ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 517.518

В.П. СКЛЯРОВ

О НОРМЕ МИНИМАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОЕКТОРА В $C[0,\infty)$

Будем определять норму в $C[0,\infty)$ равенством
$$\|F\| = \sup_{x\ge 0} x^{\alpha/2}|F(x)|e^{-x/2}.$$
Параметр α здесь фиксирован и $\alpha \ge 0$. Пусть P_n — множество алгебраических многочленов степени не выше n, а U_n — совокупность линейных ограниченных операторов, отображающих $C[0,\infty)$ в P_n так, что $Tp = p$, если $T \in U_n$ и $p \in P_n$. Положим
$$M_n = \inf_{T\in U_n} \|T\|.$$
Вероятно, первая попытка оценить скорость роста M_n была сделана в [1]. Из результатов данной работы следует, что при любом $\alpha \ge 0$ верно неравенство
$$M_n \le Cn^{1/6}.$$
Однако с помощью [2] легко заметить, что при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1/2$ верхняя граница для M_n может быть уменьшена до величины порядка $\ln n$. Ниже будет показано, что это можно сделать при любом $\alpha \ge 0$. Введем обозначения
$$e_n = \inf_{q\in P_{n-1}} \|x^n - q(x)\|, \quad L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}), \quad \alpha < -1;$$
$$d(n,\alpha) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}[L_n^\alpha(x)]^2dx = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)};$$
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad u_n(x,\alpha) = d^{-1/2}(n,\alpha)x^{\alpha+1/2}e^{-x^2/2}L_n^\alpha(x^2).$$
Равенства вида $A_{n,\nu} = O(a_n)$ будем использовать тогда и только тогда, когда имеет место двусторонняя оценка $c_1a_n \le A_{n,\nu} \le c_2a_n$ с константами c_1, c_2, не зависящими от n и ν. Штрих везде далее используется для обозначения производной по переменной x, при этом там, где это не может вызвать недоразумений, параметр α в списке аргументов будем опускать. Пусть x_ν, s_ν — положительные нули функций $u_n(x)$ и $u_n'(x)$, занумерованные в порядке возрастания. Очевидно, $0 < s_1 < x_1 < s_2 < x_2 < \dots < x_n < s_{n+1}$. Пусть точки $t_\nu \in [s_\nu, s_{\nu+1}]$ выбраны так, что имеют место равенства
$$|u_n''(t_\nu)| = \begin{cases} \max\limits_{s_\nu\le x\le s_{n+1}} |u_n''(x)|, & \nu = 1,2,\dots,n; \\ \max\limits_{s_{n+1}\le x\le x_{n+1}} |u_n''(x)|, & \nu = n+1,\ t_{n+1} \in [s_{n+1}, x_{n+1}]. \end{cases}$$
Здесь x_{n+1} — наибольший корень уравнения $p(x) = \lambda_n - x^2 - (\alpha^2 - \frac14)/x^2 = 0$, $\lambda_n = 4n + 2\alpha + 2$. Числа s^* и x^* определим равенствами
$$|u_n(s^*, \alpha - 1/2)| = \max_\nu |u_n(s_\nu, \alpha - 1/2)|, \qquad |u_n'(x^*, \alpha + 1/2)| = \max_\nu |u_n'(x_\nu, \alpha + 1/2)|,$$
где $s_\nu = s_\nu(n, \alpha - 1/2)$, $x_\nu = x_\nu(n-1, \alpha + 1/2)$. Основные результаты этой работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Наименьшее по порядку уклонение от нуля в пространстве $C[0,\infty)$ достигается на многочлене*

$$Q_n(x) = (n-1)!\{(n+\alpha-x)L_{n-1}^{\alpha+1/2}(x) - (n+\alpha-1)L_{n-2}^{\alpha+1/2}(x)\},$$

при этом $e_n = O(n!n^{\frac{\alpha-1}{2}})$.

