ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

УДК 517.9

В.С. МОКЕЙЧЕВ, $\boxed{\text{А.В. МОКЕЙЧЕВ}}$

НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, I

Введение

В серии из трех статей предлагается новое понятие решения линейной задачи и на его основе разрабатывается теория разрешимости. При этом используются обозначения

$\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n \supset \mathbb{Z}^n \supset \mathbb{M}^n$ — множества всех n-мерных векторов, все координаты которых являются соответственно комплексными, вещественными, целыми, целыми неотрицательными числами;

в случае $z \in \mathbb{C}^n$ (аналогично $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{M}^n$) $|z| = (|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)^{1/2}$;

$x \le y$ ($x < y$) для $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, если для всех координат $x_j \le y_j$ ($x \le y$ и $x \ne y$);

$z^\alpha \equiv z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$, $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{M}^n$; $z_j^0 \equiv 1$;

Φ — конечное множество мультииндексов, т. е. элементов из $\mathbb{M}^n$;

элемент $y \in \Phi$ называется наибольшим, если не существует $x \in \Phi$, для которого $x > y$;

$L^2_\nu(\Omega)$ — множество всех измеримых по Борелю ν-мерных функций $u(x)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx < +\infty$;

если Ω — открытая область из $\mathbb{R}^n$, то $\mathbb{D}'(\Omega,\nu)$ — множество всех векторов $u(x) = (u_1(x), \dots, u_\nu(x))$, где каждая координата является обобщенной функцией;

$W^{\Phi,2}_\nu(\Omega)$ — пространство типа Соболева, т. е. множество всех тех $u(x) \in \mathbb{D}'(\Omega,\nu)$, для которых обобщенные производные $u^{(\alpha)}(x) = (u_1^{(\alpha)}(x), \dots, u_\nu^{(\alpha)}(x))$ при всех $\alpha \in \Phi$ принадлежат $L^2_\nu(\Omega)$;

$C^\Phi_\nu(\Omega)$ — множество всех ν-мерных, непрерывно дифференцируемых в Ω включительно до порядков $\alpha \in \Phi$ функций, существующие производные для которых ограничены в Ω;

$C^\Phi_\nu(b-a)$ (здесь и ниже $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$) — подмножество из $C^\Phi_\nu(\mathbb{R}^n)$ всех $(b-a)$-периодических вместе с существующими производными функций; если все координаты у $(b-a)$ равны 2π, то вместо $C^\Phi_\nu(b-a)$ будем писать $C^\Phi_\nu(2\pi)$;

$L^2_\nu(b-a)$ — множество всех измеримых по Борелю ν-мерных, $(b-a)$-периодических функций $u(x)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{[a,b]} |u(x)|^2 dx < +\infty$, при этом $[a,b] = \{x : a \le x \le b\}$, последний интеграл и запись $\int\limits_a^b |u(x)|^2 dx$ означают одно и то же;

$W^{\Phi,2}_\nu(b-a)$ — множество всех тех $u(x) \in \mathbb{D}'(\Omega,\nu)$, для которых $u^{(\alpha)}(x) \in L^2_\nu(b-a)$ при всех $\alpha \in \Phi$;

$$C^{+\infty}_\nu(\Omega) = \cap C^\Phi_\nu(\Omega), \qquad C^{+\infty}_\nu(b-a) = \cap C^\Phi_\nu(b-a),$$
$$W^{+\infty,2}_\nu(\Omega) = \cap W^{\Phi,2}_\nu(\Omega), \quad W^{+\infty,2}_\nu(b-a) = \cap W^{\Phi,2}_\nu(b-a),$$

при этом пересечения производятся по всем $\Phi \subset \mathbb{M}^n$.

Необходимость в приведенных ниже исследованиях вызвана многими причинами. Остановимся на нескольких из них.

Во-первых, понятие обобщенного решения недостаточно для разрешимости ряда дифференциальных уравнений в частных производных [1], [2] и некоторых математических моделей. Для примера рассмотрим модель вынужденных 2π-периодических колебаний закрепленной на концах интервала $[0,\pi]$ струны

$$u_{tt} - c^2\, u_{xx} = f(t,x), \quad (t,x) \in \widetilde{\Omega} = \mathbb{R} \times [0,\pi], \tag{1}$$

$$u,\ u_t \ \text{— } 2\pi\text{-периодические по } t \text{ функции}, \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \tag{2}$$

где $f(t,x) \in L_1^2(\widetilde{\Omega})$ и 2π-периодическая по t. Напомним, как понимается обобщенное решение задачи (1), (2). Через $C_l^{+\infty}$ обозначается множество всех бесконечно гладких в $\widetilde{\Omega}$ функций, удовлетворяющих (2), вводится оператор $A_0 : A_0\varphi = \varphi_{tt} - c^2\varphi_{xx}$, $\varphi \in C_l^{+\infty}$ и строится его замыкание A. При этом область определения последнего — это множество всех тех обобщенных функций y, для которых существуют такие $\varphi_{(j)} \in C_l^{+\infty}$, что $\varphi_{(j)} \to y$ (в смысле обобщенных функций) и $\{A_0\varphi_{(j)}\}$ сходится в $L_1^2(\widetilde{\Omega})$ по норме. Если u входит в область определения оператора A и соответствующая u последовательность $\{A_0\varphi_{(j)}\}$ сходится к $f(t,x)$, то u называется обобщенным решением задачи (1), (2). Пусть c — иррациональное число. Тогда соответствующая (1), (2) однородная задача имеет только нулевое обобщенное решение, а обобщенным решением задачи (1), (2) может быть только объект

$$\sum f_{k_1,k_2}(-k_1^2 + c^2\, k_2^2)^{-1} \exp(ik_1t)\sin(k_2x), \quad i^2 = -1, \tag{3}$$

где суммирование производится по всем $k_1 = 0, \pm 1, \ldots,\ k_2 = 1, 2, \ldots,\ f_{k_1,k_2}$ — коэффициент Фурье с номером (k_1,k_2) в разложении функции $f(t,x)$ в ряд по последовательности

$$\{\exp(ik_1t)\sin(k_2x),\ k_1 = 0, \pm 1, \ldots,\ k_2 = 1, 2, \ldots\}. \tag{4}$$

