ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 2 (513)

УДК 519.632

Г.И. ШИШКИН

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ В СЛУЧАЕ НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ПОДОБЛАСТЕЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

1. Введение

Для достаточно представительных классов сингулярно возмущенных краевых задач разработаны ε-равномерно сходящиеся методы, для которых ошибки решений не зависят от возмущающего параметра ε (напр., [1]–[6] и библиография там же). В случае регулярных краевых задач хорошо известны эффективные численные методы на основе декомпозиции области (см., напр., [7], [8] и библиографию там же). Такие методы позволяют свести решение достаточно сложных задач к задачам на более простых областях и, в частности, проводить распараллеливание вычислений. Среди этих методов особенно привлекательными являются методы декомпозиции на неперекрывающихся подобластях, позволяющие использовать на подобластях равномерные сетки при решении промежуточных задач.

В этой связи представляется актуальной разработка методов декомпозиции области для сингулярно возмущенных краевых задач и, в частности, методов, для которых ошибки решений и число итераций, требуемых для отыскания приближенного решения, не зависят от параметра ε.

В данной работе рассматривается краевая задача для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения типа конвекции-диффузии на полосе. Для такой задачи известна специальная разностная схема на кусочно-равномерных сетках, сходящаяся ε-равномерно (напр., [2]–[4], [6]). На основе этой схемы строятся разностные схемы метода декомпозиции области в случае неперекрывающихся подобластей. На границах подобластей рассматриваются обменные условия Робина. Ошибки приближенных решений и число итераций, требуемых для решения задачи, существенно зависят от параметра ε (при малых значениях ε ошибки решений становятся конечными, причем требуемое для решения число итераций неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$).

Исследуются параметры обменных условий и разностных схем, обеспечивающие ε-равномерную сходимость сеточных решений со скоростью $O(N_1^{-1} \ln N_1 + N_2^{-1} + q^n)$, где N_s задает число сеточных узлов вдоль оси x_s, $s = 1, 2$, n — число итераций, причем $q < 1$ равномерно по ε.

Заметим, что ε-равномерные численные методы на основе декомпозиции области рассматривались, например, в [2], [3], [9]–[12]. В этих работах использовались обменные условия Дирихле. Методы на неперекрывающихся подобластях с обменными условиями Робина, сходящиеся ε-равномерно с ростом числа узлов сеток и числа итераций, не рассматривались.

2. Постановка задачи

На вертикальной полосе $\overline{D}$, где

$$D = \{x : x_1 \in (0, d),\ x_2 \in R\}, \tag{2.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-01022).

рассмотрим краевую задачу для эллиптического уравнения

$$Lu(x) \equiv \left\{ \varepsilon \sum_{s=1,2} a_s(x) \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \sum_{s=1,2} b_s(x) \frac{\partial}{\partial x_s} - c(x) \right\} u(x) = f(x), \quad x \in D, \\ u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2.2}$$

Здесь $\Gamma = \overline{D} \setminus D$, функции $a_s(x)$, $b_s(x)$, $c(x)$, $f(x)$ и $\varphi(x)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{D}$ и Γ соответственно, причем[1]

$$a_0 \le a_s(x) \le a^0, \quad b_0 \le b_1(x) \le b^0, \quad |b_2(x)| \le b^0, \quad 0 \le c(x) \le c^0, \\ |f(x)| \le M, \quad x \in \overline{D}; \quad |\varphi(x)| \le M, \quad x \in \Gamma; \quad s = 1, 2, \quad a_0, b_0 > 0; \tag{2.3}$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$. Для простоты предполагаем выполненным одно из условий $b_2(x) \ge 0$, $x \in \overline{D}$, либо $b_2(x) \le 0$, $x \in \overline{D}$.

В том случае, когда параметр ε стремится к нулю, в окрестности границы Γ_1 появляется регулярный пограничный слой. Здесь $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \Gamma_L$, $\Gamma_2 = \Gamma_R$ — левая и правая границы.

Для краевой задачи (2.2), (2.1) требуется построить специальную разностную схему метода декомпозиции области в случае неперекрывающихся подобластей, решение которой сходится ε-равномерно с ростом числа узлов сеточной области и числа итераций итерационного процесса.

3. Базовая схема для задачи (2.2), (2.1)

Приведем ε-равномерно сходящуюся разностную схему. На множестве $\overline{D}$ введем прямоугольную сетку

$$\overline{D}_h = \overline{\omega}_1 \times \omega_2, \tag{3.1}$$

где $\overline{\omega}_1$ и ω_2 — произвольные, вообще говоря, неравномерные сетки на отрезке $[0, d]$ и на оси x_2. Пусть $h_s^i = x_s^{i+1} - x_s^i$, $x_s^i, x_s^{i+1} \in \overline{\omega}_1$ при $s = 1$, $x_s^i, x_s^{i+1} \in \omega_2$ при $s = 2$; пусть $h_s = \max\limits_i h_s^i$, $h = \max\limits_s h_s$. Предполагаем выполненным условие $h \le MN^{-1}$, где $N = \min[N_1, N_2]$, $N_1 + 1$ и $N_2 + 1$ — число узлов сетки $\overline{\omega}_1$ и минимальное число узлов сетки ω_2 на отрезке единичной длины.

Задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем монотонной разностной схемой [13]

$$\Lambda z(x) \equiv \left\{ \varepsilon \sum_{s=1,2} a_s(x) \delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}} + \sum_{s=1,2} [b_s^+(x) \delta_{xs} + b_s^-(x) \delta_{\overline{xs}}] - c(x) \right\} z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \\ z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \tag{3.2}$$

Здесь $D_h = D \cap \overline{D}_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap \overline{D}_h$, $\delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}} z(x)$ и $\delta_{xs} z(x)$, $\delta_{\overline{xs}} z(x)$ – вторая и первые (вперед и назад) разностные производные, например,

$$\delta_{\overline{x1}\,\widehat{x1}} z(x) = 2(h_1^i + h_1^{i-1})^{-1} [\delta_{x1} z(x) - \delta_{\overline{x1}} z(x)], \quad x = (x_1^i, x_2) \in D_h; \\ v^+(x) = 2^{-1}(v(x) + |v(x)|), \quad v^-(x) = 2^{-1}(v(x) - |v(x)|).$$

Схема (3.2), (3.1) монотонна [13] ε-равномерно. Для решений схемы справедлива оценка

$$|u(x) - z(x)| \le M[(\varepsilon^2 + N_1^{-1})^{-1} N_1^{-1} + N_2^{-1}], \quad x \in \overline{D}_h. \tag{3.3}$$

В случае сеток

$$\overline{D}_h = \overline{\omega}_1 \times \omega_2, \tag{3.4}$$

[1] Здесь и ниже через M, M_i (m, m_i) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от ε и от параметров разностных схем. Запись $m_{(j.k)}$ ($\overline{D}_{h(j.k)}$, $L_{(j.k)}$) будет означать, что эта постоянная (сетка, оператор и т. п.) введена в формуле ($j.k$).

