ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 7 (518)

УДК 514.753

Л.А. МАСАЛЬЦЕВ

БИКАСАТЕЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БИАНКИ ПОДМНОГООБРАЗИЯ ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ H^n ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА R^{2n}

Классическое преобразование Бианки поверхности постоянной отрицательной кривизны -1 в евклидовом пространстве R^3 и его многомерное обобщение в R^{2n-1}, найденное Ю.А. Аминовым, определяются следующим образом ([1], с. 435). Пусть $r(y_1, \dots, y_n)$ — радиус-вектор псевдосферического (т.е. постоянной секционной кривизны -1) подмногообразия H^n в R^{2n-1}, представленный в полугеодезической системе координат, в которой линейный элемент H^n имеет вид

$$ds^2 = e^{2y_n}(dy_1^2 + \dots + dy_{n-1}^2) + dy_n^2. \tag{1}$$

От каждой точки H^n с радиус-вектором r отложим единичный вектор, касательный в этой точке к геодезической y_n-линии. Множество точек-концов этих векторов образует новое псевдосферическое подмногообразие $\overline{H}^n$, о котором говорят, что оно получено из H^n с помощью преобразования Бианки. Аналитически радиус-вектор $\overline{H}^n$ можно записать в виде $\overline{r} = r - \frac{\partial r}{\partial y_n}$. Преобразование Бианки обладает важным свойством, которое состоит в том, что вектор $\frac{\partial r}{\partial y_n}$ является общим касательным вектором к H^n и $\overline{H}^n$.

Основываясь на этом свойстве, в [2] определено бикасательное преобразование Бианки для двумерных псевдосферических поверхностей евклидова пространства R^4. Пусть двумерная поверхность H^2 параметризована орисферической системой координат (y_1, y_2) с метрикой $ds^2 = e^{2y_2}dy_1^2 + dy_2^2$ и имеет радиус-вектор $r(y_1, y_2)$. Говорят, что двумерная поверхность $\overline{H}^2$ с радиус-вектором

$$\overline{r}(y_1, y_2) := r(y_1, y_2) - \frac{\partial r}{\partial y_2}$$

получается бикасательным преобразованием Бианки из H^2, если вектор $\frac{\partial r}{\partial y_2}$ является также касательным вектором к преобразованной поверхности $\overline{H}^2$ в точке с координатами (y_1, y_2). В таком случае ([2], теорема 2) оказывается, что преобразованная поверхность $\overline{H}^2$ также является псевдосферической. В данной работе обобщаем данное свойство преобразования Бианки на n-мерные подмногообразия H^n постоянной секционной кривизны -1 в евклидовом пространстве R^{2n}, дополнив условие бикасания некоторым условием на коэффициенты кручения базиса нормалей погружения.

Пусть H^n — n-мерное регулярное псевдосферическое (постоянной отрицательной секционной кривизны -1) подмногообразие евклидова пространства R^{2n}, параметризованное орисферической системой координат $(y_1, \dots, y_n)$ с метрикой (1). Бикасательным преобразованием Бианки данного подмногообразия будем называть подмногообразие $\overline{H}^n$ в R^{2n} с радиус-вектором

$$\overline{r}(y_1, \dots, y_n) := r(y_1, \dots, y_n) - \frac{\partial r}{\partial y_n}$$

при условии, что единичный касательный вектор $\frac{\partial r}{\partial y_n}$ является также касательным вектором к $\overline{H}^n$ в точке $\overline{r}$.

