И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 2 (501)

УДК 517.95

К.Б. САБИТОВ, Р.Р. ИЛЬЯСОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

1. Постановка задачи и ее редукция к нелокальной эллиптической задаче. Рассмотрим уравнение С.П. Пулькина

$$Su \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \frac{2q}{x} u_x = 0, \tag{1}$$

где $q \in R$, в области D, ограниченной при $y < 0$ характеристиками AC: $x + y = 0$, $A = (0, 0)$, $C = (1/2, -1/2)$ и CB: $x - y = 1$, $B = (1, 0)$ уравнения (1); отрезком AK, $K = (0, k)$, $k > 0$, оси y и кусочно-гладкой кривой Γ, лежащей в первой четверти, с концами в точках K и B.

Обозначим $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ и для уравнения (1) поставим задачу Трикоми.

Задача Трикоми. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_- \cup D_+), \tag{2}$$

$$Su(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D_- \cup D_+, \tag{3}$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in AC, \tag{4}$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in AK, \quad q < 1/2, \tag{5}$$

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{6}$$

где f — заданная функция, $f(K) = 0$ при $q < 1/2$.

Наличие или отсутствие краевого условия на отрезке AK в зависимости от q объясняется тем, что уравнение (1) в области эллиптичности D_+ заменой переменной $x = 2\sqrt{z}$, $0 < z < 1$, преобразуется в уравнение

$$zw_{zz} + w_{yy} + (1/2 + q)w_z = 0, \quad w(z, y) = u(x, y). \tag{7}$$

При этом область D_+ плоскости (x, y) отображается в некоторую область Q плоскости (z, y), ограниченную осями $z = 0$, $y = 0$ и некоторой кусочно-гладкой кривой γ. Для уравнения (7) в области Q справедлива теорема Келдыша [1]. Согласно этой теореме при $q < 1/2$ существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения (7). При $q \geq 1/2$ задача Дирихле переопределена, поэтому единственное решение в классе ограниченных в области Q функций имеет граничная задача для уравнения (7), в которой краевое условие задается на границе ∂Q, за исключением линии вырождения $z = 0$.

Впервые задача Трикоми для уравнения (1) при $q \geq 1/2$ изучалась в [2], [3], где на основании принципа экстремума установлена единственность и методом интегральных уравнений доказана теорема существования решения этой задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-61-97901.

В работе [4] для уравнения (1) при $q > 0$ в смешанной области D без каких-либо геометрических ограничений на границу Γ установлен принцип максимума, из которого следует единственность решения задачи (2)–(6) при всех $q > 0$. В этой же работе приведен обзор статей, посвященных исследованию краевых задач для уравнения (1).

В данной статье на основании работ [5], [6] предлагается способ построения решения задачи (2)–(6) в виде ряда по специальным функциям для значений параметра $0 < q < 1$ в случае, когда кривая Γ совпадает с четвертью единичной окружности $\Gamma_0 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0\}$. Ранее в [7] при $0 < q < 1/2$ решение задачи Трикоми уже строилось указанным способом, но при дополнительном интегральном условии на функцию $f(\varphi)$, которое здесь удалось снять.

Отметим, что решение задачи Трикоми можно строить предлагаемым способом и для остальных значений параметра $q < 0$ и $q \geq 1$.

Для удобства приведем формулировку задачи Трикоми в случае $0 < q < 1$ и $\Gamma \equiv \Gamma_0$.

Задача T. *Найти функцию* $u(x, y)$ *из класса* (2), *которая является решением уравнения* (3) *на множестве* $D_+ \cup D_-$, *удовлетворяет условиям* (4) *и*

$$u(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 < q < 1/2, \tag{8}$$

$$u(x, y)\big|_{\Gamma_0} = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big|_{r=1} = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \tag{9}$$

где f *— заданная функция,* $f(\pi/2) = 0$ *при* $0 < q < 1/2$.

Решение задачи T в области D_- представим как решение задачи Дарбу для уравнения (1) с данными

$$u(x, -x) = 0, \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1. \tag{10}$$

Если $\nu(x) \in L[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, то единственное решение задачи Дарбу с условиями (10) в классе функций $C(\overline{D_-}) \cap C^1(D_- \cup AB) \cap C^2(D_-)$ задается формулой [2]

$$u(x, y) = \int_0^{x+y} \left(\frac{4t^2}{(t+x)^2 - y^2}\right)^q F\left(q, q, 1; \frac{(t-x)^2 - y^2}{(t+x)^2 - y^2}\right)\nu(t)dt, \tag{11}$$

где $F(\cdot)$ – гипергеометрическая функция.

