*Известия вузов. Математика*
*2016, №11, с. 14–26*

*http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
*e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*С.В. КОРНЕВ*

# МНОГОЛИСТНЫЕ НАПРАВЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

*Аннотация.* Предлагается использовать многолистную направляющую функцию для исследования периодических решений некоторых классов дифференциальных включений. А именно рассматривается периодическая задача для нелинейных систем, описываемых дифференциальными включениями как с выпуклозначной правой частью, так и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений. К числу последних относятся дифференциальные включения с нормальной правой частью. Заметим, что класс нормальных мультиотображений достаточно широк. В него входят, например, ограниченные почти полунепрерывные снизу мультиотображения с компактными значениями.

*Ключевые слова*: дифференциальное включение, периодическая задача, многолистная направляющая функция, топологическая степень.

*УДК*: 517.911

**Введение.** Основы метода направляющих функций заложили работы М.А. Красносельского и А.И. Перова (например, [1]–[3]). Одним из самых существенных направлений его развития на случай дифференциальных уравнений стал метод многолистных векторных направляющих функций Д.И. Рачинского (например, [4], [5]).

Хорошо известно, что применение методов теории топологической степени к решению различных задач нелинейного анализа и теории дифференциальных уравнений весьма эффективно [1], [2], [6]–[10].

Распространению классического метода направляющих потенциалов, в том чисел и его негладкого аналога, на случай дифференциальных включений и его использованию для исследования их периодических решений посвящен целый ряд работ (например, [6], [8], [11], [12]).

Различные модификации метода многолистных векторных направляющих функций применялись в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений только в случае выпуклозначной правой части [13]–[15].

В данной работе, развивая подход, предложенный в [11], предлагается использовать многолистную векторную направляющую функцию для исследования задачи о существовании

---

Поступила 22.03.2015

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00468), гранты №№ 16-01-00386, 14-01-92004 Тайвань, Министерства образования и науки России в рамках базовой части госзадания (проект № 3488) и Российского научного фонда (проект № 14-21-00066).

периодических решений некоторых классов дифференциальных включений. А именно рассматривается периодическая задача для нелинейных систем, описываемых дифференциальными включениями как с выпуклозначной правой частью, так и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений. К числу последних относятся дифференциальные включения с нормальной правой частью. Заметим, что класс нормальных мультиотображений достаточно обширен. В него входят, например, ограниченные почти полунепрерывные снизу мультиотображения с компактными значениями.

**1. Предварительные сведения.** В дальнейшем используются известные понятия и терминология из анализа и теории многозначных отображений (мультиотображений) [6], [16]–[18]. Напомним некоторые из них.

Пусть $E$ – сепарабельное банахово пространство, $L^1([a,b];E)$ обозначает банахово пространство суммируемых по Бохнеру функций $f:[a,b]\to E$.

**Определение 1.** Непустое множество $M\subset L^1([a,b];E)$ называется разложимым, если для любых $f,g\in M$ и любого измеримого по Лебегу множества $m\subset[a,b]$ выполнено $f\varkappa_m+g\varkappa_{([a,b]\setminus m)}\in M$, где $\varkappa_m$ — характеристическая функция множества $m$.

Пусть $(X,d_X)$ и $(Y,d_Y)$ — метрические пространства. Символами $P(Y)$, $C(Y)$ и $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых и компактных подмножеств пространства $Y$. Если $Y$ – нормированное пространство, то символами $Cv(Y)$ и $Kv(Y)$ обозначаются совокупности всех непустых выпуклых замкнутых и, соответственно, компактных подмножеств пространства $Y$.

**Определение 2.** Мультиотображение $F:X\to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке $x_0\in X$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что из того, что $d_X(x_0,x)<\delta$ следует, что $F(x)\subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ $U_\varepsilon$ обозначает $\varepsilon$-окрестность множества.

**Определение 3.** Мультиотображение $F:X\to P(Y)$ называется пн. св., если оно пн. св. в каждой точке $x\in X$.

**Определение 4.** Мультиотображение $F:X\to P(Y)$ называется полунепрерывным снизу (пн. сн.) в точке $x_0\in X$, если для любого открытого множества $V\subset Y$ такого, что $F(x_0)\cap V\neq\varnothing$, существует окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$ такая, что $F(x')\cap V\neq\varnothing$ для любого $x'\in U(x_0)$.

**Определение 5.** Мультиотображение $F:X\to P(Y)$ называется пн. сн., если оно пн. сн. в каждой точке $x\in X$.

**Определение 6.** Если мультиотображение $F$ полунепрерывно и сверху и снизу, то оно называется непрерывным.

**Определение 7.** Пусть $F:X\to P(Y)$ — некоторое мультиотображение. Множество $\Gamma_F$ в декартовом произведении $X\times Y$,

$$\Gamma_F=\{(x,y)\mid (x,y)\in X\times Y,\ \ y\in F(x)\}$$

называется графиком мультиотображения $F$.

**Определение 8.** Мультиотображение $F:X\to P(Y)$ называется замкнутым, если его график $\Gamma_F$ есть замкнутое множество в пространстве $X\times Y$.

