^{-\alpha_j}$ по теореме 2. Если же $E_{n_1 \dots n_k}^{i_1 \dots i_k}(f)_{p,\rho} \preceq \sum\limits_{j=1}^{k} n_j^{-\alpha_j}$, то, устремляя n_j при всех $j \ne j_0$ к бесконечности, имеем $E_{n_{j_0}}^{r_{j_0}}(f)_{p,\rho} \preceq n_{j_0}^{-\alpha_{j_0}}$. По определению $E_{n_{j_0}}^{r_{j_0}}(f)_{p,\rho} = Y_{n_{j_0}}^{r_{j_0}}(f)_{p,\rho}$, следовательно, выбрав n так, что $\frac{1}{n+1} < \delta_{j_0} \le \frac{1}{n}$, по теореме 4 получим

$$\Omega_{i_{j_0}}^{r_{j_0}}(f)_{p,\rho} \preceq n^{-r_{j_0}} \sum_{s=1}^{n} s^{r_{j_0}-1} s^{-\alpha_{j_0}} \preceq \delta_{j_0}^{\alpha_{j_0}}. \quad \square$$

Следствие 2 доказывается аналогично.

Автор выражает благодарность В.М. Фёдорову за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Фёдоров В.М. *Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева–Эрмита* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 6. – С. 55–63.
2. Алексеев Д.В. *Приближение полиномами функций одной переменной в метрике Чебышева–Эрмита* // Вестн. Моск. ун-та. – 1997. – № 6. – С. 68–71.
3. Ржавинская Е.В. *О приближении функций двух переменных двумерным углом классических ортогональных полиномов.* – Моск. ин-т электрон. техн. – М., 1980. – 42 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.09.80, № 4248-80.
4. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. *Сплайны в вычислительной математике.* – М.: Наука, 1976. – 248 с.

Московский государственный университет

Поступила 29.10.1998