Убедимся в том, что при некоторых $f(t,x)$ (даже конечное число раз дифференцируемых в $\widetilde{\Omega}$) объект (3) не может быть обобщенной функцией, если $c > 0$ — число Лиувилля. Другими словами, убедимся в отсутствии при некоторых $f(t,x)$ решения задачи (1), (2). Обозначим через $\mathcal{M}_m$ множество всех взаимно простых чисел $p > 0$, $q > 0$, для которых $|c - p/q| < q^{-m}$. В тех случаях, когда при любом $m > 0$ множество $\mathcal{M}_m$ бесконечно, число c называется числом Лиувилля. Пусть $(k_1,k_2) \in \mathcal{M}_m$. Тогда

$$|-k_1^2 + c^2\, k_2^2|^{-1} \geq |k_2|^{m-2}(2c + |k_2|^{-m})^{-1}.$$

Отсюда следует, если при $k_2 \to +\infty$ числа $|f_{k_1,k_2}|$ не убывают быстрее любой степени от $(1+k_2^2)^{-1}$, то не существует N_1 и N_2, для которых

$$|f_{k_1,k_2}(-k_1^2 + c^2\, k_2^2)^{-1}| \leq N_1(1 + k_1^2 + k_2^2)^{N_2}. \tag{5}$$

Невыполнение (5) означает, что объект (3) не может быть обобщенной функцией. Если иррациональное число c не является числом Лиувилля, то при некоторых N_1, N_2 выполняются оценки (5), и объект является обобщенным решением задачи (1), (2). Итак, задача (1), (2) имеет или не имеет обобщенного решения при каждой $f(t,x)$ в зависимости от того, не является или является c числом Лиувилля. Однако для колебаний струны безразлична природа иррациональности c.

Во-вторых, общепринятое понятие обобщенного решения не подходит к дифференциальным уравнениям с отклоняющимися аргументами [3]. Поясним сказанное на примере уравнения

$$(Py)(t) \equiv y'(t) + y(2t) = f(t), \quad t \in (0,2\pi) = \Omega \subset \mathbb{R}. \tag{6}$$

Меняя $f(t)$, получим, что в множестве всех классических решений уравнения (6) содержатся все тригонометрические многочлены $y_f(t) = \sum a_k \exp(ikt)$ (суммы конечны). Предположим, что они являются обобщенными решениями в общепринятом понимании. Это означает, что существует такая сопряженная операция P^*, что при всех $\varphi(t) \in C_1^{+\infty}$ с носителями $(\operatorname{supp}\varphi) \subset \Omega$ функции $(P^*\varphi)(t)$ также бесконечно гладки и

$$\int_\Omega y_f(t)(P^*\varphi)(t)dt = \int_\Omega (Py_f)(t)\varphi(t)dt,$$

причем $(\operatorname{supp} P^*\varphi) \subset \Omega$. В силу 2π-периодичности и произвольности $y_f(t)$ из последних равенств следует $(P^*\varphi)(t) = -\varphi'(t)+\varphi\left(\frac{t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{t+\pi}{2}\right)$. Учитывая $(\operatorname{supp}\varphi) \subset (0, 2\pi)$, получим $(P^*\varphi)(t) \to \varphi(\pi)$, если $t \to 2\pi$. В частности, при $\varphi(\pi) \neq 0$ имеем $(P^*\varphi)(2\pi) \neq 0$, что противоречит условию $(\operatorname{supp} P^*\varphi) \subset (0, 2\pi)$.

В-третьих, естественно желание разработать с единых позиций теории разных по природе задач (Дирихле, Неймана, на 2π-торе, в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и т. д.). Понятно, что этого можно добиться только тогда, когда удастся предложить универсальное понятие решения линейной задачи.

В-четвертых, существует необходимость изложить теорию разрешимости линейных задач без предположения о типе изучаемого дифференциального уравнения (эллиптический, гиперболический, параболический) и без предположения скалярности уравнения.

В связи с тем, что мы вводим новое понятие, нам придется по-новому осмыслить понятия "регулярное значение", "собственное значение", "спектр" с одной стороны, с другой – следует выделить случаи, когда решение оказывается "гладким", например, принадлежащим пространству типа пространства Соболева $W_m^{\Phi,2}(\Omega)$.

Объектом исследования является задача

$$(P(x, \partial/\partial x) - \lambda E)u = f(x) \in H, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

$$lu = 0. \tag{8}$$

Формальная задача (7), (8) станет задачей в общепринятом понимании только после того, как будет дано понятие решения. В записях (7), (8) использованы следующие обозначения: $\lambda \in \mathbb{C}$; $(P(x, \partial/\partial x) - \lambda E)u \equiv \sum\limits_{\alpha\in\Phi} C_\alpha(x)(\partial/\partial x)^\alpha u - \lambda u$; $(\partial/\partial x)^\alpha u \equiv (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n} u$; E — единичный оператор; при каждом $\alpha \in \Phi$ ненулевые линейные операторы $C_\alpha(x)$ отображают гильбертово пространство $H_{(\alpha)}$ функций в гильбертово пространство H; Ω — фиксированное множество; $lu = 0$ — формальная запись, означающая, что объект u должен удовлетворять некоторым фиксированным линейным условиям. При этом формальность условий l состоит в том, что они должны выполняться в обычном смысле, если u — достаточно гладкая функция, и в функциональном смысле, если u — функционал. Как будет читаться запись $lu = 0$ нами, станет ясно после введения понятия решения формальной задачи (7), (8).

Предположение о том, что $C_\alpha(x)$ — операторы, введено с единственной целью: включить в рамки изложенного ниже дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами.

В части I нас будет интересовать вопрос о природе спектра. Известно, что спектры многих классических задач, т. е. задач Дирихле, Неймана, на 2π-торе, в $L^2(\mathbb{R}^n)$, для типовых скалярных дифференциальных уравнений, т. е. эллиптических, параболических и гиперболических, рассматриваемых в соответствующих пространствах Соболева, являются точечными [1], [4], [5]. Если условия l не являются классическими, либо дифференциальное уравнение не является типовым, то открытым остается вопрос о том, как следует ввести понятие решения, чтобы спектр оказался точечным, т. е. состоял из собственных значений, более того, ждет решения более простая задача: существует ли для заданного формального уравнения (7) корректно разрешимая задача? В ряде случаев ответ на поставленный вопрос имеется [6]. Используя аналог нелокальных условий [6], докажем, что для многих дифференциальных квазиполиномов с постоянными коэффициентами существует корректно разрешимая задача. В заключение цикла из трех статей будут предложены приложения ранее полученных абстрактных результатов.