Мультиотображение будем называть мультифункцией, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

**Определение 9.** Однозначное отображение $f : X \to Y$ называется сечением мультиотображения $F$, если

$$f(x) \in F(x) \ \text{ для каждого } \ x \in X.$$

В дальнейшем будет использоваться теорема Брессана–Коломбо–Фрышковского о непрерывном сечении [17], [19].

**Лемма 1.** *Пусть $X$ – сепарабельное метрическое пространство. Тогда любое пн. сн. мультиотображение $F : X \multimap L^1([a,b];E)$ с замкнутыми разложимыми значениями имеет непрерывное сечение.*

**Определение 10.** Пусть $F : X \to P(Y)$ – некоторое мультиотображение. Непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$, где $\varepsilon > 0$, называется $\varepsilon$-аппроксимацией мультиотображения $F$, если для каждого $x \in X$ найдется $x' \in X$ такое, что $d_X(x, x') < \varepsilon$ и $f_\varepsilon(x) \in U_\varepsilon(F(x'))$, где $\mathrm{U}_\varepsilon$ обозначает $\varepsilon$-окрестность множества.

Ясно, что это понятие может быть равносильно выражено условием $f_\varepsilon(x) \in U_\varepsilon(F(B_\varepsilon(x)))$ для всех $x \in X$ или $\Gamma_{f_\varepsilon} \subset U_\varepsilon(\Gamma_F)$, где $\Gamma_{f_\varepsilon}, \Gamma_F$ — графики отображений $f_\varepsilon$ и $F$ соответственно, а $B_\varepsilon$ обозначает $\varepsilon$-окрестность точки $x$.

**Лемма 2** ([6]). *Пусть $X$ — метрическое пространство, $Y$ — нормированное пространство. Всякое пн. св. мультиотображение $F : X \to Cv(Y)$ для любого $\varepsilon > 0$ обладает $\varepsilon$-аппроксимацией $f_\varepsilon : X \to Y$ такой, что $f_\varepsilon(X) \subset \mathrm{co}\, F(X)$.*

Пусть $I$ — замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

**Определение 11.** Мультифункция $F : I \to K(Y)$ называется измеримой, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз

$$F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$$

является измеримым подмножеством $I$.

**Замечание 1.** Всякая пн. сн. мультифункция измерима.

**Замечание 2.** Всякая измеримая мультифункция $F : I \to K(Y)$ обладает измеримым сечением, т. е. существует такая измеримая функция $f : I \to Y$, что $f(t) \in F(t)$ для почти всех (п. в.) $t \in I$.

**Определение 12.** Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ называется почти пн. сн., если существует последовательность непересекающихся компактных множеств $\{I_n\}$, $I_n \subseteq I$, таких, что

(i) $\mu(I \setminus \bigcup\limits_n I_n) = 0$, где $\mu$ — мера Лебега,

(ii) сужение $F$ на каждое множество $J_n = I_n \times Y$ является пн. сн. мультиотображением.

**Определение 13.** Говорят, что мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ удовлетворяет верхним (нижним) условиям Каратеодори, если

(i) для каждого $x \in X$ мультифункция $F(\cdot, x) : I \to K(Y)$ измерима,

(ii) почти для каждого $t \in I$ мультиотображение $F(t, \cdot) : X \to K(Y)$ пн. св. (пн. сн.).

**Определение 14.** Если мультиотображение $F$ удовлетворяет и верхним и нижним условиям Каратеодори, то оно называется удовлетворяющим условиям Каратеодори.

**Определение 15.** Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ удовлетворяет условию подлинейного роста, если существует положительная суммируемая по Лебегу на $I$ функция $\alpha(\cdot)$ такая, что для п. в. $t \in I$

$$\|F(t,x)\| := \max_{y \in F(t,x)} \|y\| \le \alpha(t)(1 + \|x\|).$$

**Определение 16.** Ограниченное мультиотображение $R : I \times \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ называется нормальным, если найдется мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, называемое квазисечением мультиотображения $R$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) мультиотображение $F$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста,

(ii) $F(t,x) \cap R(t,x) \neq \varnothing$ для всех $t \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$,

(iii) каждое решение $x : I \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения $x'(t) \in F(t, x(t))$ является также решением включения $x'(t) \in R(t, x(t))$.

**Замечание 3.** Всякое ограниченное мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста, является нормальным.

**Замечание 4** ([20])**.** Всякое ограниченное почти пн. сн. мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным. Кроме того, всякое ограниченное мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее условиям Каратеодори, является нормальным.

**Определение 17.** Множество $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ называется конусом, если $\mathcal{K}$ является непустым выпуклым замкнутым подмножеством пространства $\mathbb{R}^n$ таким, что

(i) если $x \in \mathcal{K}$, $\lambda \ge 0$, то $\lambda x \in \mathcal{K}$,

(ii) $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{0\}$.