равномерных по обеим переменным, имеем

$$|u(x) - z(x)| \leq M[(\varepsilon + N_1^{-1})^{-1} N_1^{-1} + N_2^{-1}], \quad x \in \overline{D}_h. \tag{3.5}$$

Схема (3.2), (3.4) сходится при условии ($N_1^{-1} \ll \varepsilon$)

$$\varepsilon^{-1} = o(N_1). \tag{3.6}$$

Построим кусочно-равномерную сетку, на которой схема (3.2) сходится ε-равномерно [2], [3], [6]. На множестве $\overline{D}$ введем сетку

$$\overline{D}_h = \overline{\omega}_1^* \times \omega_2, \tag{3.7а}$$

где $\omega_2 = \omega_{2(3.4)}$, $\overline{\omega}_1^*$ — кусочно-равномерная сетка, строящаяся следующим образом. Отрезок $[0, d]$ разбивается на 2 интервала $[0, \sigma]$, $[\sigma, d]$. Шаги сетки на интервалах постоянны и равны $h_1^{(1)} = 2\sigma N_1^{-1}$ и $h_1^{(2)} = 2(d - \sigma) N_1^{-1}$ на интервалах $[0, \sigma]$, $[\sigma, d]$ соответственно. Параметр σ определяется соотношением

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, N_1) = \min[2^{-1} d, m^{-1} \varepsilon \ln N_1], \tag{3.7б}$$

где $m = m_{(7.2)}$. Сетки $\overline{\omega}_1^*$ и $\overline{D}_{h(3.7)}$ построены.

Для решений разностной схемы (3.2), (3.7) получается оценка

$$|u(x) - z(x)| \leq M\{N_1^{-1} \min[\varepsilon^{-1}, \ln N_1] + N_2^{-1}\}, \quad x \in \overline{D}_h, \tag{3.8}$$

а также ε-равномерная оценка

$$|u(x) - z(x)| \leq M[N_1^{-1} \ln N_1 + N_2^{-1}], \quad x \in \overline{D}_h. \tag{3.9}$$

Введем определение. Пусть для функции $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решения некоторой разностной схемы — выполняется оценка

$$|u(x) - z(x)| \leq \mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2, \quad x \in \overline{D}_h, \tag{3.10}$$

где $\mu_s = \mu_s(N_s^{-1}, \varepsilon)$, $\beta_s = \beta_s(N_s^{-1}, \varepsilon)$, причем $\mu_s(N_s^{-1}, \varepsilon) \to 0$ при $N_s \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, а $\beta_s(N_s^{-1}, \varepsilon) \to \infty$ при $N_s \to \infty$, $\varepsilon \to 0$; $s = 1, 2$. Будем говорить, что оценка (3.10) неулучшаема по вхождению величин N_1, N_2, ε, если оценка

$$|u(x) - z(x)| \leq \mu_1^0 \beta_1^0 + \mu_2^0 \beta_2^0, \quad x \in \overline{D}_h,$$

вообще говоря, неверна при условии $\mu_1^0 \beta_1^0 + \mu_2^0 \beta_2^0 = o(\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2)$; $\mu_s^0 = \mu_s^0(N_s^{-1}, \varepsilon)$, $\beta_s^0 = \beta_s^0(N_s^{-1}, \varepsilon)$, $s = 1, 2$.

Оценки (3.5), (3.8) — ε-зависимые оценки погрешности сеточных решений — неулучшаемы по вхождению величин N_1, N_2, ε, а ε-равномерная оценка (3.9) — по вхождению N_1, N_2.

Теорема 3.1. *Пусть для решения $u(x)$ краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняются априорные оценки теоремы* 7.1, *где $K = 4$. Тогда разностная схема* (3.2), (3.7) (*схемы* (3.2), (3.1) *и* (3.2), (3.4)) *сходится ε-равномерно* (*сходятся при фиксированных значениях параметра ε*). *Для сеточных решений справедливы оценки* (3.3), (3.5), (3.8), (3.9); *оценки* (3.5), (3.8) *и* (3.9) *неулучшаемы соответственно по вхождению величин N_1, N_2, ε, и N_1, N_2.*

4. Континуальные схемы с обменными условиями Робина

Приведем континуальный метод Шварца при декомпозиции области на перекрывающиеся и неперекрывающиеся подобласти в случае условия обмена Робина на границах подобластей.

1. На множестве $\overline{D}$ введем покрывающие множества $D^{(k)}$

$$\overline{D} = \overline{D}^{(1)} \cup \overline{D}^{(2)}, \quad D^{(1)} = (0, d_1) \times R, \quad D^{(2)} = (d_2, d) \times R, \quad 0 < d_2 \le d_1 < d, \tag{4.1}$$

имеющие перекрытие ширины $\delta = d_1 - d_2 \ge 0$; полагаем $\Gamma^{(k)} = \overline{D}^{(k)} \setminus D^{(k)}$, $k = 1, 2$; $\Gamma^{(k)} = \Gamma^{(k)}_L \cup \Gamma^{(k)}_R$, $\Gamma^{(k)}_L$ и $\Gamma^{(k)}_R$ — левая и правая части границы $\Gamma^{(k)}$.

Пусть на $\overline{D}$ задана произвольная достаточно гладкая ограниченная функция $u^0(x)$, $x \in \overline{D}$, причем $u^0(x) = \varphi(x)$, $x \in \Gamma$, и пусть уже известны функции $u^1(x), \dots, u^{n-1}(x)$, $x \in \overline{D}$. Построим функцию $u^n(x)$, $x \in \overline{D}$.