Полагая в равенстве (11) $y = 0$, получим соотношение

$$u(x, 0) = \int_0^x \left(\frac{2t}{t+x}\right)^{2q} F\left(q, q, 1; \left(\frac{t-x}{t+x}\right)^2\right) u_y(t, 0)dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{12}$$

которое позволяет свести задачу T к следующей нелокальной эллиптической задаче в области D_+.

Задача T_+.*Найти функцию* $u(x, y)$ *из класса*

$$u(x, y) \in C(\overline{D_+}) \cap C^1(D_+ \cup AB) \cap C^2(D_+), \tag{13}$$

удовлетворяющую уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2q}{x}u_x = 0, \quad (x, y) \in D_+, \tag{14}$$

и условиям (8), (9), (12).

Для построения решения эллиптической задачи T_+ перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда уравнение (14) принимает вид

$$r^2 v_{rr} + v_{\varphi\varphi} + (1 + 2q) r v_r - 2q \operatorname{tg}\varphi\, v_\varphi = 0, \quad v(r, \varphi) = u(x, y). \tag{15}$$

Из уравнения (15), разделив переменные $v(r,\varphi)=R(r)\cdot\Phi(\varphi)\neq 0$ и учитывая условия (13), (8), получим

$$r^2R''(r)+(1+2q)rR'(r)-\mu^2R(r)=0,\quad 0<r<1, \tag{16}$$

$$R(0)=0,\quad |R(1)|<+\infty, \tag{17}$$

$$\Phi''(\varphi)-2q\operatorname{tg}\varphi\Phi'(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\quad 0<\varphi<\pi/2, \tag{18}$$

$$\Phi(\pi/2)=0,\quad 0<q<1/2, \tag{19}$$

где μ — константа разделения. Решением уравнения (16), удовлетворяющим условию (17), является функция

$$R(r)=r^{\rho-q},\quad \rho=\sqrt{q^2+\mu^2}. \tag{20}$$

Используя равенства

$$u(x,0)=R(x)\Phi(0)=\Phi(0)x^{\rho-q},\quad u_y(x,0)=\frac{1}{x}R(x)\Phi'(0)=\Phi'(0)x^{\rho-q-1},$$

из нелокального условия (12) получим второе граничное условие для функции $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi(0)=J(\rho,q)\Phi'(0),\quad J(\rho,q)=\int_0^1 t^{\rho-q-1}\left(\frac{2t}{1+t}\right)^{2q}F\left(q,q,1;\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2\right)dt.$$

Для вычисления интеграла $J(\rho,q)$ воспользуемся квадратичным преобразованием гипергеометрической функции ([8], с. 121) и заменим t на $\sqrt{1-s}$. Тогда из формулы 7.512(4) ([9], с. 863) находим значение

$$J(\rho,q)=\frac{\Gamma(\frac{\rho+q}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\rho-q}{2})}{2\Gamma(1+\frac{\rho-q}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\rho+q}{2})}.$$

Таким образом, приходим к следующей спектральной задаче: *найти значения параметра* ρ *и соответствующие им ненулевые функции* $\Phi(\varphi)$, *которые являются решениями уравнения* (18) *и удовлетворяют однородным граничным условиям* (19) *и*

$$2\Gamma\left(1+\frac{\rho-q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\rho+q}{2}\right)\Phi(0)-\Gamma\left(\frac{\rho+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\rho-q}{2}\right)\Phi'(0)=0. \tag{21}$$

Уравнение (18) заменой $z=\sin^2\varphi$ преобразуется к гипергеометрическому уравнению

$$z(1-z)F''(z)+\left[\frac{1}{2}-(1+q)z\right]F'(z)+\frac{\mu^2}{4}F(z)=0,\quad F(z)=\Phi(\varphi). \tag{22}$$