**Определение 18** ([8], [21])**.** Пусть $\mathcal{K}$ является конусом в $\mathbb{R}^n$, а $(Y, d_Y)$ — метрическим пространством. Отображение $f : \mathbb{R}^n \to Y$ называется $\mathcal{K}$-непрерывным в точке $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d_Y(f(x), f(\overline{x})) < \varepsilon$ для всех $x \in B(\overline{x}, \delta) \cap (\overline{x} + \mathcal{K})$.

**Определение 19.** Отображение $f$ называется $\mathcal{K}$-непрерывным на некотором множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, если оно $\mathcal{K}$-непрерывно в каждой точке $\overline{x} \in G$.

**Лемма 3** ([8], [21])**.** *Пусть $F : \mathbb{R}^n \to C(Y)$ является пн. сн. мультиотображением. Тогда для каждого конуса $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ мультиотображение $F$ допускает $\mathcal{K}$-непрерывное сечение.*

**2. Случай выпуклой правой части.** Будем рассматривать сначала периодическую задачу для дифференциального включения вида

$$z'(t) \in F(t, z(t)), \tag{1}$$

$$z(0) = z(T), \tag{2}$$

в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ пн. св. по совокупности переменных, удовлетворяет условию подлинейного роста и $T$-периодично ($T > 0$) по первому аргументу:

$$F(t, z) = F(t + T, z) \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}^n$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать мультиотображение $F$ заданным на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$).

Всюду в дальнейшем под решением задачи (1), (2) понимается абсолютно непрерывная функция $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая почти в каждой точке включению (1) и условию периодичности (2).

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть $q$ — оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = I - q$. Ниже элементы $\mathbb{R}^2$ обозначаются через $\xi$, элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ — через $\zeta$. Пусть $\varphi$, $\rho$ — полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим многолистную риманову поверхность

$$\Pi = \{(\varphi, \rho) : \varphi \in (-\infty, \infty),\ \rho \in (0, \infty)\}.$$

Пусть на $\Pi$ задана скалярная непрерывно дифференцируемая функция $W(\varphi, \rho)$, для которой

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho)}{\partial \varphi} > 0, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi, \tag{3}$$

$$W(\varphi + 2\pi, \rho) = W(\varphi, \rho) + 2\pi, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi. \tag{4}$$

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ задана скалярная непрерывно дифференцируемая функция $V(\zeta)$, удовлетворяющая условию коэрцитивности

$$\lim_{\|\zeta\| \to \infty} V(\zeta) = +\infty. \tag{5}$$

Для $0 \le \rho_1 < \rho_2$ и $\vartheta > \vartheta_0 = \min V(\zeta)$ выделим область

$$\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : V(pz) < \vartheta,\ \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\}.$$

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ такие, что для п. в. $t \in [0, T]$

$$\sup_{z \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \sup_{y \in F(t,z)} \langle \nabla W(qz), qy \rangle < \alpha(t), \tag{6}$$

$$\inf_{z \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \inf_{y \in F(t,z)} \langle \nabla W(qz), qy \rangle > \beta(t). \tag{7}$$

**Определение 20.** Пару функций $\{V(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (3)–(7), будем называть строгой многолистной векторной направляющей функцией (МВНФ) для включения (1) относительно области $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t \in [0,T]} \sup_{y \in F(t,z)} \frac{|\langle qy, qz \rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T}, \quad z \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2); \tag{8}$$

$$\langle \nabla V(pz), py \rangle < 0 \quad \text{для всех} \quad y \in F(t,z), \quad V(pz) \ge \vartheta, \quad \|qz\| \le \rho_2; \tag{9}$$

$$2\pi(N-1) < \int_0^T \alpha(\tau) d\tau, \quad \int_0^T \beta(\tau) d\tau < 2\pi N, \tag{10}$$

где $N$ — целое число, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — функции из (6), (7).

Для $\rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$ положим $G(\vartheta, \rho_0) = \{z \in \mathbb{R}^n : V(pz) < \vartheta,\ \|qz\| < \rho_0\}$.

**Теорема 1.** *Пусть для включения* (1) *можно указать строгую МВНФ относительно области* $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет по крайней мере одно решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}$, $t \in [0, T]$.

*Доказательство.* Построим для мультиотображения $F$ на компактном множестве $[0,T] \times \overline{G(\vartheta,\rho_2)}$ последовательность $\varepsilon_m$-аппроксимаций $f_{\varepsilon_m}$, т. е. отображений $f_{\varepsilon_m} : [0,T] \times \overline{G(\vartheta,\rho_2)} \to \mathbb{R}^n$, график каждого из которых содержится в $\varepsilon_m$-окрестности графика мультиотображения $F$ и область значений отображения $f_{\varepsilon_m}$ удовлетворяет соотношению

$$f_{\varepsilon_m}([0,T] \times \overline{G(\vartheta,\rho_2)}) \subset \operatorname{co} F([0,T] \times \overline{G(\vartheta,\rho_2)}). \tag{11}$$

Кроме того, из конструкции $\varepsilon_m$-аппроксимаций [6] нетрудно видеть, что без ущерба для общности можно считать $f_{\varepsilon_m}$ по первому аргументу $T$-периодичными. Отметим, что для каждого $\varepsilon_m$ выполнено $f_{\varepsilon_m}(t,z) \in \mathrm{U}_{\varepsilon_m}(F(B_{\varepsilon_m}(t,z)))$ для всех $(t,z) \in [0,T] \times \overline{G(\vartheta,\rho_2)}$, где $\mathrm{U}_{\varepsilon_m}$ обозначает $\varepsilon_m$-окрестность множества в $\mathbb{R}^n$, а $B_{\varepsilon_m}$ обозначает $\varepsilon_m$-окрестность точки $(t,z)$. Отсюда вытекает, что поскольку неравенства, задающие соотношения (6)–(10) являются строгими, то для достаточно малых $\varepsilon_m$ отображения $f_{\varepsilon_m}$ также удовлетворяют соотношениям (6)–(10).