В отличие от функций $u^i(x)$, $i = 1, \dots, n$, кусочно-гладких, но непрерывных на $\overline{D}$ в случае обменных условий Дирихле (напр., [2], [3], [9]–[11]), функции $u^i(x)$ в этом методе декомпозиции достаточно гладкие на $\overline{D}^{(1)}$ и $\overline{D}^{[2]}$, где $\overline{D}^{[k]} = \overline{D}^{(k)} \setminus D^{(3-k)}$, и терпят разрыв I рода на множестве $\Gamma^{(1)}_R$. Полагаем $\overline{D}^{\{k\}} = \overline{D}^{(1)}$ при $k = 1$, $\overline{D}^{\{k\}} = \overline{D}^{[2]}$ при $k = 2$. На множествах $\overline{D}^{(k)}$ находим функции $u^{n(k)}(x)$, решая задачи

$$\begin{gathered}
Lu^{n(2)}(x) = f(x), \quad x \in D^{(2)}, \quad u^{n(2)}(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma^{(2)} \cap \Gamma, \\
l_L u^{n(2)}(x) = l_L u^{(n-1)}(x_1 - 0, x_2), \quad x \in \Gamma^{(2)} \setminus \Gamma; \\
Lu^{n(1)}(x) = f(x), \quad x \in D^{(1)}, \quad u^{n(1)}(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma^{(1)} \cap \Gamma, \\
l_R u^{n(1)}(x) = l_R u^{n(2)}(x_1 + 0, x_2), \quad x \in \Gamma^{(1)} \setminus \Gamma.
\end{gathered} \tag{4.2а}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
l_R v(x) &\equiv \Big(\varepsilon \alpha_R(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_R(x)\Big) v(x), \qquad x \in \Gamma^{(1)} \setminus \Gamma, \\
l_L v(x) &\equiv \Big(-\varepsilon \alpha_L(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_L(x)\Big) v(x), \quad x \in \Gamma^{(2)} \setminus \Gamma,
\end{aligned}$$

$\alpha_R(x), \beta_R(x) \ge 0$, $x \in \Gamma^{(1)}_R$, $\alpha_L(x), \beta_L(x) \ge 0$, $x \in \Gamma^{(2)}_L$, — достаточно гладкие функции на множестве $\Gamma^{(12)} \equiv \{\Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}\} \setminus \Gamma$, причем $\alpha_R(x) + \beta_R(x) > 0$, $x \in \Gamma^{(1)}_R$, $\alpha_L(x) + \beta_L(x) > 0$, $x \in \Gamma^{(2)}_L$. Функция

$$u^n(x) = \begin{cases} u^{n(1)}(x), & x \in \overline{D}^{(1)}; \\ u^{n(2)}(x), & x \in \overline{D}^{(2)} \setminus D^{(1)}, \end{cases} \qquad x \in \overline{D}^{\{k\}}, \quad k = 1, 2; \quad n = 1, 2, \dots, \tag{4.2б}$$

на множестве $\Gamma^{(1)}_R$ терпит разрыв I рода. Функцию $u^n(x)$, $x \in \overline{D}$, $n = 1, 2, \dots$, назовем решением задачи (4.2), (4.1) — континуального метода Шварца с обменными условиями Робина. Заметим, что схема (4.2), (4.1) определена при $\delta \ge 0$.

Для простоты будем считать выполненным условие

$$\beta(x) = 1 - \alpha(x), \quad x \in \Gamma^{(12)}, \tag{4.3}$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ равны $\alpha_R(x)$, $\beta_R(x)$ при $x \in \Gamma^{(1)}_R$ и $\alpha_L(x)$, $\beta_L(x)$ при $x \in \Gamma^{(2)}_L$. При $\alpha(x) \equiv 1$, $x \in \Gamma^{(12)}$, обменные условия — условия Неймана, а при $\alpha(x) \equiv 0$, $x \in \Gamma^{(12)}$, — условия Дирихле.

Для схемы (4.2), (4.1) справедлив принцип максимума. Приведем одну из его формулировок.

Лемма 4.1. *Пусть $\delta \geq 0$, $c(x) \geq c_0 > 0$, $x \in \overline{D}$, и пусть для достаточно гладких функций $u^{n(k)}(x)$, $x \in \overline{D}^{(k)}$, а также функций $u^n(x)$, $x \in \overline{D}$, определяемых (4.2б), $k = 1, 2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, выполняются условия*

$$l_L u^{0(1)}(x) \geq 0, \quad x \in \Gamma_L^{(2)},$$
$$(-1)^k L u^{n(k)}(x) \leq 0, \quad x \in D^{(k)}, \quad u^{n(k)}(x) = 0, \quad x \in \Gamma^{(k)} \cap \Gamma,$$
$$l_L u^{n(2)}(x) \geq l_L u^{n-1}(x_1 - 0, x_2), \quad x \in \Gamma_L^{(2)},$$
$$l_R u^{n(1)}(x) \leq l_R u^{n(2)}(x_1 + 0, x_2), \quad x \in \Gamma_R^{(1)}, \quad k = 1, 2,$$

причем

$$l_R u^{i(2)}(x_1 + 0, x_2) \leq 0, \quad x \in \Gamma_R^{(1)},$$
$$l_L u^{i(1)}(x_1 - 0, x_2) \geq 0, \quad x \in \Gamma_L^{(2)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $u^{n-1}(x) = u^{0(1)}(x)$, $x \in \Gamma_L^{(2)}$, при $n = 1$. Тогда

$$(-1)^k u^n(x) \geq 0, \quad x \in \overline{D}^{\{k\}}, \quad k = 1, 2, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

для всех $\varepsilon \in (0, 1]$.

Заметим, что схема (4.2), (4.1), вообще говоря, не сходится в случае условия

$$\delta = 0, \tag{4.4}$$

например, когда $\beta(x) \equiv 1$ либо $\beta(x) \equiv 0$, $x \in \gamma$, где $\gamma = \Gamma^{(12)}$ при $\delta = 0$.

2. Приведем условия, достаточные для сходимости схемы (4.2), (4.1), (4.4).

Пусть $u^{(k)}(x)$, $x \in \overline{D}^{(k)}$, $k = 1, 2$, — решения краевых задач, подобных (7.3), (2.1),

$$\begin{gathered} L u^{(k)}(x) = 0, \quad x \in D^{(k)}, \quad u^{(k)}(x) = 0, \quad x \in \Gamma^{(k)} \cap \Gamma, \\ l_R u^{(1)}(x) = 1, \quad x \in \Gamma^{(1)} \setminus \Gamma, \quad l_L u^{(2)}(x) = 1, \quad x \in \Gamma^{(2)} \setminus \Gamma, \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{4.5а}$$

Для функций $u^{(k)}(x)$, $x \in \overline{D}^{(k)}$, справедливы оценки (см. (7.4), (7.7))

$$\begin{aligned} &|l_R(u^{(2)}(x) - u_0^{(2)}(x))| \leq M_1 \varepsilon \exp(-m_1 r(x, \Gamma_L^{(2)})), \quad x \in \overline{D}^{(2)}; \\ &|l_L(u^{(1)}(x) - u_0^{(1)}(x))| \leq M_2 \varepsilon, \quad x \in \overline{D}^{(1)}, \end{aligned} \tag{4.5б}$$