В процессе работы нам придется использовать много постоянных. Условимся существенные постоянные использовать с индексами, несущественные — без индексов. При этом существенные постоянные, использованные в занумерованной формуле, имеют тот же смысл, который был заложен в них первоначально, т. е. в занумерованной формуле. Несущественные постоянные часто будем обозначать одними и теми же буквами, иногда отмечая, от чего они зависят. Условимся прописными буквами, часто с индексами, обозначать операторы, матрицы, пространства; строчными, часто с индексами — числовые объекты; строчными с индексами, заключенными в скобки, например, $y_{(k)}, v_{(r,j)} \dots$ — элементы соответствующих гильбертовых пространств.

Все используемые гильбертовы пространства считаются *сепарабельными*.

1. Основные понятия

Одно из главных — понятие φ-решения задачи (7), (8). Путь его конструирования подсказан математической моделью (1), (2). Именно, используя понятие φ-решения, убедимся в том, что при иррациональном c задача (1), (2) корректно разрешима.

Пусть $\varphi = \{\varphi_{(p)},\ p \in \mathcal{N}\}$ — последовательность таких достаточно гладких функций, что

$$\begin{cases} (\partial/\partial x)^\alpha \varphi_{(p)} \in H_{(\alpha)}\ \forall \alpha \in \Phi, \quad l\varphi_{(p)} = 0\ \forall p \in \mathcal{N} \\ (P(x, \partial/\partial x) - \lambda E)\varphi_{(p)} \in H\ \forall p \in \mathcal{N} \end{cases} \tag{1.1}$$

и имеющая в некотором гильбертовом пространстве $H_{(0)}$ биортогональную $\varphi^* = \{\varphi^*_{(p)},\ p \in \mathcal{N}\}$. Последняя в общем случае не единственна, поэтому ниже φ^* — фиксированная последовательность, биортогональная в $H_{(0)}$ к φ. Понятно, что требование биортогональности автоматически указывает на то, что $\varphi_{(p)} \in H_{(0)}$, $\varphi^*_{(p)} \in H_{(0)}$ $\forall p$. Обозначим через L_φ линейную оболочку множества φ, через L_{φ^*} — множества φ^*. L_φ и L_{φ^*} — части гильбертова пространства $H_{(0)}$, поэтому определено скалярное произведение $\langle \widetilde{\psi}, \psi \rangle_0$ элементов $\widetilde{\psi} \in L_\varphi$, $\psi \in L_{\varphi^*}$.

Алгебраически сопряженное к L_{φ^*} множество обозначим через $\mathbb{D}'_\varphi$. Каждый элемент $v \in \mathbb{D}'_\varphi$ является линейным функционалом, заданным на L_{φ^*}. В отличие от элементов множества $\mathbb{D}'(\Omega, \nu)$ элементы множества $\mathbb{D}'_\varphi$ будем называть φ-распределениями. По определению каждое φ-распределение v имеет коэффициенты Фурье v_p, $p \in \mathcal{N}$ по последовательности φ^*, определяемые равенствами $v_p = v(\varphi^*_{(p)})$ — значение функционала v на функции $\varphi^*_{(p)}$. Легко проверить, что φ-распределения полностью и однозначно определяются своими коэффициентами Фурье.

Замечание 1.1. Схема построения $\mathbb{D}'_\varphi$ повторяет схему построения $\mathbb{D}'(\Omega, \nu)$, при этом $C_0^{+\infty}(\Omega)$ заменяется на L_{φ^*} и топологическое сопряжение — на алгебраическое; каждый формальный ряд $\sum v_p \varphi_{(p)}$ можно отождествить с φ-распределением, полагая

$$\Big(\sum v_p \varphi_{(p)}\Big)(\psi) = \sum v_p \langle \psi, \varphi_{(p)} \rangle_0 \quad \forall \psi \in L_{\varphi^*}.$$

Какой бы ни была последовательность чисел $\{v_p,\ p \in \mathcal{N}\}$, существует единственное φ-распределение v, соответствующие коэффициенты Фурье которого удовлетворяют условиям $v(\varphi^*_{(p)}) = v_p$ $\forall p \in \mathcal{N}$.

В множестве $\mathbb{D}'_\varphi$ можно ввести *топологию*, считая $v(j) \to v$ при $j \to +\infty$, если $(v(i))(\psi) \to v(\psi)$ при $j \to +\infty$ для каждой функции $\psi \in L_{\varphi^*}$. Используя коэффициенты Фурье, легко доказать, что с заданной топологией $\mathbb{D}'_\varphi$ — топологическое векторное пространство (ТВП).

Определение 1.1. φ-распределение u называется φ-решением задачи (7), (8) (либо уравнения (7)), если

$$\sum_{p \in \mathcal{N}} (P(x, \partial/\partial x) - \lambda E)(u_p \varphi_{(p)}) = f(x), \tag{1.2}$$

где ряд сходится в H по норме и $u_p = u(\varphi^*_{(p)})$; нахождение φ-распределений u, удовлетворяющих (1.2), называется φ-задачей для (7).

Замечание 1.2. Решая смешанные задачи для гиперболических и параболических дифференциальных уравнений методом Фурье [7], мы фактически находим φ-решения со специально построенной последовательностью φ.

Обозначим через P_λ оператор, порожденный φ-задачей для (7). Его область определения $\mathcal{D}_{p_\lambda}$ объединяет те и только те φ-распределения v, для которых в H по норме сходятся ряды

$$\sum_{p\in\mathcal{N}}(P(x,\partial/\partial x)-\lambda E)(v_p\varphi_{(p)}).$$

Сумма последнего ряда есть результат действия оператора P_λ на элементе v, т. е. $P_\lambda v$.