Общее решение уравнения (22) в окрестности особой точки $z=1$ строится в явном виде ([10], с. 7). Используя это решение и вернувшись к переменной φ, найдем общее решение уравнения (18) в виде

$$\Phi(\varphi)=c\Phi_1(\varphi)+d\Phi_2(\varphi),\quad 0<\varphi<\pi/2, \tag{23}$$

$$\Phi_1(\varphi)=F\left(\frac{q-\rho}{2},\frac{q+\rho}{2},q+\frac{1}{2};\cos^2\varphi\right), \tag{24}$$

$$\Phi_2(\varphi)=(\cos\varphi)^{1-2q}F\left(\frac{1-q-\rho}{2},\frac{1-q+\rho}{2},\frac{3}{2}-q;\cos^2\varphi\right), \tag{25}$$

где c и d — произвольные действительные постоянные.

2. Построение решения эллиптической задачи в случае $0<q<1/2$. Положим $0<q<1/2$ и наложим на функцию (23) условие (19). Тогда в общем решении (23) $c=0$.

Подберем параметр ρ так, чтобы функция (25) удовлетворяла граничному условию (21). Получим уравнение относительно ρ: $\operatorname{tg} \frac{\rho+q}{2}\pi = -1$, из которого, учитывая $\rho > q$, находим значения

$$\rho_n = 2n - q - 1/2, \quad n \in N. \tag{26}$$

Учитывая (26), (20) и (25), построим систему функций

$$u_n(x,y) = v_n(r,\varphi) = r^{2n-2q-1/2}(\cos\varphi)^{1-2q}F(3/4-n, n-q+1/4, 3/2-q; \cos^2\varphi), \tag{27}$$

которые удовлетворяют условиям задачи T_+, за исключением граничного условия (9).

Решение задачи T_+ будем искать в виде суммы равномерно сходящегося на $\overline{D}_+$ ряда по системе функций (27):

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(r,\varphi) \tag{28}$$

с неизвестными пока коэффициентами f_n.

Согласно условию (9), полагая в (28) $r = 1$, получим разложение

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (\cos\varphi)^{1-2q} F(3/4-n, n-q+1/4, 3/2-q; \cos^2\varphi). \tag{29}$$

Заменим гипергеометрическую функцию в (29) на функцию Лежандра ([8], с. 148) и применим затем формулу Мелера–Дирихле ([8], с. 180):

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k f_n}{\Gamma(1-q)} \int_0^{\theta} \frac{\cos(2n-q-1/2)t}{(\cos t - \cos\theta)^q} dt, \tag{30}$$
$$\theta = \pi/2 - \varphi, \quad k = \frac{2^{1-q}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2} - q\right).$$

Поменяв местами в (30) операции суммирования и интегрирования, получим интегральное уравнение

$$f(\pi/2 - \theta) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^{\theta} \frac{g(t)dt}{(\cos t - \cos\theta)^q} \tag{31}$$

относительно функции

$$g(\theta) = k \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(2n-q-1/2)\theta. \tag{32}$$

Преобразуем уравнение (31) заменами переменных $t = \arccos(1-s)$, $\theta = \arccos(1-x)$ к уравнению Абеля ([11], с. 38) вида

$$f(\pi/2 - \arccos(1-x)) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^x \frac{g(\arccos(1-s))ds}{\sqrt{1-(1-s)^2}(x-s)^q}$$

с показателем q относительно функции $g(\arccos(1-x))/\sqrt{1-(1-x)^2}$. Обратив уравнение Абеля при условии $f(\pi/2) = 0$, имеем

$$\frac{g(\arccos(1-x))}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{-1}{\Gamma(q)} \int_0^x \frac{f'(\pi/2 - \arccos(1-s))}{\sqrt{1-(1-s)^2}(x-s)^{1-q}} ds.$$

Вернувшись к переменным t и θ, приходим к выражению

$$g(\theta) = -\frac{\sin\theta}{\Gamma(q)} \int_0^{\theta} \frac{f'(\pi/2 - t)dt}{(\cos t - \cos\theta)^{1-q}}. \tag{33}$$

Если $f(\varphi)$ дифференцируема на $(0,\pi/2)$ и $f'(\varphi)\in L_{2/(1+4q)}[0,\pi/2]$, то функция (33) принадлежит $L_2[0,\pi/2]$. Тогда из работы [12] следует, что ряд в равенстве (32), коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$f_n=\frac{2}{k}\int_0^{\pi/2}g(\theta)h_n(\theta)d\theta, \tag{34}$$

$$h_n(\theta)=\frac{(2\cos\theta)^{1/2-q}}{\pi\sin\theta}\sum_{k=1}^{n}B_{n-k}\sin 2k\theta,$$

$$B_l=\sum_{m=0}^{l}(-1)^{l-m}C_1^{l-m}C_{q-1/2}^{m}=C_{q-1/2}^{l}-C_{q-1/2}^{l-1},$$

сходится в среднем на интервале $(0,\pi/2)$ к функции g, выражаемой через f по формуле (33).