где $r(x, \Gamma_L^{(2)})$ — расстояние от точки x до множества $\Gamma_L^{(2)}$, $m_1 = m_{(7.2)}$. Здесь

$$\begin{gathered} u_0^{(2)}(x) = [m^0(x^*)\alpha_L(x^*) + \beta_L(x^*)]^{-1} \exp(-\varepsilon^{-1} m^0(x^*) r(x, \Gamma_L^{(2)})), \\ x \in \overline{D}^{(2)}, \quad x^* \in \Gamma_L^{(2)}, \end{gathered} \tag{4.5в}$$

$m^0(x) = a_1^{-1}(x) b_1(x)$, $x^* = x^*_{(7.6)}(x)$; функция $u_0^{(1)}(x)$ представляется в виде суммы функций

$$u_0^{(1)}(x) = U_0^{(1)}(x) + V_0^{(1)}(x), \quad x \in \overline{D}^{(1)}.$$

Компоненты $U_0^{(1)}(x)$, $V_0^{(1)}(x)$ — решения задач

$$\begin{aligned} &L^1_{(7.6)} U_0^{(1)}(x) = 0, \quad x \in \overline{D}^{(1)} \setminus \gamma, \\ &l_R U_0^{(1)}(x) \equiv \left\{ \varepsilon \alpha_R(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_R(x) \right\} U_0^{(1)}(x) = 1, \quad x \in \gamma, \\ &L^2_{(7.6)} V_0^{(1)}(x) = 0, \quad x \in D^{(1)}, \\ &V_0^{(1)}(x) = -U_0^{(1)}(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad l_R V_0^{(1)}(x) = 0, \quad x \in \gamma. \end{aligned}$$

Функции $u_0^{(k)}(x)$ — главные члены асимптотики по ε для функций $u^{(k)}(x)$, $x \in \overline{D}^{(k)}$, $k = 1, 2$.

Полагаем

$$q^0 = q^0(\varepsilon) \equiv \sup_{x \in \gamma} \{ |l_R u^{(2)}(x)| \, |l_L u^{(2)}(x)|^{-1} |l_L u^{(1)}(x)| \, |l_R u^{(1)}(x)|^{-1} \}.$$

С учетом (4.5б) находим оценку

$$q^0 \le \sup_{x \in \gamma_h} \{ [|l_R u_0^{(2)}(x)| + M_1 \varepsilon][|l_L u_0^{(2)}(x)| - M_1 \varepsilon]^{-1} \times$$

$$\times [|l_L u_0^{(1)}(x)| + M_2 \varepsilon][|l_R u_0^{(1)}(x)| - M_2 \varepsilon]^{-1} \}, \quad M_i = M_{i(4.5б)}.$$

Для величины q^0 с учетом явного вида функций $u_0^{(k)}$ при условии (4.3) устанавливаем оценку

$$q^0 \le \sup_{x \in \gamma} \{ | - m^0(x) \alpha_R(x) + (1 - \alpha_R(x))| (1 - \alpha_L(x)) [m^0(x) \alpha_L(x) +$$

$$+ (1 - \alpha_L(x))]^{-1} (1 - \alpha_R(x))^{-1} \} + M \varepsilon \equiv q^0_{1(4.6)}. \quad (4.6)$$

Для схемы (4.2), (4.1), (4.3) в силу оценки (4.6) имеем

$$|u(x) - u^n(x)| \le M q^n, \quad x \in \overline{D}, \quad q \le q^0_{1(4.6)}. \quad (4.7)$$

Будем предполагать, что выполняется условие

$$|1 - (1 + m^0(x)) \alpha_R(x)| \le m_1, \quad x \in \gamma, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad (4.8)$$

где постоянные m_1 и ε_0 достаточно малы, и для них выполняется $q^0_{1(4.6)} \le 1 - m$. При условии (4.8) схема (4.2), (4.1), (4.3), (4.4) сходится ε-равномерно при $n \to \infty$.

Теорема 4.1. *Условие* (4.8) *является достаточным для ε-равномерной сходимости схемы* (4.2), (4.1), (4.3), (4.4). *Для решений схемы* (*при условии* (4.8)) *справедлива оценка* (4.7), *где* $q \le 1 - m$.

5. Разностные схемы с обменными условиями Робина

1. Построим разностные схемы метода декомпозиции области в случае обменных условий Робина. Считаем выполненным условие (4.4). Таким образом, $\Gamma_R^{(1)} = \Gamma_L^{(2)} = \gamma$.

На множествах $\overline{D}^{(k)}$ строим сетки

$$\overline{D}_h^{(k)} = \overline{D}^{(k)} \cap \overline{D}_h, \quad k = 1, 2, \quad (5.1)$$

где $\overline{D}_h = \overline{D}_{h(3.1)}$; считаем, что границы множеств $\overline{D}^{(k)}$ проходят через узлы сетки $\overline{D}_h$.

Пусть на $\overline{D}_h$ задана функция $z^0(x) = u^0(x)$, $x \in \overline{D}_h$, где $u^0(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция, и пусть уже известны функции $z^1(x), \ldots, z^{n-1}(x)$, $x \in \overline{D}_h$, причем $z^i(x) = \varphi(x)$, $x \in \Gamma_h$, $i = 1, \ldots, n-1$. Найдем функцию $z^n(x)$. Заметим, что функции $z^i(x)$, $x \in \overline{D}_h$, $i = 1, \ldots, n-1$ (как и функции $u^i(x)$, $x \in \overline{D}$, — решения задачи (4.2)) терпят "разрыв" на множестве $\Gamma_{Rh}^{(1)}$.

Находим функции $z^{n(k)}$, $x \in \overline{D}_h^{(k)}$, $k = 1, 2$, решая задачи

$$\begin{aligned} &\Lambda z^{n(2)}(x) = f(x), \quad x \in D_h^{(2)}, \quad z^{n(2)}(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h^{(2)} \cap \Gamma, \\ &\Lambda z^{n(1)}(x) = f(x), \quad x \in D_h^{(1)}, \quad z^{n(1)}(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h^{(1)} \cap \Gamma, \end{aligned} \quad (5.2а)$$

$$\begin{aligned} &l_L^{h+} z^{n(2)}(x) = l_L^{h-} z^{n-1}(x_1 - 0, x_2), \\ &l_R^{h-} z^{n(1)}(x) = l_R^{h+} z^{n(2)}(x_1 + 0, x_2), \quad x \in \gamma_h. \end{aligned} \quad (5.2б)$$