Так как оператор P_λ действует из ТВП $\mathbb{D}'_\varphi$ в ТВП H, то можно вести речь о *корректной разрешимости* оператора P_λ. Напомним, что оператор A, действующий из ТВП J_1 в ТВП J_2, называется корректно разрешимым, если для каждого $g\in J_2$ уравнение $Ah=g$ имеет единственное решение $h_g\in J_1$, и оно непрерывно зависит от g.

Определение 1.2. Если оператор P_λ корректно разрешим, то значение λ называется регулярным значением оператора P_λ. Множество всех нерегулярных значений называется спектром φ-задачи для (7); если уравнение $P_\lambda v=0$ имеет ненулевое решение, то число λ называется собственным значением φ-задачи для (7); часть спектра, состоящая из всех собственных значений, называется точечным спектром.

До сих пор мы ничего не говорили о том, в каком смысле понимается равенство (1.2). Это сделано не случайно. В зависимости от смысла равенства (1.2) термин φ-решение принимает конкретное содержание. Рассмотрим следующие ситуации.

С1. φ — конечная последовательность, и равенство (1.2) понимается в смысле Галеркина; тогда φ-решение есть не что иное, как приближенное решение задачи (7), (8), вычисленное по методу Галеркина [8];

С2. φ — конечная последовательность, и равенство (1.2) понимается в смысле минимума соответствующего функционала, тогда φ-решение задачи (7), (8) является приближенным квазирешением, широко используемым при решении некорректных задач [8].

Всюду считаем, что равенство в (1.2) выполняется в сильном смысле, т. е. выписанный в (1.2) ряд сходится к $f(x)$ по норме пространства H.

Из определения φ-решения и замечания 1.1 следует, что, находя φ-решения, фактически находим ряд

$$\sum u_p\varphi_{(p)}. \tag{1.3}$$

Когда ряд (1.3) достаточно хорошо сходится, например, при всех $\alpha\in\Phi$ в $H_{(\alpha)}$ по норме сходятся ряды $\sum u_p(\partial/\partial x)^\alpha\varphi_{(p)}$, φ-решение u называем "классическим" решением задачи (7), (8); если ряд (1.3) расходится в H, однако его можно отождествить с некоторой обобщенной функцией, то φ-решение можно назвать "обобщенным" решением задачи (7), (8). При этом само φ-решение может не быть ни классическим, ни обобщенным решением в обычном понимании. Отмеченная ситуация типична для многих дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами. Частично об этом было сказано во введении.

Выпишем формальные условия, которым должно удовлетворять φ-решение уравнения (7) в зависимости о конкретного вида φ.

С3. Последовательность φ имеет вид

$$\left\{e(j)\exp\left(2\pi ip\frac{x-a}{b-a}\right),\quad j=1,\ldots,m,\quad p\in\mathbb{Z}^n\right\}, \tag{1.4}$$

здесь и ниже $\{e(1),\dots,e(m)\}$ — стандартный единичный базис в $\mathbb{R}^m$ и

$$i^2=-1,\quad z\frac{x-a}{b-a}=z_1\frac{x_1-a_1}{b_1-a_1}+\dots+z_n\frac{x_n-a_n}{b_n-a_n},$$

тогда при $H=L_m^2((a,b))$, вычисляя φ-решения уравнения (7), находим $(b-a)$-периодические решения, иногда такие решения называются решениями, заданными на $(b-a)$-торе.

C4. Пусть $\lceil t\rceil$ — целая часть числа $t\in\mathbb{R}$, $[\alpha]=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $\nu=\max\limits_{\alpha\in\Phi}\left\lceil\frac{[\alpha]}{2}-1\right\rceil$, Γ — граница множества Ω, и задача

$$\Delta^{\nu+1}u=\mu u,\quad x\in\Omega;\quad (\partial/\partial x)^\beta u\big|_\Gamma=0\quad\forall\beta:[\beta]\le\nu, \tag{1.5}$$

в которой Δ — Лапласиан, имеет систему собственных функций $\{y_{(p)},\ p\in\mathcal{N}\}$, образующих ортобазис в $L_1^2(\Omega)$ и принадлежащих $C_1^\Phi(\Omega)$, тогда в случае $H=L_m^2(\Omega)$ и

$$\varphi=\{e(j)y_{(p)},\ \ j=1,\dots,m,\ \ p\in\mathcal{N}\}, \tag{1.6}$$

вычисляя φ-решение уравнения (7), фактически находим решения задачи Дирихле для уравнения (7).

C5. Пусть в (1.5) $\nu=0$ и $y_{(p)}\in C_1^\Phi(\Omega)$, $p\in\mathcal{N}$ — собственные функции задачи (1.5), образующие ортобазис в $L_1^2(\Omega)$, тогда в случае (1.6) и $H=L_m^2(\Omega)$, вычисляя φ-решения уравнения (7), находим решения типа Дирихле для уравнения (7), в частном случае $\Omega=(a,b)$ имеем

$$y_{(p)}=\prod_{j=1}^n\sin\left(\pi p_j\frac{x_j-a_j}{b_j-a_j}\right),\quad p=(p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{Z}^n,\quad p_j\ge1\ \ \forall j.$$

C6. Пусть Γ — граница Ω, в точках $x\in\Gamma$ (за исключением конечного числа точек) существует нормаль $\vec{s}$, задача

$$\Delta u=\mu u,\quad x\in\Omega,\quad \frac{\partial u}{\partial\vec{s}}\Big|_\Gamma=0$$

имеет собственные функции $\{y_{(p)}\in C_1^\Phi(\Omega)\}$, образующие ортобазис в $L_1^2(\Omega)$, тогда в случае (1.6) и $H=L_m^2(\Omega)$, вычисляя φ-решения уравнения (7), находим решения задачи Неймана при $\Phi\subset\{[\alpha]\le2\}$, либо задачи типа Неймана при произвольном Φ; если $\Omega=(a,b)$, то

$$y_{(p)}=\prod_{j=1}^n\cos\left(\pi p_j\frac{x_j-a_a}{b_j-a_j}\right),\quad p=(p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{Z}^n,\quad p_j\ge0\ \ \forall j.$$

C7. Пусть $H=L_m^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi=\{\varphi_{(p)}\in C_m^\Phi(\mathbb{R}^n),\ p\in\mathcal{N}\}$ — ортонормированный базис в H, и $(P(x,\partial/\partial x)-\lambda E)\varphi_{(p)}\in H\ \forall p$, тогда, вычисляя φ-решения для уравнения (7), находим решения так называемой задачи во всем пространстве.