Теорема 2. *Пусть $L_n[F]$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный для функции $F(x)$ по нулям многочлена, указанного в теореме 1. Если $L_n[F]$ рассматривать как оператор, действующий из $C[0,\infty]$ в $C[0,\infty]$, то для его нормы справедливо равенство $\|L_n\| = O(\ln n)$.*

Прежде чем доказывать эти утверждения, убедимся в справедливости следующих лемм.

Лемма 1. 1. *При $|\alpha| > \frac{1}{2}$ величины $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$, $\frac{s_{\nu+1}}{s_\nu}$ лежат на отрезке вида $[1, c_5]$.*

2. *Если $x_\nu \ge \alpha_0 = \sqrt[4]{\max\{0, \alpha^2 - 1/4\}}$, то разность $x_{\nu+1} - x_\nu$ возрастает вместе с номером ν.*

3. *При любом фиксированном числе ω для $x_{\nu+1} \le \omega$ имеют место равенства $x_{\nu+1} - x_\nu = O(n^{-1/2})$, а $x_{n+1} - x_n = O(n^{-1/6})$ и $x_n - x_{n-1} = O(n^{-1/6})$.*

4. *Величины $|u_n(s_\nu)|$ растут вместе с номером ν, если $s_\nu \ge \alpha_0$, и убывают при $s_\nu < \alpha_0$, при этом $|u_n(s_\nu)| = O(n^{-1/4})$, если $s_\nu \le \omega$.*

5. *Величины $|u_n'(x_\nu)|$ убывают вместе с номером ν, если $x_\nu \ge \alpha_0$, и возрастают при $x_\nu < \alpha_0$.*

6. *При $|\alpha| > 1/2$ имеет место неравенство $0 < c_6 \le |\frac{u_n'(x_\nu)}{u_n'(x_{\nu+1})}| \le c_7$.*

7. $|u_n'(x_\nu)| \le |u_n''(t_\nu)|(x_\nu - s_\nu)$, *здесь* $|u_n''(t_\nu)| = \max\limits_{s_\nu \le x \le x_\nu} |u_n''(x)|$.

8. *При $|\alpha| > 1/2$ имеет место неравенство $0 < c_8 \le |\frac{u_n''(s_\nu)}{u_n''(s_{\nu+1})}| \le c_9$.*

9. *Если $|\alpha| > 1/2$, то $1 \le |\frac{u_n''(t_\nu)}{u_n''(s_\nu)}| \le c_{10}$.*

Здесь и далее константы c_i не зависят ни от n, ни от ν.

Доказательство. Вначале заметим, что $u_n(x)$ есть решение дифференциального уравнения ([3], 5.1.2, с. 109)

$$u''(x) + p(x)u(x) = 0. \tag{1}$$

Если положить $\mu_n = (\alpha^2 - 1/4)^{1/2}\lambda_n^{-1/2}$, то все значения $p(x)$ на отрезке $[0, \mu_n]$ будут отрицательными, поэтому точка первого экстремума функции $u_n(x) - s_1$ лежит правее μ_n, и все числа $p(s_\nu)$ одного знака. Ограниченность отношений $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$ следует из оценок для нулей многочленов Лагерра ([3], 6.31.11, с. 138). Очевидное неравенство $\frac{s_{\nu+1}}{s_\nu} \le \frac{x_{\nu+1}}{x_{\nu-1}}$ доказывает вторую часть утверждения п. 1 для $\nu = 2, 3, \ldots, n$. То же самое для $\nu = 1$ получаем из оценки $\frac{s_2}{s_1} \le \frac{x_2}{\mu_n}$. Пункт 2 леммы есть результат применения теоремы 1.82.2 из ([3], с. 33) к уравнению (1). Первая часть п. 3 следует из асимптотической формулы ([3], 8.22.4, с. 206)

$$x^{\alpha/2}e^{-x/2}L_n^\alpha(x) = \left(\frac{\lambda_n}{4}\right)^{-\alpha/2}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}J_\alpha([\lambda_n x]^{1/2}) + \varepsilon_n(x), \tag{2}$$