Здесь $\overline{D}_h^{(k)} = \overline{D}_{h(5.1)}^{(k)}$, $\Lambda = \Lambda_{(3.2)}$,

$$
\begin{aligned}
&l_R^{h+} v(x) \equiv (\varepsilon\alpha_R(x)\delta_{x1} + \beta_R(x))v(x),\\
&l_R^{h-} v(x) \equiv (\varepsilon\alpha_R(x)\delta_{\overline{x1}} + \beta_R(x))v(x),\\
&l_L^{h+} v(x) \equiv (-\varepsilon\alpha_L(x)\delta_{x1} + \beta_L(x))v(x),\\
&l_L^{h-} v(x) \equiv (-\varepsilon\alpha_L(x)\delta_{\overline{x1}} + \beta_L(x))v(x), \quad x \in \gamma_h.
\end{aligned} \tag{5.2в}
$$

Функцию

$$
z^n(x) = \begin{cases} z^{n(2)}(x), & x \in \overline{D}_h^{(2)};\\ z^{n(1)}(x), & x \in \overline{D}_h^{(1)}, \end{cases} \qquad x \in \overline{D}_h^{\{k\}}, \quad k = 1, 2, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.2г}
$$

назовем решением разностной схемы (5.2), (5.1). Функция $z^n(x)$ на множестве $\gamma_h = \gamma \cap \overline{D}_h$ терпит "разрыв" I рода. Эта функция на множестве γ_h принимает двойные значения $z^n(x_1 - 0, x_2)$ и $z^n(x_1 + 0, x_2)$, являющиеся "непрерывными" продолжениями $z^n(x)$ слева и справа (из множеств $D_h^{(1)}$ и $D_h^{(2)}$ соответственно).

Для разностной схемы (5.2), (5.1), (4.4) справедлив принцип максимума. Приведем условия, достаточные для сходимости функции $z^n(x)$ — решения разностной схемы (5.2), (5.1), (4.4) при $n \to \infty$ в случае равномерной и кусочно-равномерной сеток.

2. Рассмотрим функцию $z^*(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решение сеточной задачи

$$
\begin{gathered}
\Lambda z^*(x) = f(x), \quad x \in D_h^{(1)} \cup D_h^{(2)},\\
\delta_{x1} z^*(x) = \delta_{\overline{x1}} z^*(x), \quad x \in \gamma_h, \qquad z^*(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h.
\end{gathered} \tag{5.3}
$$

Функция $z^*(x)$, $x \in \overline{D}_h$, является "стационарным" решением задачи (5.2), (5.1), (4.4).

С использованием принципа максимума, учитывая оценки функции $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решения разностной схемы (3.2) в случае сетки (3.4), получаем оценку

$$
|z(x) - z^*(x)| \le M(\varepsilon + N_1^{-1})^{-1} N_1^{-1}, \quad x \in \overline{D}_h, \tag{5.4}
$$

неулучшаемую по вхождению N_1, ε. Функция $z^*(x)$, $x \in \overline{D}_h$, при $N_1 \to \infty$ сходится к функции $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, при условии (3.6).

В случае сетки (3.7) получается оценка

$$
|z(x) - z^*(x)| \le M N_1^{-1} \ln N_1, \quad x \in \overline{D}_h; \tag{5.5}
$$

эта ε-равномерная оценка неулучшаема.

Теорема 5.1. *Функция $z^*(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решение разностной схемы* (5.3) *на сетке* (3.7) (*на сетке* (3.4)) — *при $N \to \infty$ сходится ε-равномерно* (*при условии* (3.6)) *к функции $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решению разностной схемы* (3.2). *Для сеточных решений справедливы оценки* (5.4), (5.5).

Замечание 5.1. Функция $\omega(x) = z(x) - z^*(x)$, $x \in \overline{D}_h$, есть ошибка, порождаемая декомпозицией разностной задачи (3.2). Эта ошибка возникает при аппроксимации условия сопряжения потоков

$$
\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1 + 0, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1 - 0, x_2), \quad x \in \gamma. \tag{5.6}
$$

3. Исследуем поведение решений разностной схемы (5.2), (5.1), (4.4) при $n \to \infty$.

Пусть $z^{(n)}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{(k)}$, $k = 1, 2$, — решения краевых задач, аппроксимирующих (4.5а)

$$
\begin{gathered}
\Lambda z^{(k)}(x) = 0, \quad x \in D_h^{(k)}, \quad z^{(k)}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h^{(k)} \cap \Gamma,\\
l_R^{h-} z^{(1)}(x_1 - 0, x_2) = 1, \quad l_L^{h+} z^{(2)}(x_1 + 0, x_2) = 1, \quad x \in \gamma_h, \quad k = 1, 2.
\end{gathered}
$$

Для функций $z^{(k)}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{(k)}$, в случае сетки (3.4) справедливы оценки

$$\begin{aligned} &|l_L^{h-}(z^{(1)}(x) - z_0^{(1)}(x))| \le M\varepsilon, \quad x \in \overline{D}_h^{(1)}, \\ &|l_R^{h+}(z^{(2)}(x) - z_0^{(2)}(x))| \le M\varepsilon, \quad x \in \overline{D}_h^{(2)}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Здесь

$$z_0^{(1)}(x) = z_0^{(1)R}(x) + z_0^{(1)S}(x), \quad x \in \overline{D}_h^{(1)},$$

функции $z_0^{(2)}(x)$ и $z_0^{(1)R}(x)$, $z_0^{(1)S}(x)$ (регулярная и сингулярная компоненты) — решения задач

$$\Lambda^1 z_0^{(2)}(x) \equiv \{\varepsilon a_1(x^*)\delta_{\overline{x1}\,\widehat{x1}} + b_1(x^*)\delta_{x1}\} z_0^{(2)}(x) = 0, \quad x \in D_h^{(2)}, \tag{5.8}$$

$$z_0^{(2)}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h^{(2)} \cap \Gamma, \quad l_L^{h+} z_0^{(2)}(x_1 + 0, x_2) = 1, \quad x \in \gamma_h;$$

$$\Lambda^2 z_0^{(1)R}(x) \equiv \left\{ \sum_{s=1,2} [b_s^+(x)\delta_{xs} + b_s^-(x)\delta_{\overline{xs}}] - c(x) \right\} z_0^{(1)R}(x) = 0, \quad x \in D_h^{(1)} \setminus \gamma_h,$$

$$l_R^{h-} z_0^{(1)R}(x_1 - 0, x_2) = 1, \quad x \in \gamma_h;$$

$$\Lambda^1 z_0^{(1)S}(x) = 0, \quad x \in D_h^{(1)},$$

$$z_0^{(1)S}(x) = -z_0^{(1)R}(x), \quad x \in \Gamma_h^{(1)} \setminus \gamma_h, \quad l_R^{h-} z_0^{(1)S}(x) = 0, \quad x \in \gamma_h,$$

где $x^* = x^*_{(4.5\text{в})}(x)$. Оценки (5.7) устанавливаются с использованием асимптотического представления функций $z^{(k)}(x)$ при $\varepsilon \to 0$, где $z_0^{(k)}(x)$ есть главный член асимптотики.