Предложение. *Пусть H^n — псевдосферическое подмногообразие евклидова пространства R^{2n} и $\overline{H}^n$ — его регулярное бикасательное преобразование Бианки. Тогда* $\dim(T_r^\perp H^n \cap T_{\overline{r}}^\perp \overline{H}^n) = 1$, *т. е. существует дифференцируемое поле нормальных ортов, общих для H^n и $\overline{H}^n$ в точках с одинаковыми координатами $(y_1, \dots, y_n)$.*

Доказательство. В орисферической системе координат $(y_1, \dots, y_n)$ с метрикой (1) ненулевыми символами Кристоффеля являются $\Gamma^i_{in} = 1$, $\Gamma^n_{ii} = -e^{2y_n}$ для $i = 1, \dots, n-1$. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_n$ — базис из регулярных ортонормированных векторных полей, нормальных к H^n. Из деривационных формул Гаусса для $\overline{H}^n$ получаем

$$\overline{r}_{y_i} = -\sum_{s=1}^{n} L^s_{ni}\eta_s, \quad \overline{r}_{y_n} = r_{y_n} - \sum_{s=1}^{n} L^s_{nn}\eta_s,$$

где $L^s_{ni} = \langle r_{y_n y_i}, \eta_s\rangle$ — коэффициенты второй фундаментальной формы подмногообразия H^n относительно нормали η_s и $i = 1, \dots, n-1$. Из условия бикасания следует, что $n+1$ векторов $\overline{r}_{y_1}, \dots, \overline{r}_{y_n}, r_{y_n}$ принадлежат $T_{\overline{r}}\overline{H}^n$, размерность которого равна n. Поэтому найдутся n действительных чисел $a_1, \dots, a_n$ таких, что

$$r_{y_n} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k\left(\sum_{s=1}^{k} L^s_{nk}\eta_s\right) + a_n\left(r_{y_n} - \sum_{s=1}^{n} L_{nn}\eta_s\right).$$

Поскольку $r_{y_n} \in T_r H^n$, а $\eta_s \in T_r^\perp H^n$, то заключаем, что $a_n = 1$ и n векторов $\sum\limits_{s=1}^{n} L^s_{ni}\eta_s$, $i = 1, \dots, n$, линейно зависимы. Поэтому определитель $|L^s_{ni}| = 0$ для произвольного ортонормированного базиса нормальных полей $\eta_1, \dots, \eta_n$ подмногообразия H^n. Покажем, что существует другой ортонормированный базис $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ нормальных полей, в котором $\widetilde{L}^n_{n1} = \dots = \widetilde{L}^n_{nn-1} = \widetilde{L}^n_{nn} = 0$. Новый базис получается умножением старого на ортогональную матрицу (a_{ik}) порядка n с коэффициентами, зависящими от $y_1, \dots, y_n$. При этом $\zeta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}\eta_k$ и $\widetilde{L}^n_{ni} = \langle r_{y_n y_i}, \zeta_n\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}L^k_{ni}$. Таким образом, для того чтобы $\widetilde{L}^n_{n1} = \dots = \widetilde{L}^n_{nn-1} = 0$, необходимо выбрать единичный вектор $(a_{n1}, \dots, a_{nn})$ перпендикулярным ко всем n строкам матрицы (если k — номер строки матрицы (L^s_{ni})). Такой выбор возможен, т. к. $|\widetilde{L}^k_{ni}| = 0$. Тогда получим, что $\widetilde{L}^n_{nn} = 0$. В новом нормальном базисе касательные векторы в $\overline{H}^n$ приобретут вид

$$\overline{r}_{y_i} = -\sum_{s=1}^{n-1} \widetilde{L}^s_{ni}\zeta_s, \quad \overline{r}_{y_n} = r_{y_n} - \sum_{s=1}^{n-1} \widetilde{L}^s_{nn}\zeta_s. \tag{2}$$

Тогда, очевидно, ζ_s будет единичным дифференцируемым нормальным полем в $\overline{H}^n$, существование которого доказывалось. □

Следующее утверждение дает достаточное условие для того, чтобы секционная кривизна преобразованного многообразия $\overline{H}^n$, которое получается при бикасательном преобразовании Бианки в R^{2n}, была равна -1, т. е. когда данное преобразование может рассматриваться как обобщение многомерного преобразования Бианки, найденного в [3]. Приводим его доказательство, основанное на использовании уравнений Гаусса и Риччи для псевдосферического подмногообразия H^n, т. е. новым методом по сравнению с методом Ю.А.Аминова, который использовал уравнения Кодацци.