где

$$|\varepsilon_n(x)| \le c_3\begin{cases} x^{5/4}n^{\alpha/2-3/4}, & c_4 n^{-1} \le x \le \omega; \\ x^{\alpha/2+2}n^{\alpha-3/4}, & 0 < x \le c_4 n^{-1}, \end{cases}$$

а вторая часть есть следствие асимптотических формул для больших нулей ([3], 6.32.4, с. 141). Пункт 4 получаем применением теоремы Сонина к уравнению (1), а п. 5 — интегрированием очевидного тождества

$$\{[u_n'(x)]^2\}' + p(x)\{u_n^2(x)\}^2 = 0 \tag{3}$$

по отрезку $[x_\nu, x_{\nu+1}]$. Для доказательства п. 6 заметим, что величины $x_\nu^{-\alpha-3/2}|u_n'(x_\nu)|$ убывают с ростом ν. Это проверяется так же, как и п. 5, поскольку $x_\nu^{-\alpha-3/2}|u_n'(x_\nu)| = z'(x_\nu)$, где $z(x) = d^{-1/2}(n,\alpha)e^{-x/2}L_n^\alpha(x)$ есть решение уравнения

$$z''(x) + \frac{\alpha+1}{x}z'(x) + \left(\frac{\lambda_n}{4x} - \frac{1}{4}\right)z(x) = 0.$$

Пункт 6 эквивалентен наличию двух оценок вида

$$c_{11} \le \left|\frac{u_n'(x_\nu)}{u_n'(x_{\nu+1})}\right|, \quad \left|\frac{u_n'(x_{\nu+1})}{u_n'(x_\nu)}\right| \le c_{12}.$$

Если $x_{\nu+1} \le \alpha_0$, то первая оценка следует из п. 5, а вторая вытекает из п. 1 и очевидного равенства

$$\left|\frac{u_n'(x_{\nu+1})}{u_n'(x_\nu)}\right| = \left(\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}}\right)^{-\alpha-3/2}\left|\frac{x_{\nu+1}^{-\alpha-3/2}u_n'(x_{\nu+1})}{x_\nu^{-\alpha-3/2}u_n'(x_\nu)}\right|.$$

При $x_\nu \ge \alpha_0$ вторая оценка становится очевидной, а для получения первой находим из (3)

$$[u_n'(x)]^2 = 2\int_{x_\nu}^\infty \left(x - \frac{\alpha^2-1/4}{x^3}\right)u_n^2(x)dx, \quad \left[\frac{u_n'(x_{\nu+1})}{u_n'(x_\nu)}\right]^2 \le 1 + \frac{\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}\left(x - \frac{\alpha^2-1/4}{x^3}\right)u_n^2(x)dx}{\int\limits_{x_{\nu+1}}^{x_{n+1}}\left(x - \frac{\alpha^2-1/4}{x^3}\right)u_n^2(x)dx}.$$

Используя выпуклость функции $u_n^2(x)$ на отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, получаем

$$\left[\frac{u_n'(x_{\nu+1})}{u_n'(x_\nu)}\right]^2 \le 1 + 2\frac{x_{\nu+1}-x_\nu}{x_{n+1}-x_{\nu+1}} \le 1 + 2\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1}-x_n} \le c_{13}.$$

Если же $\alpha_0 \in (x_\nu, x_{\nu+1})$, то, повторяя предыдущие выкладки, нетрудно придти к неравенству

$$\left|\left[\frac{u_n'(x_{\nu+1})}{u_n'(x_\nu)}\right]^2 - 1\right| \le c_{14}n^{-1/2}.$$

Таким образом, п. 6 доказан. Пункт 7 — следствие теоремы Лагранжа, а для доказательства п. 8, проинтегрировав (3) по отрезку $[s_\nu, s_{\nu+1}]$, получим

$$p(s_{\nu+1})u_n^2(s_{\nu+1}) - p(s_\nu)u_n^2(s_\nu) = -2\int_{s_\nu}^{s_{\nu+1}}\left(x - \frac{\alpha^2-1/4}{x^3}\right)u_n^2(x)dx.$$