Из результатов [5] вытекает, что каждое дифференциальное уравнение

$$z'(t) = f_{\varepsilon_m}(t, z(t))$$

обладает $T$-периодическим решением $z_m(\cdot)$ таким, что $z_m(t) \in \overline{G(\vartheta,\rho_0)}$, $t \in [0,T]$. Из соотношений (11) следует, что функции $z_m(\cdot)$ равностепенно непрерывны и, таким образом, без ущерба для общности можно считать, что последовательность функций $z_m(\cdot)$ сходится к функции $z(\cdot)$ такой, что

$$z(t) \in \overline{G(\vartheta,\rho_0)}, \quad t \in [0,T],$$

и которая является $T$-периодическим решением включения (1). □

Некоторое усиление условия (9) также позволяет обосновать принцип существования $T$-периодического решения.

**Определение 21.** Непрерывно дифференцируемая функция $V(\zeta)$ называется невырожденным потенциалом, если выполнено соотношение

$$\nabla V(\zeta) \neq 0 \ \text{ для всех } \ \zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : V(\zeta) \geq \vartheta.$$

Если функция $V(\zeta)$ является невырожденным потенциалом, то с помощью топологической степени отображений [1], [2] для нее естественным образом определяется топологический индекс на бесконечности $\operatorname{ind}(V,\infty)$.

**Определение 22.** Пару функций $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (3)–(7), назовем обобщенной МВНФ для включения (1) относительно области $\Omega\,(\vartheta,\rho_1,\rho_2)$, если функция $V(\zeta)$ является невырожденным потенциалом и, кроме условий (8) и (10), выполнено следующее условие:

$$\langle \nabla V(pz), py \rangle \leq 0 \ \text{ хотя бы для одного } \ y \in F(t,z), \tag{12}$$

где $V(pz) \geq \vartheta$, $\|qz\| \leq \rho_2$.

**Теорема 2.** *Пусть для включения* (1) *можно указать обобщенную МВНФ относительно области* $\Omega\,(\vartheta,\rho_1,\rho_2)$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет, по крайней мере, одно решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\,(\vartheta,\rho_0)}$, $t \in [0,T]$.

*Доказательство.* Определим мультиотображение $B : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$:

$$B(z) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \gamma(z) \nabla V(pz), py \rangle \leq 0\},$$

где $\gamma(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } V(pz) \le \vartheta_1; \\ 1, & \text{если } V(pz) > \vartheta_1, \end{cases} \quad \vartheta_0 < \vartheta_1 < \vartheta.$

Нетрудно видеть, что $B$ является замкнутым мультиотображением.

Для невырожденного потенциала $V(\zeta)$ определим непрерывное отображение $Y_V : \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^{n-2}$:

$$Y_V(pz) = \begin{cases} -\nabla V(pz), & \text{если } \|\nabla V(pz)\| \le 1; \\ -\frac{\nabla V(pz)}{\|\nabla V(pz)\|}, & \text{если } \|\nabla V(pz)\| > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательные дифференциальные включения

$$z'(t) \in F_B(t, z(t)) = F(t, z(t)) \cap B(z(t)), \tag{13}$$

$$z'(t) \in F_B(t, z(t)) + \varepsilon_m Y_V(pz(t)) \tag{14}$$

для некоторой последовательности положительных $\varepsilon_m$.

Отметим, что правые части включений (13) и (14) также являются пн. св.

Для включения (13) соотношение (12) будет справедливо уже для всех $y \in F_B(t, z)$, а для включения (14) оно будет выполняться в строгой форме. Следовательно, пара функций $\{V(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$ является строгой МВНФ для включения (14) при каждом $\varepsilon_m > 0$. Тогда по теореме 1 каждое включение (14) имеет $T$-периодическое решение $z_m(\cdot)$ такое, что $z_m(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}$, $t \in [0, T]$. Устремляя $\varepsilon_m$ к нулю, получаем искомое решение $z(\cdot)$ включения (1) как предельную точку последовательности $z_m(\cdot)$. □

**Замечание 5.** Утверждение теоремы остается справедливым и в случае, когда соотношение (12) выполняется для всех $y \in F(t, z)$.

Рассмотрим теперь периодическую задачу (1), (2) в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и $T$-периодично по первому аргументу.