Теорема. *Пусть $\overline{r} = r - r_{y_n}$ — радиус-вектор регулярного бикасательного преобразования Бианки $\overline{H}^n$ псевдосферического подмногообразия H^n евклидова пространства R^{2n} и пусть $\eta_1, \dots, \eta_n$ — ортонормированный базис нормальных полей к H^n, причем $\eta_n \in T_r^\perp H^n \cap T_{\overline{r}}^\perp \overline{H}^n$ — общее нормальное векторное поле к H^n и $\overline{H}^n$. Если коэффициенты кручения $\mu_{\tau\sigma|i}$ базиса $\eta_1, \dots, \eta_n$ удовлетворяют условию $\mu_{\tau\sigma|i} = 0$ для $i = 1, \dots, n$, $1 \le \tau, \sigma \le n-1$, то $\overline{H}^n$ имеет постоянную секционную кривизну -1.*

Доказательство. Из сформулированного выше предложения следует, что для общего нормального векторного поля η_n можно считать выполненными условия $L^n_{n1} = \cdots = L^n_{nn} = 0$. Далее, уравнения Вейнгартена для H^n с учетом условий доказываемой теоремы имеют вид ([4], формула (47.9))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_s}{\partial y_j} &= -e^{-2y_n} \sum_{l=1}^{n-1} L^s_{lj} r_l - L^s_{nj} r_n + \mu_{ns|j}\eta_n, \\ \frac{\partial \eta_n}{\partial y_j} &= -e^{-2y_n} \sum_{l=1}^{n-1} L^n_{lj} r_l + \sum_{\tau=1}^{n-1} \mu_{\tau n|j}\eta_\tau, \quad s,\tau = 1,\ldots,n-1, \quad j = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим через $\overline{g}_{ij} = \langle \overline{r}_{y_i}, \overline{r}_{y_j} \rangle$ коэффициенты первой фундаментальной формы подмногообразия $\overline{H}^n$. Из (2) получим для них следующие выражения:

$$\overline{g}_{ij} = \sum_{s=1}^{n-1} L^s_{ni} L^s_{nj}, \quad \overline{g}_{nn} = 1 + \sum_{s=1}^{n-1} (L^s_{nn})^2, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,n-1. \tag{4}$$

Используя (2), (3), находим вторые производные радиус-вектора $\overline{r}(y_1,\ldots,y_n)$

$$\begin{aligned} \overline{r}_{ij} &= -\sum_{s=1}^{n-1} \frac{\partial L^s_{ni}}{\partial y_j}\eta_s + e^{-2y_n} \sum_{l,s=1}^{n-1} L^s_{ni} L^s_{lj} r_l + \sum_{s=1}^{n-1} L^s_{ni} L^s_{nj} r_n - \sum_{s=1}^{n-1} L^s_{ni} \mu_{ns|j}\eta_n, \\ \overline{r}_{nn} &= \sum_{s=1}^{n-1} \left(L^s_{nn} - \frac{\partial L^s_{nn}}{\partial y_n} \right)\eta_s + e^{-2y_n} \sum_{l,s=1}^{n-1} L^s_{nn} L^s_{ln} r_l + \sum_{s=1}^{n-1} (L^s_{nn})^2 r_n - \sum_{s=1}^{n-1} L^s_{nn}\mu_{ns|n}\eta_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Из деривационных формул Гаусса (2) для $\overline{H}^n$ следует, что ортонормированными нормальными векторными полями к $\overline{H}^n$ будут $\eta_1 = e^{-y_n} r_1, \ldots, \eta_{n-1} = e^{-y_n} r_{n-1}, \eta_n = \eta_n$. Обозначим через $\overline{L}^s_{ij} = \langle \overline{r}_{ij}, \overline{\eta}_s \rangle$ коэффициенты вторых фундаментальных форм подногообразия $\overline{H}^n$. Из (5) получим для них выражения

$$\overline{L}^t_{ij} = e^{-y_n} \sum_{s=1}^{n-1} L^s_{ni} L^s_{tj}, \quad \overline{L}^n_{ij} = -\sum_{s=1}^{n-1} L^s_{ni}\mu_{ns|j}, \quad t = 1,\ldots,n-1, \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