Следовательно, $p(s_\nu)u_n^2(s_\nu)$ возрастает с ростом номера ν, если $s_{\nu+1} \le \alpha_0$, и убывает — в противном случае. Поэтому при $s_\nu \ge \alpha_0$ имеем

$$1 \le \left(\frac{p(s_\nu)}{p(s_{\nu+1})}\right)^{1/2}\left|\frac{u_n(s_\nu)}{u_n(s_{\nu+1})}\right| \le \left|\frac{u_n''(s_\nu)}{u_n''(s_{\nu+1})}\right| = \frac{p(s_\nu)|u_n(s_\nu)|}{p(s_{\nu+1})|u_n(s_{\nu+1})|} \le \frac{p(s_\nu)}{p(s_{\nu+1})}. \tag{4}$$

Поскольку в этом случае $p(s)$ убывает, а $|p'(s)|$ возрастает, то

$$\frac{p(s_\nu)}{p(s_{\nu+1})} \le 1 + \frac{p'(s_{\nu+1})(s_{\nu+1}-s_\nu)}{p(s_{\nu+1})} \le 1 + 2\frac{x_{\nu+1}(x_{\nu+1}-x_{\nu-1})}{p(s_{\nu+1})}.$$

Это приводит к неравенству

$$\frac{p(s_\nu)}{p(s_{\nu+1})} \le 1 + 2\frac{x_{n+1}(x_{n+1}-x_{n-1})}{p(s_{n+1})}.$$

В том, что $x_{n+1} - s_{n+1} = O(n^{-1/6})$, можно убедиться так же, как это делалось при оценке аналогичной величины в ([2], с. 59). Поскольку $x_{n+1}^2 < \lambda_n$, то

$$p(s_{n+1}) \ge x_{n+1}^2 - s_{n+1}^2 - \frac{\alpha^2-1/4}{s_{n+1}^2} \ge c_{15}n^{1/3}.$$

Учитывая, что $x_{\nu+1}(x_{\nu+1}-x_{\nu-1})=O(n^{1/3})$, получаем $\frac{p(s_\nu)}{p(s_{\nu+1})}\le c_{16}$. Если $s_{\nu+1}\le\alpha_0$, то функция $p(s)$ возрастает, поэтому

$$\frac{p(s_\nu)}{p(s_{\nu+1})}\le 1,\quad \frac{p(s_{\nu+1})}{p(s_\nu)}\le 1+2\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)\frac{s_{\nu+1}-s_\nu}{s_\nu^3 p(s_\nu)}.$$

Функция $s^2p(s)$ возрастает на отрезке $[0,\sqrt{\lambda_n/2}]$, поэтому

$$\frac{p(s_\nu)}{p(s_{\nu+1})}\le 1,\quad \frac{p(s_{\nu+1})}{p(s_\nu)}\le 1+2\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)\frac{s_{\nu+1}-s_\nu}{s_1^3 p(s_1)}\le 1+c_{17}\frac{n^{-1/2}}{s_1^3(\lambda_n-s_1^2)}\le c_{18}.$$

Если $\alpha_0\in(s_\nu,s_{\nu+1})$, то

$$\left|\frac{p(s_\nu)}{p(s_{\nu+1})}-1\right|\le\frac{|p'(\xi)|(s_{\nu+1}-s_\nu)}{p(s_{\nu+1})}\le c_{19}n^{-3/2},$$

а равенство

$$p(s_\nu)u_n^2(s_\nu)=2\int_{s_\nu}^{\infty}\left(x-\frac{\alpha^2-1/4}{x^3}\right)u_n^2(x)dx,$$

полученное интегрированием (3) по промежутку $[s_\nu,\infty]$, точно так же, как при доказательстве п. 6, влечет оценку

$$\left|\frac{p(s_\nu)u_n^2(s_\nu)}{p(s_{\nu+1})u_n^2(s_{\nu+1})}-1\right|\le c_{20}n^{-1/2}.$$