Полагаем

$$q_h^0 = q_h^0(\varepsilon; D_h) \equiv \sup_{x \in \gamma_h} \{[|l_L^{h-} z_0^{(1)}(x_1 - 0, x_2)| + M\varepsilon][|l_R^h z_0^{(1)}(x)| - M\varepsilon]^{-1} \times$$
$$\times [|l_R^{h+} z_0^{(2)}(x_1 + 0, x_2)| + M\varepsilon][|l_L^h z_0^{(2)}(x)| - M\varepsilon]^{-1}\}.$$

Для величины q_h^0 справедлива оценка

$$q_h^0 \le \sup_{x \in \gamma_h} \{| - \varepsilon\alpha_R(x)|\delta_{x1} z_*^{(2)}(x)| + \beta_R(x)|[\varepsilon\alpha_L(x)|\delta_{x1} z_*^{(2)}(x)| + \beta_L]^{-1} \times$$
$$\times \beta_R^{-1}(x)\beta_L(x)\} + M\varepsilon \equiv q^0_{h(5.9)}(\varepsilon), \tag{5.9}$$

где $z_*^{(k)}(x)$ — решение сеточных уравнений (5.8) с условием на γ_h

$$z_*^{(k)} = 1, \quad x \in \gamma_h, \quad k = 1, 2.$$

На сетке (3.4) в случае условия (4.3) для величины q_h^0 получается оценка

$$q_h^0 \le \sup_{x \in \gamma_h} \{|1 - (1 + m_h(x))\alpha_R(x)|[(1 - \alpha_L(x)) + m_h(x)\alpha_L(x)]^{-1} \times$$
$$\times (1 - \alpha_L(x))(1 - \alpha_R(x))^{-1}\} + M\varepsilon \equiv q^0_{h(5.10)}(\varepsilon), \tag{5.10}$$

где

$$m_h(x) = m^0(x)\varepsilon(\varepsilon + m^0(x)h_1)^{-1}, \quad h_1 = h_{1(3.4)}, \quad m^0(x) = m^0_{(4.5\text{б})}(x).$$

Подобная оценка справедлива и в случае сетки (3.7).

С использованием методики мажорантных функций для решений разностной схемы (5.2), (5.1) устанавливается оценка

$$|z^*(x) - z^n(x)| \le M q_h^n, \quad x \in \overline{D}_h, \quad q_h \le q_h^0, \tag{5.11}$$

где $\overline{D}_h = \overline{D}_{h(3.4)}$ либо $\overline{D}_h = \overline{D}_{h(3.7)}$; $q^0 = q^0_{h(5.9)}$ при $\overline{D}_h = \overline{D}_{h(3.4)}$, $q_h^0 = q^0_{h(5.10)}$ при $\overline{D}_h = \overline{D}_{h(3.7)}$; $z^*(x)$ — решение разностной схемы (5.3) на сетке $\overline{D}_h$.

Пусть выполняется условие (4.3), а также условие

$$|1 - (1 + m_h(x))\alpha_R(x)|[(1 - \alpha_L(x)) + m_h(x)\alpha_L(x)]^{-1} \le m_1, \quad x \in \gamma_h, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{5.12}$$

где $m_h(x) = m^0(x)\varepsilon(\varepsilon + m^0(x)(x^{i+1} - x^i))^{-1}$, $x^i \in \gamma_h$; m_1, ε_0 — достаточно малые числа ($\varepsilon_0 \le m$), при которых $q^0_{h(5.9)} \le 1 - m$, например, при условии $\alpha_L \le 1 - m$, $\alpha_R = (1 - m_1)(1 + m_h(x))^{-1}$, $x \in \gamma_h$. В этом случае решение разностной схемы (5.2), (5.1), (4.3) на сетках (3.4) и (3.7) при $n \to \infty$ сходится к решению разностной схемы (5.3) ε-равномерно.

Теорема 5.2. *Условие* (5.12) *является достаточным для ε-равномерной сходимости решений разностной схемы* (5.2), (5.1), (4.4), (4.3) *на сетках* (3.4) *и* (3.7) *к решению схемы* (5.3). *Для сеточных решений справедлива оценка* (5.11), *где* $q_h \le 1 - m$.

4. В силу оценок (3.5), (3.9), (5.4), (5.5), (5.11) при условии (5.12) имеем

$$|u(x) - z^n(x)| \le M[\exp(-mn) + (\varepsilon + N_1^{-1})^{-1}N_1^{-1} + N_2^{-1}], \quad x \in \overline{D}_{h(3.4)}, \tag{5.13}$$

$$|u(x) - z^n(x)| \le M[\exp(-mn) + N_1^{-1}\ln N_1 + N_2^{-1}], \quad x \in \overline{D}_{h(3.7)}. \tag{5.14}$$

Таким образом, схема (5.2), (5.1), (4.4), (4.3), аппроксимирующая задачу (2.2), (2.1), сходится на сетке (3.7) ε-равномерно, а на сетке (3.4) — при условии (3.6).

Теорема 5.3. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.1, *а также условие* (5.12). *Тогда функция $z^n(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решение разностной схемы* (5.2), (5.1), (4.4), (4.3) *— на сетке* (3.7) (*сетке* (3.4)) *при $N, n \to \infty$ сходится к решению краевой задачи* (2.2), (2.1) *ε-равномерно* (*при условии* (3.6)). *Для сеточных решений справедливы оценки* (5.13), (5.14).

6. Схема декомпозиции с улучшенным условием сопряжения

В случае схемы (5.2), (5.1), (4.4), (4.3), (5.12) ошибка $\omega^*(x) = z(x) - z^*(x)$, вызванная декомпозицией схемы (3.2), соизмерима с $\omega(x) = u(x) - z(x)$ — ошибкой аппроксимации точного решения решением схемы (3.2). Построим схему метода декомпозиции области с улучшенной аппроксимацией условия сопряжения (5.6).