C8. Если $\varphi=\{e(j)(x-x_0)^\gamma,\ j=1,\dots,m,\ \gamma$ пробегает $\mathbb{M}^n\}$, $\Omega=\{|x-x_0|<\delta\}$, то, находя φ-решения уравнения (7), для которых соответствующие ряды (1.3) равномерно сходятся в каждом компакте из Ω, находим аналитические в Ω решения уравнения (7); для нахождения аналитических в $\Omega=\{0<|x-x_0|<\delta\}$ решений уравнения (7), имеющих полюс порядка $\beta\in\mathbb{M}^n$, достаточно найти такие φ-решения u уравнения (7) в случае $\varphi=\{e(j)(x-x_0)^{\gamma-\beta},\ j=1,\dots,m,$ γ пробегает $\mathbb{M}^n\}$, для которых ряды $\sum u_p(x-x_0)^\beta\varphi_{(p)}$ сходятся равномерно в каждом компакте из $\{|x-x_0|<\delta\}$.

C9. Особенно удобны φ-решения тогда, когда необходимо решить смешанную задачу для (7); пусть, например, $\varphi=\{e(j)\exp(ik_1x_1)\varphi_{(k_2,\dots,k_r)}(x_2,\dots,x_r)\widetilde{\varphi}_{(k_{r+1},\dots,k_n)}(x_{r+1},\dots,x_n)\}$, где $\varphi_{\widetilde{k}}(\widetilde{x})$, $\widetilde{\varphi}_{(\widetilde{\widetilde{k}})}(\widetilde{\widetilde{x}})$ — функции, выписанные соответственно в C4, C7, тогда, находя φ-решения уравнения (7), находим решения уравнения (7), 2π-периодические по x_1, удовлетворяющие условиям Дирихле по аргументам $x_2,\dots,x_r$ и принадлежащие $L_m^2(\mathbb{R}^{n-r})$ по $x_{r+1},\dots,x_n$.

C10. Если положить $\varphi = \{\exp(ik_1 t)\sin(k_2 x),\ k_1 = 0, \pm 1, \dots,\ k_2 = 1, 2, \dots\}$, то объект (3) окажется φ-решением задачи (1), (2).

2. Спектр оператора P_λ

Всюду в данном разделе $\varphi = \{e(j)y_{(p)},\ j = 1, \dots, m,\ p \in \mathcal{N}\}$ — ортонормированный базис в H. В частности, это означает, что $\varphi^* = \varphi$. Через Q будем обозначать φ-стационарные операторы, т. е. операторы, определяемые равенствами

$$Qu = \sum_{k \in \mathcal{N}} q(k) u_k y_{(k)}, \quad u_k = \begin{pmatrix} u_{k,1} \\ \vdots \\ u_{k,m} \end{pmatrix},$$

в которых $q(\eta)$ — числовые (m, m)-матрицы и $u_{k,j} = u(e(j)y_{(k)}$ — коэффициент Фурье с номером (k, j) φ-распределения u.

В дальнейших рассуждениях, если особо не оговорено, суммирование производится во всем $k \in \mathcal{N}$, обратимы матрицы $q(k)\ \forall k \in \mathcal{N}$.

Практически во всех утверждениях данного раздела будут использоваться оценки

$$c_1 \|Q\psi\| - c(N)\|\psi(N, x)\| \leq \|P_\lambda \psi\| \leq c_2\|Q\psi\| + c(N)\|\psi(N, x)\|, \tag{2.1}$$

в которых $c_1 > 0$, c_2, $c(N)$, N — числа, не зависящие от функций $\psi \in L_\varphi$, $\langle\ ,\ \rangle$, $\|\cdot\|$ — символы скалярного произведения и порожденной им нормы в H, $\psi(N, x) = \sum' \psi_k y_{(k)}$, причем штрих указывает на то, что суммирование производится по всем $k \in \mathcal{N} \cap (|k| \leq N)$, ψ_k — вектор-столбец с координатами $\psi_{k,j} = \langle \psi, e(j)y_{(k)} \rangle$. В третьей части убедимся в том, что предположения (2.1) являются аналогами априорных оценок, используемых при изучении ряда классических задач для типовых дифференциальных уравнений.

Через $\mathbb{D}'_\varphi(N)$ будем обозначать множество всех тех φ-распределений v, для которых $v_{k,j} = 0$, $j = 1, \dots, m$, $k \in \mathcal{N} \cap (|k| \leq N)$. В силу (2.1) при всех $v \in \mathbb{D}'_\varphi(N) \cap \mathcal{D}_{P_\lambda}$ выполняются оценки

$$c_1\|Qv\| \leq \|P_\lambda v\| \leq c_2\|Qv\|.$$

Полагая в них $Qv = h$ и учитывая взаимную однозначность Q, получим

$$c_1\|h\| \leq \|P_\lambda Q^{-1} h\| \leq c_2 \|h\| \quad \forall h \in H \cap \mathbb{D}'_\varphi(N). \tag{2.2}$$

Во-первых, из оценок (2.2) легко следует, что область значений оператора $P_\lambda : (H \cap \mathbb{D}'_\varphi(N) \cap \mathcal{D}_{P_\lambda}) \to H$ замкнута, во-вторых, последовательность функций

$$\{P_\lambda Q^{-1}(e(j)y_{(k)}),\ j = 1, \dots, m,\ k \in \mathcal{N} \cap (|k| \geq N)\} \tag{2.3}$$

является базисом Рисса в подпространстве из H, натянутом на (2.3). Так как последовательность

$$\{P_\lambda Q^{-1}(e(j)y_{(k)}),\ j = 1, \dots, m,\ k \in \mathcal{N}\} \tag{2.4}$$

отличается от (2.3) на конечное число элементов, то существует подпоследовательность

$$\{P_\lambda Q^{-1}(e(j)y_{(k)}),\ (k, j) \in \mathcal{N}'\} \tag{2.5}$$

последовательности (2.4), являющаяся базисом Рисса в подпространстве из H, натянутом на (2.4). Отсюда следует, что область значений оператора $(P_\lambda Q^{-1})$, а значит и P_λ, является подпространством в H, т. е. оператор P_λ нормально разрешим. Таким образом, доказана