Все это вместе с (4) дает неравенство

$$\left|\left|\frac{u_n''(s_\nu)}{u_n''(s_{\nu+1})}\right|-1\right|\le c_{21}n^{-1/2}.$$

Этим завершено доказательство п. 8. Для доказательства п. 9 заметим, что на отрезке $[s_{n+1},x_{n+1}]$ функция $|u_n''(x)|=p(x)|u_n(x)|$ убывает, следовательно, $t_{n+1}=s_{n+1}$, а при $\nu=1,2,\dots,n$ имеем

$$\left|\frac{u_n''(t_\nu)}{u_n''(s_\nu)}\right|\le\begin{cases}(p(s_\nu)/p(s_{\nu+1}))^{1/2} & ,s_\nu\ge\alpha_0,\\ p(s_{\nu+1})/p(s_\nu) & ,s_\nu\le\alpha_0.\end{cases}\qquad\square$$

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$n!d^{1/2}(n,\alpha-1/2)|u_n(s^*,\alpha-1/2)|\le e_n\le(n-1)!d^{1/2}(n-1,\alpha+1/2)|u_{n-1}'(x^*,\alpha+1/2)|.\qquad(5)$$

Доказательство. Это утверждение легко следует из теоремы Валле-Пуссена [4] и пп. 4, 5 леммы 1.

Доказательство теоремы 1. Из пп. 3, 4, 5 леммы 1 следует, что

$$s^*=\sqrt[4]{\max\{0,\alpha(\alpha-1)\}}+O(n^{-1/2}),\quad x^*=\sqrt[4]{\alpha(\alpha+1)}+O(n^{-1/2}).$$

Поэтому, воспользовавшись еще раз асимптотической формулой (2), находим, что обе части неравенства (5) суть величины одного порядка. Поскольку $n^{-\alpha/2}\Gamma(n+\alpha+1/2)=O(n!n^{-(\alpha-1)/2})$, то осталось заметить, что

$$Q_n(x)=x^{-\alpha/2}e^{x/2}u_{n-1}'(\sqrt{x},\alpha+1/2)(n-1)!d^{1/2}(n-1,\alpha+1/2),$$

и теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Нетрудно заметить, что узлами интерполирования в этом случае служат числа s_ν^2, а s_ν — положительные нули функции $u_{n-1}'(x,\alpha+1/2)$. При этом $\|L_n\|=\max\limits_{x\ge0}\lambda_n(x)$, где

$$\lambda_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{x}{s_\nu^2}\right)^{\alpha/2}e^{-(x-s_\nu^2)/2}\left|\prod_{i\ne\nu}\frac{x-s_i^2}{s_\nu^2-s_i^2}\right|.$$