1. Приведем итерационную разностную схему. Производные $(\partial/\partial x_1)u(x_1{+}0, x_2)$, $(\partial/\partial x_1)u(x_1 - 0, x_2)$, $x \in \gamma$, аппроксимируем сеточными выражениями

$$\begin{gathered}
\lambda^+(z(x), f(x)) \equiv \Big\{\delta_{x1} + 2^{-1}a_1^{-1}(x)\varepsilon^{-1}h_1^i\Big[\varepsilon a_2(x)\delta_{\overline{x2}\widehat{x2}} + \\
+ \sum_{s=1,2}[b_s^+(x)\delta_{xs} + b_s^-(x)\delta_{\overline{xs}}] - c(x)\Big]\Big\}z(x_1+0, x_2) - 2^{-1}a_1^{-1}(x)\varepsilon^{-1}h_1^i f(x), \\
\lambda^-(z(x), f(x)) \equiv \Big\{\delta_{\overline{x1}} - 2^{-1}a_1^{-1}(x)\varepsilon^{-1}h_1^{i-1}\Big[\varepsilon a_2(x)\delta_{\overline{x2}\widehat{x2}} + \\
+ \sum_{s=1,2}[b_s^+(x)\delta_{xs} + b_s^-(x)\delta_{\overline{xs}}] - c(x)\Big]\Big\}z(x_1-0, x_2) + 2^{-1}a_1^{-1}(x)\varepsilon^{-1}h_1^{i-1} f(x), \\
x \in \gamma_h, \quad x = (x_1^i, x_2).
\end{gathered} \tag{6.1а}$$

Функции $z^n(x)$, $x \in \overline{D}_h$, $n = 1, \dots,$ находим, решая задачу (5.2), (5.1), где вместо соотношений (5.2б), (5.2в) используются соотношения

$$\begin{aligned}
&l_L^{h+}(z^{n(2)}(x_1+0, x_2), f(x)) = l_L^{h-}(z^{n-1}(x_1-0, x_2), f(x)), \\
&l_R^{h-}(z^{n(1)}(x_1-0, x_2), f(x)) = l_R^{h+}(z^{n(2)}(x_1+0, x_2), f(x)), \quad x \in \gamma_h,
\end{aligned} \tag{6.1б}$$

и

$$\begin{aligned}
&l_R^{h+}(z(x), f(x)) \equiv \varepsilon\alpha_R(x)\lambda^+(z(x), f(x)) + \beta_R(x)z(x), \\
&l_R^{h-}(z(x), f(x)) \equiv \varepsilon\alpha_R(x)\lambda^-(z(x), f(x)) + \beta_R(x)z(x), \\
&l_L^{h+}(z(x), f(x)) \equiv -\varepsilon\alpha_L(x)\lambda^+(z(x), f(x)) + \beta_L(x)z(x), \\
&l_L^{h-}(z(x), f(x)) \equiv -\varepsilon\alpha_L(x)\lambda^-(z(x), f(x)) + \beta_L(x)z(x), \quad x \in \gamma_h.
\end{aligned} \tag{6.1в}$$

Функцию $z^n(x)$, $x \in \overline{D}_h$, назовем решением задачи (5.2а), (6.1), (5.1), (4.4).

Функция $z^*(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решение сеточной задачи

$$\Lambda z^*(x) = f(x), \quad x \in D_h^{(1)} \cup D_h^{(2)}, \quad z^*(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h,$$
$$\lambda^+(z(x), f(x)) = \lambda^-(z^*(x), f(x)), \quad x \in \gamma_h, \tag{6.2}$$

— "стационарное" решение задачи (5.2a), (6.1), (5.1), (4.4), является решением разностной схемы (3.2), (3.1): $z^*(x) = z(x)$, $x \in \overline{D}_h$. Таким образом, аппроксимация (6.2) условия сопряжения (5.6) не вносит ошибок в решение разностной схемы (3.2), (3.1).

2. Подобно выводу оценки (5.11) устанавливается оценка

$$|z(x) - z^n(x)| \le M q_h^n, \quad x \in \overline{D}_h, \quad q_h \le q_h^0, \tag{6.3}$$

где

$$q_h^0 = M_1 \sup_{x \in \gamma_h} \{|1 - (1 + m_h(x))\alpha_R(x)|\} + M_2(\varepsilon + N_1^{-1}).$$

Здесь $z(x)$ и $z^n(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решения разностных схем (3.2) и (5.2a), (6.1), (5.1), (4.4), (4.3) соответственно; $\overline{D}_h$ — сетка (3.4) либо (3.7).

В случае условия

$$|1 - (1 + m_h(x))\alpha_R(x)| \le m_1, \quad \alpha_L(x) \le 1 - m, \quad x \in \gamma_h, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad N_1 \ge N_{10}, \tag{6.4}$$

где $m_h(x) = m_{h(5.12)}(x)$, m_1, ε_0 — достаточно малые числа, а N_{10} — достаточно большое число ($\varepsilon_0 \le m$, $N_{10} \le M$), при которых $q^0_{h(6.3)} \le 1 - m$, функция $z^n(x)$, $x \in \overline{D}_h$, при $n \to \infty$ сходится к $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, ε-равномерно.

Принимая во внимание оценки (3.5), (3.9), (6.3), при условии (6.4) находим

$$|u(x) - z^n(x)| \le M \exp(-mn) + M_1[N_1^{-1} \ln N_1 + N_2^{-1}], \qquad x \in \overline{D}_{h(3.7)}, \tag{6.5}$$
$$|u(x) - z^n(x)| \le M \exp(-mn) + M_2[(\varepsilon + N_1^{-1})^{-1} N_1^{-1} + N_2^{-1}], \quad x \in \overline{D}_{h(3.4)}, \tag{6.6}$$

где $M_1 = M_{(3.9)}$, $M_2 = M_{(3.5)}$.

Теорема 6.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.1, *а также условие* (6.4). *Тогда функция* $z^n(x)$, $x \in \overline{D}_h$, *— решение разностной схемы* (5.2a), (6.1), (5.1), (4.4), (4.3) *— на сетке* (3.7) (*на сетке* (3.4)) *при* $N, n \to \infty$ *сходится к решению краевой задачи* (2.2), (2.1) ε*-равномерно* (*при условии* (3.6)). *Для сеточных решений справедливы оценки* (6.5), (6.6).

7. Дополнения

Приведем априорные оценки решений краевой задачи (2.2), (2.1), используемые в построениях (напр., [2]).

Решение задачи представим в виде суммы функций

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{7.1}$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — регулярная и сингулярная части решения задачи. Для компонент из (7.1) справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} U(x)\right| \le M, \\ &\left|\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} V(x)\right| \le M\varepsilon^{-k_1} \exp\big(-m\varepsilon^{-1} r(x, \Gamma_1)\big), \quad x \in \overline{D}, \quad k_1 + k_2 \le K, \end{aligned} \tag{7.2}$$

где $r(x, \Gamma_1)$ — расстояние от точки x до множества Γ_1, m — произвольное число из интервала $(0, m_0)$, $m_0 = \min\limits_{\overline{D}}[a_1^{-1}(x) b_1(x)]$; постоянная K может быть выбрана достаточно большой при достаточно большой гладкости данных задачи.