Теорема 2.1. *Если выполняются оценки* (2.1), *то оператор* P_λ *нормально разрешим.*

Подготовим теорему о спектре — центральное утверждение статьи. Предположим, что существует оператор $P_{\overline{\lambda}}^{+}$, действующий из $\mathbb{D}'_{\varphi}$ в H и определяемый равенствами

$$P_{\overline{\lambda}}^{+}v = \sum P_{\overline{\lambda}}^{+}(v_k y_{(k)}), \tag{2.6}$$

$$\langle P_{\lambda}(e(j)y_{(k)}),\, e(r)y_{(p)}\rangle = \langle e(j)y_{(k)},\, P_{\overline{\lambda}}^{+}(e(r)y_{(p)})\rangle \ \ \forall p,\ \forall j,\ \forall r,\ \forall k. \tag{2.7}$$

Напомним, что $\langle\, ,\, \rangle$ — символ скалярного произведения в H и v_k — вектор-столбец с координатами $v_{k,j} = v(e(j)y_{(k)})$, $j = 1,\dots,m$. Оператор $P_{\overline{\lambda}}^{+}$ естественно назвать *формально сопряженным* к P_{λ}. Для оператора Q всегда существует Q^{+}, причем

$$Q^{+}v = \sum (q(k))^{*} v_k y_{(k)} \ \ \forall v \in \mathcal{D}_{Q^{+}},$$

где $(q(k))^{*}$ — матрица, сопряженная к матрице $q(x)$.

Может оказаться, что при всех $\psi \in L_{\varphi}$

$$c_1^{+}\|Q^{+}\psi\| - c(N)\|\psi(N,x)\| \le \|P_{\overline{\lambda}}^{+}\psi\| \le c_2^{+}\|Q^{+}\psi\| + c(N)\|\psi(N,x)\|, \tag{2.8}$$

и постоянные $c_1^{+} > 0$, N, $c(N)$ не зависят от ψ. (По поводу соглашений об используемых постоянных см. конец введения.)

При выполнении оценок (2.1), (2.8) области определений операторов P_{λ}, Q, Q^{+}, $P_{\overline{\lambda}}^{+}$ совпадают. Введем новые операторы

$$J_1 w = \sum P_{\lambda} Q^{-1}(w_k y_{(k)}), \tag{2.9}$$

$$J_2 v = \sum P_{\overline{\lambda}}^{+}(Q^{+})^{-1}(v_k y_{(k)}), \tag{2.10}$$

и при выполнении включений

$$(Q^{+})^{-1}[P_{\overline{\lambda}}^{+}(e(j)y_{(k)})] \in H \ \ \forall j,\ \ \forall k, \tag{2.11}$$

$$J_3 h = \sum (Q^{+})^{-1}[P_{\overline{\lambda}}^{+}(h_k y_{(k)})]. \tag{2.12}$$

При этом область определения $\mathcal{D}_{J_{\nu}}$ оператора J_{ν} объединяет все те φ-распределения, для которых в H но норме сходится соответствующий из выписанных в (2.9), (2.10), (2.12) ряд.

Лемма 2.1. *Если выполняются оценки* (2.1) (*соответственно* (2.8)), *то* J_1 (*соответственно* J_2) *непрерывно отображает* H *в* H.

Лемма 2.2. *Если имеет место* (2.1), (2.8), (2.11), *то* $J_3 \supset J_1^{*}$.

Доказательства. Непрерывность J_1 следует из (2.2). Аналогично проверим непрерывность J_2. Напомним, что включение $J_3 \supset J_1^{*}$ означает $\mathcal{D}_{J_3} \supset \mathcal{D}_{J_1^{*}}$ и $J_3 = J_1^{*}$ на $\mathcal{D}_{J_1^{*}}$. В лемме 2.2, как и всюду ниже, J^{*} — оператор, сопряженный к $J : H \to H$. Учитывая (2.1), (2.8) и равенства

$$\langle J_1 w, e(\nu)y_{(k)}\rangle = \sum w_{r,j}\langle J_1(e(j)y_{(r)}),\, e(\nu)y_{(k)}\rangle =$$
$$= \sum w_{r,j}\langle e(j)y_{(r)},\, (Q^{+})^{-1}[P_{\overline{\lambda}}^{+}(e(\nu)y_{(k)})]\rangle = \langle w,\, (Q^{+})^{-1}[P_{\overline{\lambda}}^{+}(e(\nu)y_{(k)})]\rangle,$$

справедливые при всех $w \in H$, получим

$$J_1^{*}(e(\nu)y_{(k)}) = (Q^{+})^{-1}[P_{\overline{\lambda}}^{+}(e(\nu)y_{(k)})] \ \ \forall \nu,\ \ \forall k.$$

Так как оператор J_1^{*} непрерывен, ибо он сопряжен к непрерывному оператору J_1, то в силу последних равенств

$$J_1^{*}g = \sum g_{k,j} J_1^{*}(e(j)y_{(k)}) = \sum (Q^{+})^{-1}[P_{\overline{\lambda}}^{+}(g_k y_{(k)})],$$

причем последние ряды сходятся в H по норме. По определению оператора J_3 имеем $g \in \mathcal{D}_{J_3}$ и $J_3 g = J_1^{*}g$. $\square$

Из определения φ-стационарности легко следует, что спектр φ-стационарного оператора точечен. Это утверждение не имело бы места, если бы мы ограничились "обобщенными" решениями. Поясним сказанное на примере математической модели (1), (2), введя в нее спектральный параметр λ. Для нее значение $\lambda = 0$ является несобственным, если c — иррациональное число. Однако $\lambda = 0$ не является регулярным значением, если c — число Лиувилля, и рассматриваются только обобщенные решения задачи (1), (2). В классе же φ-решений, где $\varphi = \{\exp(ik_1 t)\sin(k_2 x),\ k_1 \in \mathbb{Z},\ k_2 = 1, 2, \dots\}$, значение $\lambda = 0$ является регулярным для (1), (2).