Отсюда находим
$$\lambda_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{2s_\nu u'_{n-1}(x)}{u''_{n-1}(s_\nu)(x^2-s_\nu^2)}\right|\le 2\sum_{\nu=1}^{n}|l_\nu(x)|:=2\Lambda_n(x).$$
Здесь
$$l_n(x)=\frac{u'_{n-1}(x)}{u''_{n-1}(s_\nu)(x-s_\nu)}.$$
Оценим сверху $\Lambda_n(x)$, предполагая вначале, что $x>s_n$. Поскольку при $\alpha=0,1/2$ утверждение теоремы следует из результатов работы [2], то везде далее считаем, что $\alpha>0$. Для этого случая легко заметить, что $|l_{n-2}(x)|\le|l_{n-1}(x)|\le|l_n(x)|$, т.к. величины $|u''_{n-1}(s_\nu)|$ убывают с ростом ν (см. доказательство п. 8 леммы 1). Поэтому
$$\Lambda_n(x)\le 3+\sum_{\nu=1}^{n-3}\left|\frac{u'_{n-1}(x_n)(s_{\nu+1}-s_\nu)}{u''_{n-1}(s_\nu)(s_{\nu+1}-s_\nu)(x_n-s_\nu)}\right|\le 3+c_{22}\sum_{\nu=1}^{n-3}\left|\frac{u'_{n-1}(x_n)(s_{\nu+1}-s_\nu)}{u'_{n-1}(x_\nu)(x_n-s_\nu)}\right|\le$$
$$\le 3+c_{22}\sum_{\nu=1}^{n-3}\frac{s_{\nu+1}-s_\nu}{x_n-s_\nu}\le c_{23}\int_{s_1}^{x_{n-2}}\frac{ds}{x_n-s}\le c_{24}\ln n.$$
Если $x\in[s_p,s_{p+1}]$, то представим $\Lambda_n(x)$ в виде
$$\Lambda_n(x)=\sum_{\nu=1}^{p-4}+\sum_{\nu=p-3}^{p+5}+\sum_{\nu=p+6}^{n}:=I_1+I_2+I_3. \tag{6}$$
Оценку для I_1 получаем так же, как в предыдущем случае, а во второй сумме легко оценить каждое слагаемое
$$|l_n(x)|\le c_{25}\left|\frac{u''_{n-1}(s_{p-3})}{u''_{n-1}(s_{p+5})}\right|\le c_{26}.$$
С помощью теоремы Лагранжа замечаем, что если $x\in[s_\nu,x_\nu]$, то
$$|u'_{n-1}(x)|\le|u''_{n-1}(t_\nu)|(x_\nu-x_{\nu-1}),$$
если же $x\in[x_\nu,s_{\nu+1}]$, то
$$|u'_{n-1}(x)|\le|u''_{n-1}(t_\nu)|(x_{\nu+1}-x_\nu).$$
Отсюда находим, используя пп. 2, 3, 8, 9 леммы 1,
$$|u'_{n-1}(x_\nu)|\le c_{27}|u''_{n-1}(s_{\nu+1})|(x_{\nu+1}-x_\nu).$$
Вернемся к оценке I_3 в (6)
$$I_3\le c_{28}\sum_{\nu=p+6}^{n}\left|\frac{u'_{n-1}(x_p)}{u''_{n-1}(s_{\nu-2})(x_{\nu-1}-s_{p+1})}\right|\le c_{29}\sum_{\nu=p+6}^{n}\frac{(\lambda_n-x_{p+1}^2)(x_{p+1}-x_p)}{(\lambda_n-s_{\nu-2}^2-\alpha(\alpha+1)/s_{\nu-2}^2)(x_{\nu-1}-s_{p+1})}\le$$
$$\le c_{29}\sum_{\nu=p+5}^{n-1}\left\{\frac{(\lambda_n-x_\nu^2)(x_{p+1}-x_p)}{(\lambda_n-s_{\nu-1}^2-\alpha(\alpha+1)/s_{\nu-1}^2)(x_\nu-s_{p+1})}+\frac{(x_\nu^2-x_{p+1}^2)(x_{p+1}-x_p)}{(\lambda_n-s_{\nu-1}^2-\alpha(\alpha+1)/s_{\nu-1}^2)(x_\nu-s_{p+1})}\right\}.$$
Нетрудно заметить, что величины $s_\nu^2(\lambda_n-s_\nu^2)$ ограничены снизу константой, которая зависит разве что от α и не зависит ни от ν, ни от n,
$$s_\nu^2(\lambda_n-s_\nu^2)\ge\min\{x_3^2(\lambda_n-x_4^2);\ x_{n-2}^2(\lambda_n-x_n^2)\}.$$
Вторая величина под знаком минимума имеет порядок $n^{4/3}$, а для первой, используя асимптотические формулы для нулей многочленов Лагерра ([5], 22.16.8, с. 594), имеем $\lim\limits_{n\to\infty}x_3^2(\lambda_n-x_4^2)=j^2_{\alpha+1/2,3}$. Здесь $j_{\alpha,3}$ — третий положительный нуль функции Бесселя $J_\alpha(x)$. Теоремы Штурма и дифференциальное уравнение для функций Бесселя ([3], 1.8.9, с. 31) приводят к неравенствам