Обозначим через $S_m(\theta)$ m-ю частичную сумму ряда в (30), а через $s_m(\theta)$ — m-ю частичную сумму ряда в (32). Используя неравенство Коши–Буняковского, при $m>p$, $p\in N$, получим оценку

$$\begin{aligned}\bigl|S_m(\theta)-S_p(\theta)\bigr|&\le\frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_0^{\theta}\Bigl|\sum_{n=p+1}^{m}kf_n\cos(2n-q-1/2)t\Bigr|(\cos t-\cos\theta)^{-q}dt\le\\ &\le\frac{1}{\Gamma(1-q)}\biggl(\int_0^{\theta}\frac{dt}{(\cos t-\cos\theta)^{2q}}\biggr)^{1/2}\biggl(\int_0^{\theta}\Bigl(\sum_{n=p+1}^{m}kf_n\cos(2n-q-1/2)t\Bigr)^2dt\biggr)^{1/2}\le\\ &\le C(q)\bigl\|s_m(\theta)-s_p(\theta)\bigr\|_{L_2},\end{aligned}$$

где $C(q)$ — некоторая константа, зависящая только от q.

Из сходимости в среднем последовательности $s_m(\theta)$ вытекает ее фундаментальность в пространстве $L_2[0,\pi/2]$. В силу полученной оценки для последовательности $S_m(\theta)$ справедлив критерий Коши о равномерной сходимости. Учитывая базисность системы $\{\cos(2n-q-1/2)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2[0,\pi/2]$, имеем равномерную сходимость ряда в равенстве (29) к функции $f(\varphi)$ на сегменте $[0,\pi/2]$. Тогда равномерно на $\overline{D}_+$ сходится ряд (28), а также равномерно в $D_+\cup AB$ сходятся ряды, полученные почленным дифференцированием (28) по r и φ любое число раз. Следовательно, сумма ряда (28), коэффициенты которого вычисляются по формуле (34), является решением эллиптической задачи T_+.

3. Построение решения задачи Трикоми в случае $0<q<1/2$. Используя формулу дифференцирования ([10], с. 12) и формулу автотрансформации ([10], с. 10) гипергеометрической функции, вычислим след производной по y на отрезке AB от функции (28):

$$u_y(x,0)=\nu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}k_1^{(n)}f_nx^{2n-2q-3/2}, \tag{35}$$

где $k_1^{(n)}=(n-3/4)F\bigl(n-q-1/4,5/4-n,3/2-q;1\bigr)$. Подставив (35) вместо $\nu(x)$ в формулу (11), получим представление решения задачи Трикоми в области D_- в виде суммы ряда $u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}k_1^{(n)}f_nI_n(x,y)$, где

$$I_n(x,y)=\int_0^{x+y}t^{2n-2q-3/2}\biggl(\frac{4t^2}{(t+x)^2-y^2}\biggr)^qF\biggl(q,q,1;\frac{(t-x)^2-y^2}{(t+x)^2-y^2}\biggr)dt. \tag{36}$$