Теперь доказательство теоремы сводится к проверке условия постоянства секционной кривизны подмногообразия $\overline{H}^n$ с использованием уравнения Гаусса

$$\sum_{s=1}^{n} (\overline{L}^s_{ik}\overline{L}^s_{jl} - \overline{L}^s_{il}\overline{L}^s_{jk}) = \overline{R}_{ijkl} = (-1)(\overline{g}_{ik}\overline{g}_{jl} - \overline{g}_{il}\overline{g}_{jk}), \tag{6}$$

где $\overline{R}_{ijkl}$ — компоненты тензора Римана подногообразия $\overline{H}^n$. Если принять во внимание, что в (4) метрический коэффициент $\overline{g}_{nn}$ отличается аналитическим выражением от остальных, то при проверке необходимо отдельно рассмотреть случай, когда совпадают индексы $i = k = n$. Проверим уравнение (6) в случаях а) $i,j,k,l \le n$ и все индексы между собой различны и в случае б) $i = k = n$ и $l \ne j$. Проверка остальных случаев проводится аналогично.

В случае а) правая часть уравнения (6) равна

$$\begin{aligned} \overline{g}_{il}\overline{g}_{jk} - \overline{g}_{ik}\overline{g}_{jl} &= \left(\sum_{t=1}^{n-1} L^t_{ni} L^t_{nl} \right)\left(\sum_{v=1}^{n-1} L^v_{nj} L^v_{nk} \right) - \left(\sum_{t=1}^{n-1} L^t_{ni} L^t_{nk} \right)\left(\sum_{v=1}^{n-1} L^v_{nj} L^v_{nl} \right) = \\ &= \sum_{t<v} \begin{vmatrix} L^t_{ni} & L^v_{ni} \\ L^t_{nj} & L^v_{nj} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L^t_{nl} & L^v_{nl} \\ L^t_{nk} & L^v_{nk} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

а левая часть (6) равна

$$\sum_{s=1}^{n}\overline{L}_{ik}^{s}\overline{L}_{jl}^{s}-\overline{L}_{il}^{s}\overline{L}_{jk}^{s}=e^{-2y_n}\sum_{s=1}^{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n-1}L_{ni}^{t}L_{sk}^{t}\sum_{v=1}^{n-1}L_{nj}^{v}L_{sl}^{v}-\sum_{t=1}^{n-1}L_{ni}^{t}L_{sl}^{t}\sum_{v=1}^{n-1}L_{nj}^{v}L_{sk}^{v}\right)+$$
$$+\sum_{t=1}^{n-1}L_{ni}^{t}\mu_{nt|k}\sum_{v=1}^{n-1}L_{nj}^{v}\mu_{kv|l}-\sum_{t=1}^{n-1}L_{ni}^{t}\mu_{nt|l}\sum_{v=1}^{n-1}L_{nj}^{v}\mu_{nv|k}=$$
$$=\sum_{t<v}\begin{vmatrix}L_{ni}^{t} & L_{ni}^{v}\\ L_{nj}^{t} & L_{nj}^{v}\end{vmatrix}\left(e^{-2y_n}\sum_{s=1}^{n-1}\begin{vmatrix}L_{sk}^{t} & L_{sk}^{v}\\ L_{sl}^{t} & L_{sl}^{v}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mu_{nt|k} & \mu_{nt|l}\\ \mu_{nv|k} & \mu_{nv|l}\end{vmatrix}\right).$$