Итак, природа спектра φ-стационарного оператора полностью ясна. Труднее дело обстоит с операторами, не являющимися φ-стационарными. Эта трудность связана прежде всего с тем, что необходимо дать ответ на вопрос: когда несобственное значение является регулярным? Ответ на вопрос дает

Теорема 2.2. *Предположим, что выполняются* (2.1), (2.8), (2.11) *и при всех* $\psi \in L_\varphi$ *оценки*

$$\|(P^+_{\overline{\lambda}}(Q^+)^{-1} - (Q^+)^{-1}P^+_{\overline{\lambda}})\psi\| \leq c_3\|\psi\| + c(N)\|\psi(N,x)\|, \tag{2.13}$$

в которых $c_3 < c_1^+/2$, $c(N)$, N *— постоянные, не зависящие от* ψ; *пусть* λ *— несобственное значение оператора* P_λ *и* $\overline{\lambda}$ *— несобственное значение оператора* $P^+_{\overline{\lambda}}$. *Тогда они являются регулярными значениями соответственно операторов* P_λ, $P^+_{\overline{\lambda}}$.

Обсудим предположения, использованные в теореме 2.2.

Мы уже отмечали, что оценки (2.1), (2.8) являются аналогами априорных оценок, используемых при изучении ряда классических задач для типовых дифференциальных уравнений. Нам неизвестны примеры задач с точечными спектрами, для которых оценки (2.1), (2.8) не выполнились бы.

"... существует оператор $P^+_{\overline{\lambda}}$ ...". Во многих случаях, например, когда $C_\alpha(x)$ — числовые матрицы, для его существования следует предполагать, что $C_\alpha(x) \in C^{\{\alpha\}}_{m,m}(\Omega)$ $\forall\alpha$, причем $C_\alpha(x)$ должны удовлетворять условиям, обеспечивающим исчезновение внеинтегральных членов при интегрировании по частям. Может показаться, что это жесткое предложение. На самом деле во многих случаях его легко обойти. Вместо $P(x, \partial/\partial x)$ рассмотрим $P(\varepsilon, x, \partial/\partial x)$, причем последний выберем так, чтобы для оператора $P_\lambda(\varepsilon)$, порожденного им, легко строился $P^+_{\overline{\lambda}}(\varepsilon)$ и при всех $\varepsilon > 0$, $\psi \in L_\varphi$ выполнились оценки

$$\|(P(x, \partial/\partial x) - P(\varepsilon, x, \partial/\partial x))\psi\| \leq \varepsilon\|P(x, \partial/\partial x)\psi\|.$$

В тех случаях, когда этого можно добиться, достаточно воспользоваться почти очевидным утверждением:

если λ *— несобственное для* P_λ *значение, то* λ *— регулярное значение для* P_λ *тогда и только тогда, когда при достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *значение* λ *является регулярным для* $P_\lambda(\varepsilon)$.

"... выполняются включения (2.11) ...". Как убедимся в третьей части, это предположение является естественным и выполняется в большинстве случаев автоматически.

"... выполняются (2.13)...". Для φ-стационарных P_λ они выполняются даже при $c_3 = 0$, ибо можно положить $Q = P_\mu$, где μ — несобственное значение для P_μ; тогда $(P^+_{\overline{\lambda}}(Q^+)^{-1} - (Q^+)^{-1}P^+_{\overline{\lambda}})\psi = 0$. В общем случае трудно предложить условия, гарантирующие (2.13). Однако для конкретных φ, как убедимся в третьей части, оценки (2.13) выполняются довольно часто.

"... λ — несобственное значение оператора P_λ, $\overline{\lambda}$ — несобственное значение оператора $P^+_{\overline{\lambda}}$ ...". Это предположение в общем случае ослабить нельзя. Простейшие примеры типа $P_\lambda\varphi_{(k)} = \varphi_{(k-1)}$, $k = 1, 2, \dots$, убеждают в этом. Действительно, в предложенном примере $Q = I$ и выполняются все предположения теоремы 2.2, кроме цитируемого. Легко заметить, что $\lambda = 0$ — не регулярное значение оператора P_λ.

Доказательство теоремы 2.2. В силу леммы 2.1 оператор J_1 непрерывно отображает H в H. Пусть $J_1 w = 0$. Полагая $h_k = (q(k))^{-1}w_k$, получим $0 = \sum J_1[w_k y_{(k)}] = \sum P_\lambda[h_k y_{(k)}]$, причем ряды сходятся в H по норме. Однако λ — несобственное значение оператора P_λ, поэтому $b_k = w_k = 0\ \forall k$. Таким образом, доказано, что J_1 непрерывно и взаимно однозначно отображает H в H. Поэтому область значений сопряженного оператора J_1^* плотна в H. В силу леммы 2.2 область значений J_3 плотна в H. Учитывая (2.8), (2.13), получим

$$\|J_3\psi\| \geq \|J_2\psi\| - \|(J_2 - J_3)\psi\| \geq (c_1^+ - c_3)\|\psi\| - c(N)\|\psi(N,x)\|. \tag{2.14}$$

Из (2.14) следует $\mathcal{D}_{J_3} \subset H$. Последнее вместе с включением $J_3 \supset J_1^*$ означает $J_3 = J_1^*$. Если бы мы знали, что J_3 (либо J_1^*) взаимно однозначен, то на этом можно было бы закончить доказательство теоремы. Однако нам известно только то, что $\mathcal{D}_{J_3} \subset H$, т. е. ряды в (2.12) сходятся в H по норме тогда и только тогда, когда $\sum |h_k|^2 < +\infty$. Хорошо известно, что в этом случае из последовательности

$$\{h_{(k,j)} \equiv (Q^+)^{-1}[P_{\overline{\lambda}}^+(e(j)y_{(k)})],\ j = 1,\dots,m,\ k \in \mathcal{N}\} \tag{2.15}$$

можно выкинуть не более конечного числа элементов так, что оставшаяся

$$\{h_{(k,j)},\ (k,j) \in \widetilde{\mathcal{N}}\} \tag{2.16}$$

будет базисом Рисса в подпространстве из H, натянутом на (2.15). Последнее подпространство содержит область значений J_3, которая, как доказано выше, плотна в H. Поэтому подпространство совпадает с H, и (2.16) — базис Рисса в H. В силу (2.14)

$$\Big\| \sum{}' \widetilde{a}_{k,j} h_{(k,j)} \Big\| \geq (c_1^+ - c_3)\Big(\sum{}' |\widetilde{a}_{k,j}|^2 \Big)^{1/2}. \tag{2.17}$$

Штрих указывает на то, что суммирование производится по всем $k \in \mathcal{N} \cap (|k| \geq N)$ и $j = 1,\dots,m$.

