ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 3 (538)

УДК 517.988

Б.А. ШУВАР, М.И. КОПАЧ

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ ИТЕРАТИВНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ

Малоизвестные и с математической точки зрения неисследованные методы итеративного агрегирования появились в 60-е годы прошлого столетия из-за потребности практического решения задач математической экономики и имеют экономическую интерпретацию. Появление этих методов, как и самого термина, связывают с работами Л.М. Дудкина и Е.Б. Ершова (см. [1], с. 155–158). Показательным относительно методов итеративного агрегирования является следующее высказывание ([1], с. 158): "В связи с тем, что теория метода развита мало и условия его сходимости неизвестны, были проведены многочисленные экспериментальные вычисления; в многочисленных ситуациях метод оказался весьма эффективным". Для однопараметрического случая важный результат приведен в [1]. В применении к системе линейных алгебраических уравнений вида $x = Ax+b$ условия сходимости метода, приведенные в ([1], с. 156), предполагают, в частности, положительность элементов a_{ij} $(i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m)$ матрицы A, неотрицательность компонент b_i векторов свободных членов и выполнение неравенства $\rho(A) < 1$ для спектрального радиуса матрицы A.

В данной работе исследуются некоторые модификации методов итеративного агрегирования для линейного уравнения

$$x = Ax + b, \tag{1}$$

рассматриваемого в банаховом пространстве E с линейным непрерывным оператором $A : E \to E$ $(b \in E)$. Предлагаемая методика, являющаяся развитием предложенного в [2]–[4] подхода, позволяет изучать как однопараметрические, так и многопараметрические случаи. Условия сходимости не содержат, вообще говоря, требований знакопостоянства оператора A. Исследуемые алгоритмы могут сходиться как при $\rho(A) < 1$, так и при $\rho(A) > 1$.

Рассмотрим сначала однопараметрический случай. Последовательности $\{x^{(n)}\}$, $\{y^{(n)}\}$ вычисляем с помощью формул

$$x^{(n+1)} = \frac{(\varphi, x^{(n+1)}) + y^{(n+1)}}{(\varphi, x^{(n)}) + y^{(n)}}\bigl(Ax^{(n)} + a^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)})\bigr) + b, \tag{2}$$

$$y^{(n+1)} = \frac{(\varphi, x^{(n+1)}) + y^{(n+1)}}{(\varphi, x^{(n)}) + y^{(n)}}\bigl((\alpha, x^{(n)}) + \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)})\bigr) + \lambda y^{(n+1)}, \tag{3}$$

считая $x^{(0)} \in E$ заданным произвольно. Предполагаем, что элементы $a^{(n)} \in E$ $(n = 0,1,\dots)$, $\alpha, \varphi \in E^*$, где E^* — сопряженное с E банахово пространство, выбраны произвольно таким способом, что

$$\alpha_0^{(n)} + (\varphi, a^{(n)}) = \lambda \quad (n = 0,1,\dots), \tag{4}$$

где $y^{(0)}, \lambda \neq 1$, $\alpha_0^{(n)}$ $(n = 0,1,\dots)$ — заданные числа, которые для упрощения изложения будем считать вещественными. Предположим также, что $1 - \lambda + \alpha_0^{(n)} \neq 0$ $(n = 0,1,\dots)$, $(\varphi, b) \neq 0$, приписывая символу (φ, x) значения линейного функционала $\varphi \in E^*$ на элементах $x \in E$. Вместе с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$y = \lambda y + (\alpha, x), \quad y \in R^1, \tag{5}$$

с дополнительным неизвестным y и

$$\alpha \stackrel{\text{df}}{=} A_1^* \varphi = \lambda \varphi - A^* \varphi, \tag{6}$$

поскольку оператор A_1^* используется только формально и в расчетах можно ограничится использованием числа α, A_1^*, A^* — сопряженные к A_1, A операторы соответственно. Совокупность пар $\{x, y\}$ ($x \in E$, $y \in R^1$, R^1 — множество вещественных чисел), для которых выполняется равенство

$$(\varphi, x) + y = \frac{(\varphi, b)}{1 - \lambda}, \tag{7}$$

обозначим через E_0.

Лемма 1. *Если пара $\{x^*, y^*\}$ является решением системы (1), (5) и $\lambda \neq 1$, то $\{x^*, y^*\} \in E_0$.*

Доказательство. Используя (1), (4)–(6), получим $(\varphi, x^*) + y^* = (\varphi, Ax^*) + (\varphi, b) + \lambda y^* + (\alpha, x^*) = \lambda[(\varphi, x^*) + y^*]$. Согласно $\lambda \neq 1$, находим $\{x^*, y^*\} \in E_0$. □

Лемма 2. *Если $x^{(0)} \in E$, $y^{(0)} \in R^1$, то $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in E_0$ $(n = 1, 2, \dots)$, где $\{x^n\}$, $\{y^n\}$ вычисляются по формулам (2), (3).*