Используем теперь уравнение Риччи ([4], формула (47.14)) для H^n

$$\mu_{tv|k,l}-\mu_{tv|l,k}+\sum_{r}\begin{vmatrix}\mu_{rt|k} & \mu_{rt|l}\\ \mu_{rv|k} & \mu_{rv|l}\end{vmatrix}+e^{-2y_n}\sum_{s=1}^{n-1}\begin{vmatrix}L_{sk}^{t} & L_{sk}^{v}\\ L_{sl}^{t} & L_{sl}^{v}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}L_{nk}^{t} & L_{nk}^{v}\\ L_{nl}^{t} & L_{nl}^{v}\end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

По условию теоремы $\mu_{tv|k}=0$ для $t,v<n$ и уравнения (7) приобретают вид

$$\begin{vmatrix}\mu_{nt|k} & \mu_{nt|l}\\ \mu_{nv|k} & \mu_{nv|l}\end{vmatrix}+e^{-2y_n}\sum_{s=1}^{n-1}\begin{vmatrix}L_{sk}^{t} & L_{sk}^{v}\\ L_{sl}^{t} & L_{sl}^{v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}L_{nl}^{t} & L_{nl}^{v}\\ L_{nk}^{t} & L_{nk}^{v}\end{vmatrix}. \tag{8}$$

Если умножить уравнение (8) на определитель $\begin{vmatrix}L_{ni}^{t} & L_{ni}^{v}\\ L_{nj}^{t} & L_{nj}^{v}\end{vmatrix}$ и просуммировать по всем парам (t,v), $1\le t<v\le n-1$, то получим уравнение (6) в изучаемом случае а).

В случае б) покажем, что

$$\sum_{s=1}^{n}(\overline{L}_{nn}^{s}\overline{L}_{jl}^{s}-\overline{L}_{nl}^{s}\overline{L}_{nj}^{s})=\overline{R}_{njnl}=-\overline{g}_{nn}\overline{g}_{jl}+\overline{g}_{nl}\overline{g}_{nj}. \tag{9}$$

Правая часть (9) равна

$$-\overline{g}_{nn}\overline{g}_{jl}+\overline{g}_{nl}\overline{g}_{nj}=-\left(1+\sum_{t=1}^{n-1}(L_{nn}^{t})^{2}\right)\sum_{v=1}^{n-1}L_{nj}^{v}L_{nl}^{v}+\sum_{t=1}^{n-1}L_{nn}^{t}L_{nl}^{t}\sum_{v=1}^{n-1}L_{nn}^{v}L_{nj}^{v}=$$
$$=-\sum_{v=1}^{n-1}L_{nj}^{v}L_{nl}^{v}+\sum_{t<v}\begin{vmatrix}L_{nj}^{t} & L_{nj}^{v}\\ L_{nn}^{t} & L_{nn}^{v}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}L_{nn}^{t} & L_{nn}^{v}\\ L_{nl}^{t} & L_{nl}^{v}\end{vmatrix}, \tag{10}$$

а левая часть (9) равна

$$\sum_{s=1}^{n}(\overline{L}_{nn}^{s}\overline{L}_{jl}^{s}-\overline{L}_{nl}^{s}\overline{L}_{jn}^{s})=e^{-2y_n}\sum_{s=1}^{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n-1}L_{nn}^{t}L_{sn}^{t}\sum_{v=1}^{n-1}L_{nl}^{v}L_{sj}^{v}-\sum_{t=1}^{n-1}L_{nn}^{t}L_{sl}^{t}\sum_{v=1}^{n-1}L_{nj}^{v}L_{sn}^{v}\right)+$$
$$+\sum_{t=1}^{n-1}L_{nn}^{t}\mu_{nt|n}\sum_{v=1}^{n-1}L_{nl}^{v}\mu_{nv|j}-\sum_{t=1}^{n-1}L_{nl}^{t}\mu_{nt|n}\sum_{v=1}^{n-1}L_{nn}^{v}\mu_{nv|j}. \tag{11}$$