$j_{\alpha,1}^2 \geq \alpha^2 - 1/4$, $j_{\alpha+1/2,3}^2 \geq \alpha(\alpha+1) + \pi/2$. Таким образом, при достаточно большом n имеет место оценка

$$\lambda_n - s_\nu^2 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{s_\nu^2} \geq (\lambda_n - s_\nu^2)\frac{\pi/4}{\alpha(\alpha+1)+\pi/2} \geq \frac{1}{2}(\lambda_n - s_\nu^2).$$

Продолжаем оценивать

$$I_3 \leq 2c_{29}\left\{ \sum_{\nu=p+5}^{n-1} \frac{x_{p+1}-x_p}{x_\nu - s_{p+1}} + \sum_{\nu=p+5}^{n-1} \frac{(x_\nu^2 - x_{p+1}^2)(x_{p+1}-x_p)}{(\lambda_n - x_\nu^2)(x_\nu - s_{p+1})} \right\} \leq 2c_{29}\left\{ \sum_{\nu=p+5}^{n-1} \frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{x_\nu - s_{p+1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=p+5}^{n-1} \frac{x_{\nu+1}-x_\nu}{x_n - x_\nu} \right\} \leq c_{30}\left\{ \ln\frac{x_n - s_{p+1}}{s_{p+4}-s_{p+1}} + \ln\frac{x_n - x_{p+5}}{x_n - x_{n-1}} \right\} \leq c_{31}\ln n.$$

И, наконец, в последнем случае $x \in [0, s_1]$. Вместо (6) используем разбиение

$$\Lambda_n(x) = \sum_{\nu=1}^{p+5} + \sum_{\nu=p+6}^{n} := I_4 + I_5.$$

Легко заметить, что оценка I_5 совпадает с оценкой I_3 в предыдущем случае, а при $x \in [0, s_1]$ $|l_5(x)| \leq |l_4(x)| \leq |l_3(x)|\,|l_2(x)|\,|l_1(x)|$, поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что величина

$$\max_{0\leq x\leq s_2} |l_1(x)| = |l_1(t^*)|$$

не растет с ростом номера n. Из определения $l_1(x)$ и уравнения (1) нетрудно получить дифференциальное уравнение

$$(x-s_1)l_1''(x) + \left[2 - \frac{p'(x)}{p(x)}(x-s_1)\right]l_1'(x) + \left[(x-s_1)p(x) - \frac{p'(x)}{p(x)}\right]l_1(x) = 0.$$

Выполнив в нем подстановку $x = s_1$, находим

$$2l_1'(x) = p'(s_1)/p(s_1) > 0.$$

Таким образом, точка t^* лежит правее s_1, поэтому

$$|l_1'(t^*)| \leq u''(t_1)/u''(s_1) \leq c_{32}.$$

Легко проверяемое неравенство $\|L_n\| \geq \lambda_n(x_1^2) \geq c_{33}\ln n$ теперь позволяет утверждать, что $\|L_n\| = O(\ln n)$.

Можно показать, что если в роли узлов интерполирования выступают нули многочленов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ или $L_n^{\alpha+1/2}(x)$, то нормы операторов L_n в этом случае растут соответственно как $\sqrt{n}$ и $\sqrt[6]{n}$.

Литература

1. Görlich E., Markett G. *Projections with norms smaller than those of the ultraspherical and Laguerre partial sums* // Funct. Anal. and Approximat. Proc. Conf. Oberwolfach, Aug. 9–16, 1980. Basel e.a., 1981. – P. 189–202.
2. Скляров В.П. *О выборе узлов интерполирования в пространстве* $C(-\infty,\infty)$ // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 11. – С. 57–61.
3. Сегё Г. *Ортогональные многочлены.* – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
4. Дзядык В.К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* – М.: Наука, 1975. – 511 с.
5. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям.* – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Саратовский государственный университет

Поступила 05.01.1995