Доказательство. При произвольных $x^{(n)} \in E$, $y^{(n)} \in R^1$ из (4)–(6) вытекает

$$\begin{aligned}
(\varphi, x^{(n+1)}) + y^{(n+1)} &= \frac{(\varphi, x^{(n+1)}) + y^{(n+1)}}{(\varphi, x^{(n)}) + y^{(n)}}[(\varphi, Ax^{(n)}) + (\varphi, a^{(n)})(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + \\
&\quad + (\alpha, x^{(n)}) + \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + \lambda y^{(n+1)}] + (\varphi, b) = \\
&= \frac{(\varphi, x^{(n+1)}) + y^{(n+1)}}{(\varphi, x^{(n)}) + y^{(n)}}[(A^*\varphi, x^{(n)}) + ((\varphi, a^{(n)}) + \alpha_0^{(n)})y^{(n)} + (-(\varphi, a^{(n)}) - \alpha_0^{(n)} + \lambda)y^{(n+1)} + \\
&\quad + (\alpha, x^{(n)})] + (\varphi, b) = \lambda \frac{(\varphi, x^{(n+1)}) + y^{(n+1)}}{(\varphi, x^{(n)}) + y^{(n)}}[(\varphi, x^{(n)}) + y^{(n)}] + (\varphi, b) = \lambda[(\varphi, x^{(n+1)}) + y^{(n+1)}] + (\varphi, b).
\end{aligned}$$

Отсюда $\{x^{(n+1)}, y^{(n+1)}\} \in E_0$. В силу принципа математической индукции лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 следует

Лемма 3. *Если $\lambda \neq 1$ и $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in E_0$, то $(\varphi, x^{(n)} - x^*) + y^{(n)} - y^* = 0$ $(n = 0, 1, \dots)$.*

Наряду с итерациями (2), (3) рассмотрим итерационный процесс

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \tag{8}$$

$$y^{(n+1)} = (\alpha, x^{(n)}) + \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + \lambda y^{(n+1)}. \tag{9}$$

Лемма 4. *Из соотношений $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in E_0$ следует, что итерационные процессы (2), (3) и (8), (9) тождественны между собой.*

Утверждение леммы является непосредственным следствием леммы 2.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \neq 1$, $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in E_0$, существуют такие $\psi \in E$ и $\psi_0 \in R^1$, что $\|H_\psi\| \leq q < 1$, где оператор H_ψ, действующий из E_1 в E_1, определен "матрицей"*

$$H_\psi = \begin{pmatrix} A - F_0 & \frac{(1-\lambda)a^{(n)} + \psi}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}} \\ G_0 & \frac{\alpha_0^{(n)} - \psi_0}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}} \end{pmatrix},$$

а банахово пространство E_1 определено как пространство $E_1 = E\bigcup R^1$. Тогда процесс (2), (3) *сходится к решению* (x^*, y^*) *системы* (1), (5) *не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем q. При этом итерационный алгоритм* (2), (3) *можно заменить итерационным алгоритмом* (8), (9) *при $n \geq 1$.*

Доказательство. Пусть

$$F_0 x = \frac{a^{(n)}}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}(\alpha, x) - \frac{\psi}{1-\lambda+\alpha_0}(\varphi, x), \quad G_0 x = \frac{(\alpha - \psi_0\varphi, x)}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}.$$

Равенства (8), (9) представим в виде одного равенства $\omega^{(n+1)} = H_\psi \omega^{(n)}$, использовав обозначение $\omega^{(k)} = \{x^{(k)} - x^*,\ y^{(k)} - y^*\}$. $\square$

Поскольку из (6), (7) вытекает соотношение

$$x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) - \frac{a^{(n)}}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}((1-\lambda)\varphi + \alpha, x^{(n)} - x^*), \tag{10}$$

то имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть $\lambda \neq 1$, $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in E_0$ и для линейного относительно $x^{(n)} - x^*$ оператора $H_0 = A(x^{(n)} - x^*) - \frac{a^{(n)}}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}((1-\lambda)\varphi + \alpha, x^{(n)} - x^*)$, порожденного правой частью равенства* (10), *имеем $\|H_0\| \leq q_0 < 1$. Тогда последовательность $\{x^{(n)}\}$, построенная с помощью алгоритма* (2), (3) *сходится к решению уравнения* (1).

Доказательство получается из теоремы 1 при $\psi = -(1-\lambda)a^{(n)}$.

Пример. Если E является евклидовым пространством R^N размерности $N \geq 2$, то можно привести элементарное доказательство, получаемое с помощью метода наименьших квадратов практически очевидным способом. В качестве q можно выбрать абсолютную величину второго по абсолютной величине собственного числа λ_2, если в качестве λ выбрано первое по абсолютной величине собственное число $\lambda = \lambda_1$ (если λ_1 вещественное), а в качестве φ — соответствующий ему левый собственный вектор матрицы A. Рассматриваемый итерационный процесс можно свести формально к обычному методу последовательных приближений $x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b$ со специально подобранным начальным приближением $x^{(0)} \in R^N$, удовлетворяющим условию $(\varphi, x^{(0)}) = \frac{(\varphi, b)}{1-\lambda_1}$.