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ такие, что для произвольного $\varepsilon > 0$ и п. в. $t \in [0, T]$

$$\sup_{z \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \sup_{y \in F(t,z)} \langle \nabla W(qz), qy \rangle \le \alpha(t) - \varepsilon, \tag{15}$$

$$\inf_{z \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \inf_{y \in F(t,z)} \langle \nabla W(qz), qy \rangle \ge \beta(t) + \varepsilon. \tag{16}$$

**Определение 23.** Пару функций $\{V(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (3)–(5), будем называть МВНФ для включения (1) относительно области $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнены условия

$$\sup_{t \in [0,T]} \sup_{y \in F(t,z)} \frac{|\langle qy, qz \rangle|}{\|qz\|} \le \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T} - \varepsilon, \quad z \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2); \tag{17}$$

$$\langle \nabla V(pz), py \rangle \le 0 \ \text{ для всех } \ y \in F(t, z), \quad V(pz) \ge \vartheta, \quad \|qz\| \le \rho_2; \tag{18}$$

$$2\pi(N-1) + \varepsilon \le \int_0^T \alpha(\tau) d\tau, \quad \int_0^T \beta(\tau) d\tau \le 2\pi N - \varepsilon, \tag{19}$$

где $N$ — целое число, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — функции из (15), (16).

**Теорема 3.** *Пусть для включения (1) можно указать МВНФ относительно области $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. Тогда задача (1), (2) имеет, по крайней мере, одно решение $z_*(\cdot)$ такое, что*

$$z_*(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}, \quad t \in [0, T].$$

*Доказательство.* Так как правая часть $F$ дифференциального включения (1) удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, то [16] для каждого $\varepsilon_m > 0$ существует мультиотображение $F_{\varepsilon_m} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ такое, что

(а) $F_{\varepsilon_m}$ по первому аргументу $T$-периодично;

(б) $F_{\varepsilon_m}(t,z) \subset F(t,z)$ п. в. $(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

(в) существует замкнутое подмножество $J_{\varepsilon_m}$ промежутка $J = [0,T]$ такое, что $\mu(J \setminus J_{\varepsilon_m}) \leq \varepsilon_m$ (где $\mu$ — мера Лебега) и $F_{\varepsilon_m}|_{J_{\varepsilon_m} \times \mathbb{R}^n}$ пн. св.;

(г) если $u$, $w$ измеримы и $w(t) \in F(t, u(t))$ для п. в. $t \in J$, то $w(t) \in F_{\varepsilon_m}(t, u(t))$ п. в. $t \in J$.

Пусть $P_m : [0,T] \multimap J_{\varepsilon_m}$ — метрическая проекция и

$$\widetilde{F}_{\varepsilon_m}(t,z) = \overline{\mathrm{co}} F_{\varepsilon_m}(P_m(t), z) \ \text{ для п. в. } \ (t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Так как метрическая проекция пн. св., то мультиотображение $\widetilde{F}_{\varepsilon_m}$ также пн. св. [9].

Нетрудно видеть, что для дифференциальных включений

$$z'(t) \in \widetilde{F}_{\varepsilon_m}(t, z(t)), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

выполнены соотношения (15)–(19) и, следовательно, по теореме 2 с учетом замечания 5 каждое из них имеет $T$-периодическое решение $\widetilde{z}_m(\cdot)$. Устремляя $\varepsilon_m$ к нулю, получаем искомое решение $z(\cdot)$ как предельную точку последовательности $\widetilde{z}_m(\cdot)$. □

**Пример.** Рассмотрим периодическую задачу для полулинейного дифференциального включения

$$z'(t) \in Az(t) + G(t, z(t)) \ \text{ для п. в. } \ t \in [0,T], \tag{20}$$

предполагая, что $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, а мультиотображение $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ по первому аргументу $T$-периодично, удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста.

Пусть выполнены следующие условия:

1) $\mathbb{R}^2$ — двумерное собственное подпространство матрицы оператора $A$, отвечающее паре мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$; остальные собственные значения $\lambda_j$ лежат слева от мнимой оси:

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0, \quad j = 3, \ldots, n;$$

2) $\mathbb{R}^{n-2}$ — дополнительное к $\mathbb{R}^2$ инвариантное для матрицы $A$ подпространство;

3) период $T_0 = 2\pi/\omega_0$ собственных колебаний системы $z' = Az$ связан с периодом $T$ мультиотображения $G$ соотношением

$$T = nT_0, \quad n \in N;$$

4) мультиотображение $G$ имеет вид

$$G(t,z) = G_0(t,z) \times G_1(t,z) \subset \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2.$$

Обозначим через $\{x, y\}$ координаты вектора $\xi \in \mathbb{R}^2$ в некотором базисе $\{e_1, e_2\}$. Тогда каждый вектор $z \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде

$$z = \zeta + \xi = \zeta + xe_1 + ye_2$$

и $Az = A(\zeta + xe_1 + ye_2) = A_0\zeta + \omega_0(-ye_1 + xe_2)$, где $A_0$ — сужение $A$ на $\mathbb{R}^{n-2}$. Поэтому включение (20) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dt} \in A_0\zeta + G_0(t, \zeta, x, y), \\ \frac{dx}{dt} \in -\omega_0 y + X(t, \zeta, x, y), \\ \frac{dy}{dt} \in \omega_0 x + Y(t, \zeta, x, y). \end{cases} \tag{21}$$

Пусть $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Положим $V(\zeta) = (\zeta, D\zeta)$, $W(\varphi,\rho) = \varphi$, где $D = 2\int\limits_0^\infty \exp(A_0^T\tau)\exp(A_0\tau)d\tau$.