Интеграл (36) представляет собой единственное решение задачи Дарбу для уравнения (1) в области D_- с краевыми условиями частного вида $u(x,-x)=0$, $u_y(x,0)=x^{2n-2q-3/2}$. Это решение можно построить разделением переменных $\sigma = \sqrt{x^2 - y^2}$, $0 < \sigma < 1$, $\theta = -\frac{y^2}{x^2 - y^2}$, $-\infty < \theta < 0$, в уравнении (1) [13]:

$$I_n(x,y) = \frac{(x^2-y^2)^{n-q-1/4}}{k_2^{(n)}}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right)^{n-1/4} \times$$
$$\times F\left(n-1/4, n-q+1/4, 2n-q+1/2; \frac{x^2-y^2}{x^2}\right),$$
$$k_2^{(n)} = (2n-1/2)F(n-q-1/4, n+1/4, 2n-q+1/2; 1).$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если* $0 < q < 1/2$ *и функция* $f(\varphi)$ *непрерывна на сегменте* $[0, \pi/2]$, $f(\pi/2) = 0$ *и дифференцируема на интервале* $(0, \pi/2)$, $f'(\varphi) \in L_{2/(1+4q)}[0, \pi/2]$, *то единственное решение задачи Трикоми с условиями* (2)–(4), (8), (9) *имеет вид*

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n u_n^+(x,y), & (x,y) \in D_+; \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n f_n u_n^-(x,y), & (x,y) \in D_-, \end{cases}$$

где коэффициенты f_n *вычисляются по формулам* (34), $k_n = k_1^{(n)}/k_2^{(n)}$ *и*

$$u_n^+(x,y) = x^{2n-2q-1/2}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^{3/4-n} \times$$
$$\times F\left(3/4-n, n-q+1/4, 3/2-q; \frac{x^2}{x^2+y^2}\right),$$
$$u_n^-(x,y) = x^{2n-2q-1/2}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right)^{2n-q-1/2} \times$$
$$\times F\left(n-1/4, n-q+1/4, 2n-q+1/2; \frac{x^2-y^2}{x^2}\right).$$

4. Построение решения задачи Трикоми в случае $1/2 \leq q < 1$. Построим решение задачи T по схеме, аналогичной случаю $0 < q < 1/2$. Вначале найдем решение нелокальной эллиптической задачи с условиями (12)–(14), (9). При $1/2 \leq q < 1$ ограниченным решением уравнения (18) является функция (24), что соответствует значению $d = 0$ в общем решении (23). Удовлетворив (24) граничному условию (21), получим уравнение относительно параметра ρ

$$\operatorname{tg}\frac{\rho - q}{2} = 1,$$

решая которое, находим

$$\rho_n = 2n + q - 3/2, \quad n \in N. \tag{37}$$

Значениям (37) соответствует система функций, удовлетворяющих условиям (12)–(14),

$$v_n(r,\varphi) = r^{2n-3/2}F(3/4-n, n+q-3/4, 1/2+q; \cos^2\varphi). \tag{38}$$

Решение эллиптической задачи, или, что то же самое, решение задачи Трикоми в области D_+ будем искать в виде суммы ряда по системе функций (38) с некоторыми коэффициентами $\overline{f}_n$, предполагая его равномерную сходимость на $\overline{D}_+$,

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f}_n v_n(r,\varphi). \tag{39}$$

Положив в равенстве (39) согласно условию (9) $r = 1$, получим разложение функции $f(\varphi)$ в ряд по специальным функциям

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f}_n F(3/4 - n, n + q - 3/4, 1/2 - q; \cos^2 \varphi). \tag{40}$$

Заменив переменную φ на $\pi/2 - \theta$ и используя формулы, представленные в ([8], сс. 148, 180), преобразуем (40) к виду

$$f(\pi/2 - \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{k}\,\overline{f}_n}{\Gamma(q)} (\sin\theta)^{1-2q} \int_0^{\theta} \frac{\cos(2n + q - 3/2)t}{(\cos t - \cos\theta)^{1-q}} dt, \tag{41}$$

$$\overline{k} = \frac{2^q}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + q\right).$$

Обе части (41) умножим на ограниченную величину $\sin^{2q-1}\theta$ и поменяем местами операции суммирования и интегрирования. Получим интегральное уравнение вида

$$(\sin\theta)^{2q-1} f(\pi/2 - \theta) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int\limits_0^{\theta} \frac{\overline{g}(t)dt}{(\cos t - \cos\theta)^{1-q}},$$

которое обратим относительно функции

$$\overline{g}(\theta) = \overline{k} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f}_n \cos(2n + q - 3/2)\theta. \tag{42}$$