Установленные результаты можно распространить на многопараметрические модификации методов итеративного агрегирования. Считаем, что уравнение (1) можно записать в виде

$$x_s = \sum_{r=1}^{N} A_{sr} x_r + b_s \quad (s = \overline{1, N}),$$

допуская, что $E = \bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i$ и определены операторы $A_{sr} : E_r \to E_s$, причем E_i являются подпространствами пространства E и допустимо разбиение каждого элемента $x \in E$ на сумму элементов $x_i \in E_i$ так, что $\sum\limits_{i=1}^{N} x_i = x$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_s^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{N} \frac{z_r^{(n+1)} + y_r^{(n+1)}}{z_r^{(n)} + y_r^{(n)}}[A_{sr} x_r^{(n)} + a_{sr}^{(n)}(y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)})] + b_s, \tag{11}$$

$$y_s^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{N} \frac{z_r^{(n+1)} + y_r^{(n+1)}}{z_r^{(n)} + y_r^{(n)}}[(\alpha_{sr}, x_r^{(n)}) + a_{sr}^{(n)}(y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)}) + \lambda_{sr} y_r^{(n+1)}], \tag{12}$$

где $\lambda_{sr}, \alpha_{sr}^{(n)} \in R^1$, $\varphi_r, \alpha_{sr} \in E_r^*$, $a_{sr}^{(n)} \in E_s$, $s, r = \overline{1, N}$, заданы так, что

$$\alpha_{sr}^{(n)} + (\varphi_s, a_{sr}^{(n)}) = \lambda_{sr} \quad (s, r = \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, \dots).$$

Будем использовать обозначения

$$z_r^{(n)} = (\varphi_r, x_r^{(n)})_r \quad (r = \overline{1,N}). \tag{13}$$

Множества ε_r получаются с помощью равенств

$$z_r + y_r = \frac{\Delta s}{\Delta} \quad (s = \overline{1,N})$$

по формулам Крамера, где $z_r = (\varphi_r, x_r)_r$, определяющих множество $E_0 = \bigcap\limits_{r=1}^{N} \varepsilon_r$.

Доказательство многопараметрического аналога леммы 2 можно получить из (11)–(13) с помощью следующих выкладок:

$$z_s^{(n+1)} + y_s^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{N} \frac{z_r^{(n+1)} + y_r^{(n+1)}}{z_r^{(n)} + y_r^{(n)}} [\lambda_{sr}(\varphi_r, x_r)_r - (\alpha_{sr}, x_r^{(n)})_r + (\varphi_r, a_{sr}^{(n)})_r (y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)}) +$$
$$+ (\alpha_{sr}, x_r^{(n)})_r + \alpha_{sr}^{(n)}(y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)}) + \lambda_{sr} y_r^{(n+1)}] + B_s =$$
$$= \sum_{r=1}^{N} \frac{z_r^{(n+1)} + y_r^{(n+1)}}{z_r^{(n)} + y_r^{(n)}} [\lambda_{sr} z_r^{(n)} + ((\varphi_r, a_{sr}^{(n)})_r + \alpha_{sr}^{(n)}) y_r^{(n)} + (\lambda_{sr} - (\varphi_r, a_{sr}^{(n)})_r - \alpha_{sr}^{(n)}) y_r^{(n+1)}] + B_s.$$

Отсюда $z_s^{(n+1)} + y_s^{(n+1)} = \frac{\Delta s}{\Delta}$ $(s = \overline{1,N})$, что подтверждает ссылка на принцип индукции.

Поэтому можно сделать вывод: для первой итерации $\{x^{(1)}, y^{(1)}\}$ по формулам (11), (12) при произвольных $x^{(0)} \in E$, $y^{(0)} \in R^N$ будем иметь, что $\{x^{(1)}, y^{(1)}\} \in E_0$.

Следовательно, для $n \geq 1$, как и в однопараметрическом случае, с $n = 1$ будем иметь эквивалентность алгоритма (11), (12) и алгоритма

$$x_s^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{N} [A_{sr} x_r^{(n)} + a_{sr}^{(n)}(y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)})] + B_s, \tag{14}$$

$$y_s^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{N} [(\alpha_{sr}, x_r^{(n)}) + a_{sr}^{(n)}(y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)}) + \lambda_{sr} y_r^{(n+1)}]. \tag{15}$$

Отметим, что для исследования многопараметрических модификаций алгоритмов (11), (12) и (14), (15) можно воспользоваться результатами из [2]–[4].

Литература

1. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. *Позитивные линейные системы.* – М.: Наука, 1985. – 255 с.
2. Шувар Б.А. *О сходимости однопараметрического метода итеративного агрегирования для систем линейных алгебраических уравнений.* – Львов: Львовск. политехн. ин-т, 1988.– 11 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 10.08.88, № 1471-Ук88.
3. Шувар Б.А. *О сходимости многопараметрического метода итеративного агрегирования* // Вестн. Львовск. политехн. ин-та. – 1989. – № 232. – С. 140–142.
4. Шувар Б. А. *Про ітеративне агрегування і метод послідовних наближень* // Вісник Львівськ. політехн. ін-ту. – 1991. – № 251. – С. 139-141.

Прикарпатский национальный университет

Поступила
26.01.2004