Используем уравнения Гаусса для H^n

$$\sum_{v=1}^{n}(-L_{nj}^{v}L_{sn}^{v}+L_{nn}^{v}L_{sj}^{v})=R_{nsnj}=0,$$

если $s\ne j$;

$$\sum_{v=1}^{n}(-L_{nj}^{v}L_{jn}^{v}+L_{nn}^{v}L_{jj}^{v})=R_{njnj}=e^{2y_n},$$

если $s=j\ne n$.

Заменяя $\sum\limits_{v=1}^{n-1} L^v_{nj}L^v_{sn}$ в (11) с помощью этих уравнений, преобразуем правую часть равенства (11) к виду

$$e^{-2y_n}\sum_{s=1}^{n-1}\Big(\sum L^t_{nn}L^t_{sn}\sum L^v_{nl}L^v_{sj}-\sum L^t_{nn}L^t_{sl}\sum L^v_{nn}L^v_{sj}-e^{2y_n}\sum L^t_{nn}L^t_{jl}\Big)+$$

$$+\sum_{t<v}\begin{vmatrix}L^t_{nn} & L^v_{nn}\\ L^t_{nl} & L^v_{nl}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mu_{nt|n} & \mu_{nt|j}\\ \mu_{nv|n} & \mu_{nv|j}\end{vmatrix}=$$

$$=-\sum_{t=1}^{n}L^t_{nn}L^t_{jl}\sum_{t<v}\begin{vmatrix}L^t_{nn} & L^v_{nn}\\ L^t_{nl} & L^v_{nl}\end{vmatrix}\left(e^{-2y_n}\sum_{s=1}^{n-1}\begin{vmatrix}L^t_{sn} & L^v_{sn}\\ L^t_{sj} & L^v_{sj}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mu_{nt|n} & \mu_{nt|j}\\ \mu_{nv|n} & \mu_{nv|j}\end{vmatrix}\right). \quad (12)$$

Поскольку $j \neq l$, то в силу уравнения Гауссса для H^n ($\sum L^t_{nn}L^t_{jl}=\sum L^t_{nj}L^t_{nl}$) первые суммы в выражениях (10) и (11) совпадают, а оставшиеся равны в силу уравнений Риччи для H^n, что и доказывает случай б). Аналогично рассматриваются остальные возможные случаи уравнения (6) для компонент тензора Римана $\overline{R}_{nijk}$ и $\overline{R}_{nini}$. $\square$

Замечание 1. Теорема служит обобщением теоремы Ю.А. Аминова [3] о преобразовании Бианки псевдосферического подмногообразия H^n в R^{2n-1}, поскольку в этом случае нормальная связность погружения плоская, и можно выбрать нормальные поля так, чтобы все коэффициенты кручения обратились в нуль. Доказанная теорема является также обобщением теоремы 2 из [2] о том, что бикасательное преобразование Бианки псевдосферической поверхности H^2 в R^4 — псевдосферическая поверхность в R^4. Действительно, в случае $n=2$ из предложения следует существование общего нормального поля η_2 к T_rH^2 и $T_{\overline{r}}\overline{H}^2$, а условие на коэффициенты кручения является излишним. Нетрудно также прямо подсчитать коэффициенты вторых фундаментальных форм $\overline{H}^2$ и проверить единственное уравнение Гаусса $\overline{R}_{1212}=-\overline{g}_{11}\overline{g}_{22}+\overline{g}^2_{12}$.