Итак, (2.16) — базис Рисса в H и имеет место (2.17). В этом случае каждая ω-независимая последовательность $\{f_{(k,j)}\}$, удовлетворяющая при некотором $d < c_1^+ - c_3$ условиям

$$\Big\| \sum{}' b_{k,j}(h_{(k,j)} - f_{(k,j)}) \Big\| \leq d\Big(\sum{}' |b_{k,j}|^2 \Big)^{1/2} < +\infty,$$

также будет базисом Рисса в H. Это известное в теории базисов Рисса утверждение легко доказываемо. ω-независимость $\{f_{(k,j)}\}$ означает, что из сходимости в H по норме к нулю ряда $\sum v_{k,j} f_{(k,j)}$ следует $v_{k,j} = 0\ \forall k, j$. Убедимся в том, что последовательность

$$\{f_{(k,j)} \equiv P_{\overline{\lambda}}^+ (Q^+)^{-1}(e(j)y_{(k)}),\ (k,j) \in \widetilde{\mathcal{N}}\} \tag{2.18}$$

удовлетворяет последним условиям. При этом, чтобы избежать громоздких записей, считаем, что в (2.13) $c(N) = 0$. Так как $\overline{\lambda}$ — несобственное значение для $P_{\overline{\lambda}}^+$ и Q^+ φ-стационарен, то (2.18) ω-независима. С другой стороны, в силу (2.13) имеем

$$\Big\| \sum{}' b_{k,j}(h_{(k,j)} - f_{(k,j)}) \Big\| = \Big\| \sum{}' b_{k,j}((Q^+)^{-1}P_{\overline{\lambda}}^+ - P_{\overline{\lambda}}^+(Q^+)^{-1})(e(j)y_{(k)}) \Big\| \leq c_3 \Big(\sum{}' |b_{k,j}|^2 \Big)^{1/2},$$

причем $c_3 < c_1^+ - c_3$, ибо $c_3 < c_1^+/2$. Таким образом, доказано, что (2.18) — базис Рисса в H. Однако (2.18) является частью последовательности $\{f_{(k,j)},\ k \in \mathcal{N},\ j = 1,\dots,m\}$, причем последняя сама ω-независима. Поэтому последовательность

$$\{P_{\overline{\lambda}}^+ (Q^+)^{-1}(e(j)y_{(k)}),\ \ k \in \mathcal{N},\ \ j = 1,\dots,m\} \tag{2.19}$$

— базис Рисса в H, т. е. $\overline{\lambda}$ — регулярное значение оператора $P_{\overline{\lambda}}^+$.

Так как $\widetilde{\mathcal{N}} = \{k \in \mathcal{N},\ j = 1,\dots,m\}$, то последовательность (2.15) — также базис Рисса в H. В этом случае биортогональная к (2.15) последовательность $\{h_{(k,j)}^*,\ k \in \mathcal{N},\ j = 1,\dots,m\}$ также является базисом Рисса в H. В силу биортогональности двух последних последовательностей и ортонормированности φ имеем

$$\langle J_3(e(j)y_{(k)}),\, h_{(p,\nu)}^* \rangle = \langle J_1^*(e(j)y_{(k)}),\, h_{(p,\nu)}^* \rangle = \langle h_{(k,j)},\, h_{(p,\nu)}^* \rangle = \langle e(j)y_{(k)},\, e(\nu)y_{(p)} \rangle = \langle e(j)y_{(k)},\, J_3^* h_{(p,\nu)}^* \rangle.$$

Отсюда следует $J_3^* h_{(p,\nu)}^* = e(\nu)y_{(p)}$. Ранее было доказано, что $J_3 = J_1^*$. Поэтому $J_3^* = J_1$, $J_1 h_{(p,\nu)}^* = e(\nu)y_{(p)}$, т. е. область значений оператора J_1 плотна в H, и оператор J_1 взаимно непрерывен. Следовательно, он отображает H на H. В частности, существуют такие числа $a_{k,j}$, что

$$f(x) = \sum_{k,j} a_{k,j} P_\lambda Q^{-1}(e(j)y_{(k)}) \equiv \sum P_\lambda(b_k y_{(k)}), \quad b_k = (q(k))^{-1} a_k, \quad a_k = \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,m} \end{pmatrix},$$

и ряд сходится в H но норме. А это означает, что задача (1), (2) имеет φ-решение для каждой $f(x)$. Так как оператор J_1 имеет непрерывный обратный, то

$$\Big(\sum |a_{k,j}|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum |q(k)b_k|^2\Big)^{1/2} \le \|J_1\| \, \|f(x)\|,$$

т. е. φ-решение непрерывно зависит от $f(x)$, и λ — регулярное значение оператора P_λ. $\square$

Замечание 2.1. Если задача (1), (2) имеет φ-решение и $\widetilde{Q}$ — φ-стационарный, взаимно однозначный оператор, то уравнение $[(P(x, \partial/\partial x) - \lambda E)\widetilde{Q}]w = f(x)$ имеет φ-решение. Если бы мы ограничились обобщенными решениями, то последнее утверждение было бы ошибочным.

Литература

1. Егоров Ю.В. *Линейные дифференциальные уравнения главного типа.* – М.: Наука, 1984. – 359 с.
2. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* Т. I. *Теория распределений и анализ Фурье.* – М.: Мир, 1986. – 462 с.
3. Мокейчев В.С. *Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами.* – Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 222 с.
4. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы.* Т. 2. *Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.* – М.: Мир, 1966. — 1063 с.
5. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. *Уравнения с частными производными.* – М.: Мир, 1966. – 357 с.
6. Дезин А.А. *Общие вопросы теории граничных задач.* – М.: Наука, 1980. – 207 с.
7. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1981. – 512 с.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1974. – 224 с.

Казанский государственный университет

Поступила 18.03.1996