Предполагая функцию $f(\varphi)$ дифференцируемой на интервале $(0, \pi/2)$ и $f'(\varphi) \in L_{2/(5-4q)}[0, \pi/2]$, получим суммируемое с квадратом на $[0, \pi/2]$ решение

$$\overline{g}(\theta) = \frac{\sin\theta}{\Gamma(1-q)} \int_0^{\theta} \frac{\frac{d}{dt}\left[(\cos t)^{2q-1} f(\pi/2 - t)\right] dt}{(\cos t - \cos\theta)^q}. \tag{43}$$

Коэффициенты $\overline{f}_n$ вычислим по формулам [12]

$$\overline{f}_n = \frac{2}{\overline{k}} \int_0^{\pi/2} \overline{g}(\theta) \overline{h}_n(\theta) d\theta, \tag{44}$$

$$\overline{h}_n(\theta) = \frac{(2\cos\theta)^{q-1/2}}{\pi \sin\theta} \sum_{k=1}^{n} \left[C_{1/2-q}^{n-k} - C_{1/2-q}^{n-k-1}\right] \sin 2k\theta.$$

Из сходимости в среднем ряда (42) к функции (43) следует равномерная на $[0, \pi/2]$ сходимость ряда (40) к функции $f(\varphi)$. Тогда ряд (39) равномерно на $\overline{D}_+$ сходится и представляет собой решение задачи Трикоми в области D_+.

Решение задачи Трикоми в области D_- найдем, подставив значения $u_y = v_r r_y + v_\varphi \varphi_y$ на отрезке AB в формулу (11).

Итак, доказана

Теорема 2. *Если $1/2 \le q < 1$ и функция $f(\varphi)$ непрерывна на сегменте $[0, \pi/2]$ и дифференцируема на интервале $(0, \pi/2)$, $f'(\varphi) \in L_{2/(5-4q)}[0, \pi/2]$, то единственное решение задачи Трикоми с условиями* (2)–(4), (9) *имеет вид*

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{f}_n u_n^+(x, y), & (x, y) \in D_+; \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{k}_n \overline{f}_n u_n^-(x, y), & (x, y) \in D_-, \end{cases}$$

где коэффициенты $\overline{f}_n$ *вычисляются по формулам* (44),

$$\overline{k}_n = \frac{F(3/4-n, n+q-3/4, 1/2+q; 1)}{F(n-1/4, n+q-3/4, 2n+q-1/2; 1)},$$

$$u_n^+(x,y) = (x^2+y^2)^{n-3/4} F\left(3/4-n, n+q-3/4, 1/2+q; \frac{x^2}{x^2+y^2}\right),$$

$$u_n^-(x,y) = (x^2-y^2)^{n-3/4}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right)^{n+q-3/4} \times$$

$$\times F\left(n-1/4, n+q-3/4, 2n+q-1/2; \frac{x^2-y^2}{x^2}\right).$$

Литература

1. Келдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области* // ДАН СССР. – 1951. – Т. 77. – № 2. – С. 181–183.
2. Пулькин С.П. *Некоторые краевые задачи для уравнения* $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0$ // Учен. зап. Куйбышевск. пед. ин-та. – 1958. – Вып. 21. – С. 3–54.
3. Пулькин С.П. *О единственности решения сингулярной задачи Геллерстедта* // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 6. – С. 214–225.
4. Сабитов К.Б. *О принципе максимума для уравнения смешанного типа* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 11. – С. 1967–1976.
5. Моисеев Е.И. *О представлении решения задачи Трикоми в виде биортогонального ряда* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 7. – С. 1229–1237.
6. Сабитов К.Б., Карамова А.А. *Решение одной газодинамической задачи для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения* // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 1. – С. 111–116.
7. Сабитов К. Б., Ильясов Р.Р. *Решение задачи Трикоми для уравнения с сингулярным коэффициентом методом разделения переменных* // Тр. международн. научн. конф. "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы". Ч. 3. – Анализ и дифференц. уравнения. – Уфа, 2000. – С. 153–158.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм и рядов.* – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
10. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* – М.: Высш. школа, 1985. – 304 с.
11. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск, 1987. – 688 с.
12. Моисеев Е.И. *О базисности одной системы синусов* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 1. – С. 117–179.
13. Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. *О некорректности краевых задач для одного класса гиперболических уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 5. – С. 59–63.

Стерлитамакский государственный педагогический институт

Стерлитамакский филиал Академии наук Республики Башкортостан

Поступила
27.02.2003