Замечание 2. Условие на коэффициенты кручения нормального базиса можно сформулировать в более инвариантном виде. Пусть $F(r)$ — подпространство в $T^\perp_rH^n$, ортогональное векторному полю η_n. Тогда обращение в нуль всех коэффициентов кручения $\mu_{ij|k}$ для $1\le i,j<n$ равносильно условию $\nabla^\perp_X\eta=\lambda\eta_n$ для всех $X\in T_rH^n$ и всех $\eta\in F(r)$.

Замечание 3. Покажем, что теорему можно также доказать методом Ю.А. Аминова с применением уравнений Кодацци для H^n. Используя предложение, выберем базис нормальных векторных полей $\eta_1,\dots,\eta_n$ так, чтобы $L^n_{n1}=\dots=L^n_{nn}=0$. Тогда метрическая форма $\overline{H}^n$ примет вид

$$d\overline{s}^2=\sum_{s=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}L^s_{nj}dy_j\right)^2+dy_n^2.$$

Покажем, что можно перейти к другим координатам

$$\overline{y}_1=\overline{y}_1(y_1,\dots,y_n),\dots,\overline{y}_{n-1}=\overline{y}_{n-1}(y_1,\dots,y_n),\overline{y}_n=y_n,$$

в которых метрическая форма $\overline{H}^n$ примет вид

$$d\overline{s}^2=e^{-2\overline{y}_n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}d\overline{y}_i^2\right)+d\overline{y}_n^2. \quad (13)$$

Для этой цели используем уравнения Кодацци ([4], формула (47.12))

$$L^s_{nj,i}-L^s_{ni,j}=\sum_{t=1}^{n}(\mu_{ts|i}L^t_{nj}-\mu_{ts|j}L^t_{ni}), \quad (14)$$

где $1\le s<n$, $1\le i\neq j\le n$

Поскольку предполагаем, что коэффициенты кручения $\mu_{ts|j} = 0$ для индексов $t, s < n$ и $L^n_{nj} = 0$ для $j = 1, \dots, n$, то уравнения Кодацци (14) примут вид

$$L^s_{nj,i} - L^s_{ni,j} = 0 \tag{15}$$

Как и в ([1], с. 437) показывается, что из (15) вытекает справедливость уравнений

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(e^{y_n} L^s_{nj}) - \frac{\partial}{\partial y_j}(e^{y_n} L^s_{ni}) = 0.$$

Поэтому система дифференциальных уравнений

$$d\overline{y}_s = e^{y_n} \sum_{j=1}^{n} L^s_{nj} dy_j, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

будет вполне интегрируемой, причем $\frac{\partial \overline{y}_s}{\partial y_t} = e^{y_n} L^s_{nt}$, $1 \le s \le n-1$, $1 \le t \le n$. Поэтому якобиан перехода от координат (y_t) к координатам $\overline{y}_s$ равен

$$\left|\frac{\partial \overline{y}_s}{\partial y_t}\right| = e^{(n-1)y_n} |L^s_{nt}|,$$

где $1 \le s, t \le n-1$.

Последний детерминант отличен от нуля, т. к. векторы $\overline{r}_{y_1}, \dots, \overline{r}_{y_{n-1}}$ линейно независимы в любой точке регулярного подмногообразия $\overline{H}^n$. Следовательно, возможен переход к карте $(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n)$, в которой линейный элемент $\overline{H}^n$ имеет вид (13), и секционная кривизна в таком случае, как известно, равна -1.

Литература

1. Аминов Ю.А. *Геометрия подмногообразий.* – Киев: Наук. думка, 2002. – 467 с.
2. Aminov Yu., Sym A. *On Bianchi and Backlund transformations of two-dimensional surfaces in* E^4 // Mathem. Physics, Analysis and Geometry. – 2000. – V. 3. – P. 75–89.
3. Аминов Ю.А. *Преобразование Бианки для области многомерного пространства Лобачевского* // Укр. геом. сб. – 1978. – Вып. 21. – С. 3–5.
4. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* – М.: Ин. лит., 1948. – 312 с.

Харьковский национальный университет

Поступила 20.06.2003