Нетрудно показать, что пара $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$ является МВНФ для системы (21) относительно некоторой области $\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)$. Тогда в силу теоремы 3 система (21) имеет $T$-периодическое решение

$$\{\zeta(t), x(t), y(t)\} \in \overline{G(\vartheta,\rho_2)}, \quad t \in [0,T].$$

**3. Случай нормальной правой части.** Рассмотрим периодическую задачу для дифференциального включения

$$z'(t) \in R(t, z(t)), \tag{22}$$

$$z(0) = z(T), \tag{23}$$

в предположении, что мультиотображение $R : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным и удовлетворяет условию $T$-периодичности ($T>0$) по первому аргументу.

**Определение 24.** Пару функций $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (3)–(5), (15), (16), будем называть МВНФ для включения (22) относительно области $\Omega\,(\vartheta,\rho_1,\rho_2)$, если функция $V(\zeta)$ является невырожденным потенциалом и, кроме (17) и (19), выполнено условие

$$\langle \nabla V(pz), py\rangle \le 0 \ \text{ для всех } \ y \in R(t,z), \quad V(pz) \ge \vartheta, \quad \|qz\| \le \rho_2. \tag{24}$$

**Теорема 4.** *Пусть для включения* (22) *можно указать МВНФ относительно области* $\Omega\,(\vartheta,\rho_1,\rho_2)$. *Тогда задача* (22), (23) *имеет, по крайней мере, одно решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\,(\vartheta,\rho_0)}$, $t \in [0,T]$.

*Доказательство.* Пусть мультиотображение $F$ является квазисечением мультиотображения $R$, т. е.

(j) мультиотображение $F : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста;

(jj) $F(t,z)\cap R(t,z) \ne \varnothing$ для всех $t\in[0,T]$, $z\in\mathbb{R}^n$;

(jjj) каждое решение $z : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ задачи

$$z'(t) \in F(t, z(t)), \tag{25}$$

$$z(0) = z(T), \tag{26}$$

является решением исходной задачи (22), (23).

В силу (jjj) достаточно показать, что задача (25), (26) имеет решение.

Заметим, что в общем случае пара функций $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$ не является МВНФ для включения (25).

Пусть $\varepsilon > 0$ то же, что и в определении МВНФ. Мультиотображение $C : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ задано как

$$C(z) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \langle \gamma(z)\nabla V(pz), py\rangle \le 0, \\ \frac{|\langle qy, \eta(z)qz\rangle|}{\|qz\|} \le \frac{\rho_2-\rho_1}{2T} - \varepsilon, \\ \frac{2\pi}{T}(N-1)+\varepsilon \le \langle \eta(z)\nabla W(qz), qy\rangle \le \frac{2\pi}{T}N - \varepsilon, \ N \text{ целое} \end{array} \right\},$$

где

$$\gamma(z) = \begin{cases} 0, & V(pz) \le \vartheta_1, \ \|qz\| \le \rho_2; \\ 1, & V(pz) > \vartheta_1, \ \|qz\| \le \rho_2, \end{cases} \qquad \eta(z) = \begin{cases} 1, & V(pz) \le \vartheta_1, \ \|qz\| \le \rho_2; \\ 0, & V(pz) > \vartheta_1, \ \|qz\| \le \rho_2, \end{cases}$$

$\vartheta_0 < \vartheta_1 < \vartheta$. Легко видеть, что $C$ является замкнутым мультиотображением. Тогда мультиотображение $F_C(t,z) = F(t,z) \cap C(z)$ имеет выпуклые компактные значения и удовлетворяет верхним условиям Каратеодори (например, [6]).

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$z'(t) \in F_C(t, z(t)). \tag{27}$$

Нетрудно проверить, что пара функций $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$ является МВНФ для включения (27). Из теоремы 3 следует, что включение (27) имеет по крайней мере одно $T$-периодическое решение, которое является решением задачи (25), (26) и, следовательно, решением исходной задачи (22), (23). □

**4. Случай непрерывной правой части.** Рассмотрим в заключение периодическую задачу для дифференциального включения

$$z'(t) \in R(t, z(t)), \tag{28}$$

$$z(0) = z(T), \tag{29}$$

предполагая, что ограниченное мультиотображение $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является непрерывным и удовлетворяет условию $T$-периодичности ($T > 0$) по первому аргументу.