Теорема 7.1. *Пусть для данных краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняется условие* (2.3), *и пусть* $a_s, b_s, c, f \in C^{3K-2+\alpha}(\overline{D})$, $\varphi \in C^{3K-2+\alpha}(\Gamma)$, $s = 1, 2$, $K \geq 1$, $\alpha > 0$. *Тогда для компонент из представления* (7.1) *справедливы оценки* (7.2).

Замечание 7.1. Пусть $u(x)$, $x \in \overline{D}$, — решение краевой задачи

$$L_{(2.2)}u(x) = f(x), \quad x \in D, \tag{7.3}$$

$$lu(x) = \begin{cases} l_L\, u(x), \\ l_R\, u(x) \end{cases} \equiv \begin{cases} \Big(-\varepsilon\alpha(x)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \beta(x)\Big)u(x), & x_1 = 0; \\ \Big(\varepsilon\alpha(x)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \beta(x)\Big)u(x), & x_1 = d, \end{cases} = \psi(x), \quad x \in \Gamma,$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\psi(x)$, $x \in \Gamma$, — достаточно гладкие ограниченные функции; $\alpha(x), \beta(x) \geq 0$, $x \in \Gamma_1$, $\alpha(x) \geq 0$, $\beta(x) \geq m_1$, $x \in \Gamma_2$, $m_2 \leq \alpha(x) + \beta(x) \leq M$, $|\psi(x)| \leq M$, $x \in \Gamma$. Справедлива

Теорема 7.2. *Пусть для данных краевой задачи* (7.3), (2.1) *выполняется условие* (2.3), *и пусть* $a_s, b_s, c, f \in C^{3K-2+\alpha_0}(\overline{D})$, $\alpha, \beta, \psi \in C^{3K-2+\alpha_0}(\Gamma)$, $s = 1, 2$, $K \geq 1$, $\alpha_0 > 0$. *Тогда для компонент из представления* (7.1) *решения краевой задачи* (7.3), (2.1) *справедливы оценки* (7.2).

Замечание 7.2. Главный член разложения сингулярной компоненты из представления (7.1) решения краевой задачи (7.3), (2.1) можно представить в виде

$$V^0(x) = V_L^0(x_2)\exp(-\varepsilon^{-1}m_L^0(x_2)\,x_1), \quad x \in \overline{D},$$

где

$$m_L^0(x_2) = a_1^{-1}(0, x_2)b_1(0, x_2), \quad V_L^0(x_2) = [m_L^0(x_2)\alpha(0, x_2) + \beta(0, x_2)]^{-1}[\psi(0, x_2) - l_L U(0, x_2)].$$

Для функции $V^0(x)$ в окрестности границы Γ справедливы оценки

$$|V(x) - V^0(x)|, \quad \varepsilon\Big|\frac{\partial}{\partial x_1}(V(x) - V^0(x))\Big| \leq M\varepsilon\exp(-m\varepsilon^{-1}r(x, \Gamma_1)),$$
$$x \in \overline{D}, \quad m = m_{(7.2)}. \tag{7.4}$$

В том случае, когда

$$f(x) = 0, \quad x \in \overline{D}, \quad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \tag{7.5}$$

главный член разложения решения краевой задачи (7.3), (2.1) — функция $u^0(x)$, $x \in \overline{D}$, — представляется в виде

$$u^0(x) = U_0(x) + V_0(x), \quad x \in \overline{D}.$$

Компоненты $U_0(x)$, $V_0(x)$ — решения задач

$$\begin{gathered} L^1 U_0(x) \equiv \Big\{ \sum_{s=1,2} b_s(x)\frac{\partial}{\partial x_s} - c(x)\Big\}U_0(x) = f(x), \quad x \in \overline{D} \setminus \Gamma_2, \\ l_R U_0(x) \equiv \Big\{\varepsilon\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta(x)\Big\}U_0(x) = \psi(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ L^2 V_0(x) \equiv \Big\{\varepsilon a_1(x^*)\frac{d^2}{dx_1^2} + b_1(x^*)\frac{d}{dx_1}\Big\}V_0(x) = 0, \quad x \in D, \\ V_0(x) = -U_0(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad l_R V_0(x) = 0, \quad x \in \Gamma_2, \end{gathered} \tag{7.6}$$

где $x^* = x^*(x) = (x_1^*, x_2) \in \Gamma_1$, $x = (x_1, x_2) \in \overline{D}$; $\alpha(x) = \alpha_{(7.3)}(x)$, $\beta(x) = \beta_{(7.3)}(x)$, $x \in \Gamma_2$. Для функции $u^0(x)$ справедливы оценки

$$|u(x) - u^0(x)|, \quad \varepsilon\Big|\frac{\partial}{\partial x_1}(u(x) - u^0(x))\Big| \leq M\varepsilon, \quad x \in \overline{D}, \tag{7.7}$$

где $u(x)$ — решение задачи (7.3), (2.1), (7.5).

Литература

1. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем.* – М.: Мир, 1983. – 199 с.
2. Шишкин Г.И. *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.* – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 233 с.
3. Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. *Fitted numerical methods for singular perturbation problems.* – Singapore: World Scientific, 1996. – 166 p.
4. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. *Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion and flow problems.* – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 348 p.
5. Багаев Б.М., Шайдуров В.В. *Сеточные методы решения задач с пограничным слоем.* Ч. 1. – Новосибирск: Наука, 1998. – 199 с.
6. Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. *Robust computational techniques for boundary layers.* – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2000. – 254 p.
7. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.: Наука, 1989. – 608 с.
8. Quarteroni A., Valli A. *Domain decomposition methods for partial differential equations.* – Oxford: Oxford Univ. Press, 1999. – 376 p.
9. Hemker P.W., Shishkin G.I., Shishkina L.P. *Distributing the numerical solution of parabolic singularly perturbed problems with defect-correction over independent processes* // Siberian J. Numer. Math. – 2000. – V. 3. – № 3. – P. 229–258.
10. Shishkin G.I. *Acceleration of the process of the numerical solution to singularly perturbed boundary value problems for parabolic equations on the basis of parallel computations* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1997. – V. 12. – № 3. – P. 271–291.
11. Hemker P.W., Shishkin G.I., Shishkina L.P. *High-order time-accurate parallel schemes for parabolic singularly perturbed problems with convection* // Computing. – 2001. – V. 66. – № 2. – P. 139–161.
12. Hemker P.W., Shishkin G.I., Shishkina L.P. *Acceleration by parallel computations of solving high-order time-accuracy difference schemes for singularly perturbed convection-diffusion problems* // Numer. Anal. and Its Appl.: Second Internat. Conf. NAA 2000, Rousse, Bulgaria, June 2000 / Lect. Notes in Comput. Sci. Springer, 2001. – V. 1988. – P. 393–401.
13. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
16.06.2002