**Замечание 6.** В силу леммы 3 для каждого конуса $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ ограниченное непрерывное мультиотображение $R : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ допускает ограниченное $\mathcal{K}$-непрерывное сечение $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

**Лемма 4** ([8], [20]). *Пусть $R : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ — ограниченное непрерывное мультиотображение, а $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — его ограниченное $\mathcal{K}$-непрерывное сечение. Пусть мультиотображение $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ задано как*

$$F(t,z) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\mathrm{co}} f(B((t,z),\delta)),$$

*где $B((t,z),\delta) = \{(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \mid |s-t| < \delta,\ \|y - z\| < \delta\}$. Тогда*

(j) *$F$ является ограниченным пн. св. мультиотображением с выпуклыми компактными значениями;*

(jj) *множество решений задачи*

$$z'(t) = f(t, z(t)), \tag{30}$$

$$z(0) = z(T) \tag{31}$$

*совпадает с множеством решений задачи*

$$z'(t) \in F(t, z(t)), \tag{32}$$

$$z(0) = z(T). \tag{33}$$

Напомним некоторые понятия негладкого анализа [22].

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана локально липшицева функция $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ обобщенная производная Кларка $\Phi^0(x;\nu)$ функции $\Phi(\cdot)$ в точке $x$ по направлению $\nu$ задается выражением

$$\Phi^0(x;\nu) = \varlimsup_{z \to x,\ t \to 0+} \frac{\Phi(z + t\nu) - \Phi(z)}{t},$$

где $z \in \mathbb{R}^n$. Тогда обобщенный градиент Кларка $\partial\Phi(x)$ функции $\Phi(\cdot)$ в точке $x$ определяется следующим образом:

$$\partial\Phi(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, \nu\rangle \le \Phi^0(x;\nu) \text{ для всех } \nu \in \mathbb{R}^n\}.$$

Известно, что мультиотображение $\partial\Phi : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ имеет выпуклые компактные значения и полунепрерывно сверху [22]. В частности, это означает, что для каждой непрерывной функции $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ множество суммируемых сечений мультифункции $t \multimap \partial\Phi(x(t))$ непусто.

Пусть на $\Pi$ задана скалярная локально липшицева функция $W(\varphi,\rho)$, для которой

$$W(\varphi + 2\pi, \rho) = W(\varphi,\rho) + 2\pi, \quad (\varphi,\rho) \in \Pi, \tag{34}$$

$$W_1^0(\varphi,\rho;\psi) > 0, \quad (\varphi,\rho) \in \Pi, \quad \psi \in (-\infty, +\infty), \tag{35}$$

где $W_1^0(\varphi,\rho;\psi)$ — обобщенная частная производная функции $W(\varphi,\rho)$ в точке $\varphi$ по направлению $\psi$.

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ пусть задана регулярная функция $V(\zeta)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\|\zeta\|\to\infty} V(\zeta) = +\infty. \tag{36}$$

**Определение 25** ([11])**.** Локально липшицева функция $V(\zeta)$ называется прямым потенциалом, если выполнено соотношение

$$\langle \upsilon, \widetilde{\upsilon}\rangle > 0 \ \text{ для всех } \ \upsilon, \widetilde{\upsilon} \in \partial V(\zeta), \ \ \zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : V(\zeta) \ge \vartheta. \tag{37}$$

Если функция $V(\zeta)$ является прямым потенциалом, то с помощью топологической степени многозначных отображений [6], [8] для нее естественным образом определяется топологический индекс на бесконечности $\operatorname{ind}(V,\infty)$.

Для $\rho_2 > \rho_1 \ge 0$ и $\vartheta > \vartheta_0 = \min V(\zeta)$ выделим область

$$\Omega\left(\vartheta, \rho_1, \rho_2\right) = \left\{z \in \mathbb{R}^n : V(pz) < \vartheta, \ \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\right\}.$$

Будем предполагать, что на $[0,T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие, что для произвольного $\varepsilon > 0$ и п. в. $t \in [0,T]$

$$\sup_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \ \sup_{y\in R(t,z)} \langle w, qy\rangle \le \alpha(t) - \varepsilon \ \text{ для всех } \ w \in \partial W(qz), \tag{38}$$

$$\inf_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \ \inf_{y\in R(t,z)} \langle w, qy\rangle \ge \beta(t) + \varepsilon \ \text{ для всех } \ w \in \partial W(qz). \tag{39}$$

**Определение 26.** Пару функций $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (34)–(39), назовем негладкой МВНФ для включения (28) относительно области $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнены условия

$$\sup_{t\in[0,T]} \ \sup_{y\in R(t,z)} \frac{|\langle qy, qz\rangle|}{\|qz\|} \le \frac{\rho_2-\rho_1}{2T} - \varepsilon, \quad z \in \Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2); \tag{40}$$

$$\langle \upsilon, py\rangle \le 0 \ \text{ для всех } \ \upsilon \in \partial V(pz), \quad y \in R(t,z), \tag{41}$$

для любого $z \in \mathbb{R}^n$ такого, что $V(pz) \ge \vartheta$, $\|qz\| \le \rho_2$;

$$2\pi(N-1) + \varepsilon \le \int_0^T \alpha(\tau)d\tau, \quad \int_0^T \beta(\tau)d\tau \le 2\pi N - \varepsilon, \tag{42}$$

где $N$ — целое число, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — функции из (38), (39).

**Теорема 5.** *Пусть для включения* (28) *можно указать негладкую МВНФ относительно области* $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. *Тогда задача* (28), (29) *имеет, по крайней мере, одно решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}$, $t \in [0, T]$.

*Доказательство.* Возьмем произвольные $t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$. Так как мультиотображение $R$ непрерывно, то найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $(s, y) \in B((t, z), \delta)$ будет следовать $R(s, y) \subset R(t, z) + B^n(\varepsilon)$.

Тогда имеем

$$F(t, z) \subset \overline{\text{co}} f(B((t, z), \delta)) \subset \overline{\text{co}} R(t, z) + B^n(\varepsilon)$$

и в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем

$$F(t, z) \subset \overline{\text{co}} R(t, z).$$

Из условия теоремы следует, что соотношения (38)–(42) выполнены для всех $y \in R(t, z)$, Тогда, очевидно, эти соотношения будут справедливы и для всех $\overline{y} \in F(t, z)$.

Таким образом, пара $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ является негладкой МВНФ для включения (32). Тогда из [14] вытекает, что задача (32), (33) имеет, по крайней мере, одно решение $z_*(\cdot)$ такое, что $z_*(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}$, $t \in [0, T]$. Следовательно, ввиду (jj) леммы 4, имеет, по крайней мере, одно решение и задача (28), (29). □

Автор глубоко признателен профессору В.В. Обуховскому за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

## Литература

[1] Красносельский М.А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1966).

[2] Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа* (Наука, М., 1975).

[3] Красносельский М.А., Перов А.И. *Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, ДАН СССР **123** (2), 235–238 (1958).

[4] Рачинский Д.И. *Вынужденные колебания в системах управления в условиях, близких к резонансу*, Автоматика и телемеханика, №11, 87–98 (1995).

[5] Rachinskii D.I. *Multivalent guiding functions in forced oscillation problems*, Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl. **26** (3), 631–639 (1996).

[6] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений* (Книжный дом "Либроком", М., 2011).

[7] Звягин В.Г., Ратинер Н.М. *Ориентированная степень фредгольмовых отображений. Метод конечномерной редукции*, Совр. матем. Фунд. напр. **44**, 3–171 (РУДН, М., 2012).

[8] Górniewicz L. *Topological fixed point theory of multivalued mappings* (Springer, Berlin, 2006).

[9] Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces* (Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2001).

[10] Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. *Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis*, Lecture Notes in Math. **2076** (Springer, Berlin, 2013).

[11] De Blasi F.S., Górniewicz L., Pianigiani G. *Topological degree and periodic solutions of differential inclusions*, Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods **37** (2), 217–243 (1999).

[12] Filippakis M., Gasinski L., Papageorgiou N.S. *Nonsmooth generalized guiding functions for periodic differential inclusions*, Nonlin. Differ. Equat. Appl. **13** (1), 43–66 (2006).

[13] Корнев С.В. *О методе многолистных направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений*, Автоматика и телемеханика, №3, 72–83 (2003).

[14] Корнев С.В., Обуховский В.В. *О негладких многолистных направляющих функциях*, Диффер. уравн. **39** (11), 1497–1502 (2003).

[15] Корнев С.В., Обуховский В.В. *Негладкие направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях*, Автоматика и телемеханика, №1, 3–12 (2007).

[16] Deimling K. *Multivalued differential equations* (Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1992).
[17] Fryszkowski A. *Fixed point theory for decomposable sets* (Dordrecht, Kluwer AP, 2004).
[18] Kisielewicz M. *Differential inclusions and optimal control* (Kluwer, Dordrecht; PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991).
[19] Bressan A., Colombo G. *Extensions and selections of maps with decomposable values*, Studia Math. **90** (1), 69–86 (1988).
[20] Bressan A. *Upper and lower semicontinuous differential inclusions. A unified approach*, in: H. Sussmann (Ed.), Controlability and optimal control (Dekker, New York, 1989), 1–31.
[21] Bressan A. *Directionally continuous selections and differential inclusions*, Funkcial. Ekvac. **31** (3), 459–470 (1988).
[22] Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ* (Наука, М., 1988).

*С.В. Корнев*

*Воронежский государственный педагогический университет,*
*ул. Ленина, д. 86, г. Воронеж, 394043, Россия,*

e-mail: kornev_vrn@rambler.ru

*S.V. Kornev*

**Multivalent guiding function in a problem on existence of periodic solutions of some classes of differential inclusions**

*Abstract.* We propose to use the multivalent guiding function for the study of periodic solutions of some classes of differential inclusions. More precisely, we consider the periodic problem for nonlinear systems described by differential inclusions with both convex right-hand side and with nonconvex right-hand side. The latter include differential inclusions with a regular right-hand side. Note that the class of regular multimaps is wide enough. It includes, for example, bounded almost lower semicontinuous multimaps with compact values.

*Keywords*: differential inclusion, periodic problem, multivalent guiding function, topological degree.

*S.V. Kornev*

*Voronezh State Pedagogical University,*
*86 Lenin str., Voronezh, 394043 Russia,*

e-mail: kornev_vrn@rambler.ru