ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 12 (475)

УДК 517.977.56

В.А. ТЕРЛЕЦКИЙ

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При исследовании задач оптимального управления разрывность управляющих воздействий создает необходимость рассматривать решения дифференциальных уравнений, определяющих допустимый процесс, в обобщенном смысле. Особенно остро эта проблема стоит для систем уравнений с частными производными, где зачастую невозможно построение не только гладкого, но и просто непрерывного решения, соответствующего допустимому управлению.

В основу понятия обобщенного решения могут быть положены самые различные подходы: интегральные законы сохранения, метод искусственной вязкости, способ предельного перехода в разностных аппроксимациях, аппарат теории обобщенных функций, понятие потенциала решения, а также другие схемы [1], [2]. К сожалению, далеко не все из них приемлемы для использования в теории оптимального управления. Например, в гиперболических системах многомерных уравнений одно из наиболее сильных понятий обобщенного решения было введено Фридрихсом [3]. Им и его последователями доказано существование и единственность такого обобщенного решения, которое допускает сколь угодно точную аппроксимацию по норме пространства L_2 последовательностью гладких приближенных решений [3]–[9]. Но так как доказательство проводится на основе интегральных операторов осреднения, оценка решения имеет вид энергетического неравенства, а значит, не может гарантировать малость возмущения решения в точках области независимых переменных при малых возмущениях неоднородной части системы и начально-краевых условий. Таким образом, способ конструирования обобщенного решения в рамках данного подхода с принципиальной точки зрения не позволяет не только обосновать широко известный в теории оптимального управления метод приращений, но и уловить качественное различие в поведении приращения траектории на различных типах игольчатых вариаций [10].

В работах [11]–[16] использовалось понятие обобщенного решения, лишенное отмеченных недостатков. Оно основано на следующей достаточно общей идее из [1]: для системы дифференциальных уравнений нужно построить эквивалентную ей интегральную систему, решение которой и объявить обобщенным. Естественное стремление распространить этот подход на гиперболические системы многомерных уравнений долгое время упиралось в построение соответствующего ей интегрального эквивалента. В статье предлагается решение этой проблемы на базе многомерного аналога инвариантов Римана.

1. Постановка задачи

В $m+1$-мерном пространстве независимых переменных (s,t), $s=(s_1,s_2,\dots,s_m)$ рассмотрим параллелепипед $\mathrm{P}=S\times T$, $S=S^{(1)}\times S^{(2)}\times\dots\times S^{(m)}$, $S^{(j)}=[s_{0_j},s_{1_j}]$, $j=1,2,\dots,m$, $T=[t_0,t_1]$. Пусть Ω, G, $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ — соответственно его полная, боковая, нижняя и верхняя поверхности, $\Omega=G\cup\mathcal{D}_0\cup\mathcal{D}_1$. В параллелепипеде P определим систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$x_t+\sum_{j=1}^{m}A_j(s,t)x_{s_j}=f(x,s,t). \tag{1.1}$$

Здесь $x = x(s,t)$, $x(s,t) \in \mathrm{E}^n$ — решение, $A_j = A_j(s,t)$, $A_j(s,t) \in \mathrm{E}^{n\times n}$, $j = 1,2,\dots,m$, — заданные матричные функции, $f = f(x,s,t)$, $f(x,s,t) \in \mathrm{E}^n$ — заданная вектор-функция. Предположим, что элементы матриц A_j, $j = 1,2,\dots,m$, непрерывны и имеют непрерывную по Липшицу частную производную по s в области P. Кроме того, будет сформулировано еще одно предположение относительно матриц A_j, $j = 1,2,\dots,m$, которое позволяло бы считать дифференциальный оператор

$$Dx = x_t + \sum_{j=1}^{m} A_j(s,t)x_{s_j} \tag{1.2}$$

гиперболическим в области P. Как известно [1], в одномерном (т.е. при $m = 1$) случае для этого необходимо и достаточно, чтобы матрица при частной производной x_s была простой. Подчеркнем, что указанное условие является минимальным в том смысле, что другие определения гиперболических систем (напр., [2]–[9]) используют более жесткие ограничения: симметричность матрицы или наличие у нее n различных всюду в P вещественных собственных значений. Известные автору теоремы существования и единственности решения многомерных ($m \geq 2$) систем вида (1.1) получены в предположении симметричности матриц A_j, $j = 1,2,\dots,m$. Здесь будем использовать

Определение 1.1. Систему (1.1) назовем гиперболической, если для почти всех $\nu \in \mathrm{E}^m$ и всех $(s,t) \in \mathrm{P}$ матрица

$$\mathcal{A}(\nu,s,t) = \sum_{j=1}^{m} \nu_j A_j(s,t)$$

имеет вещественные (необязательно различные) собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(\nu,s,t)$, $i = 1,\dots,n$, и не является дефектной, т.е. алгебраическая и геометрическая кратность ее собственных значений одинакова.

Для недефектной матрицы $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\nu,s,t)$ всегда существуют базисы пространства E^n, составленные из ее левых $\ell^{(i)} = \ell^{(i)}(\nu,s,t)$ и правых $p^{(i)} = p^{(i)}(\nu,s,t)$, $i = 1,2,\dots,n$, собственных векторов. Указанные базисы всегда можно построить так, чтобы они были биортогональными [17], т.е. существуют такие матрицы $\mathcal{L} = (\ell^{(1)},\ell^{(2)},\dots,\ell^{(n)})$, $\mathcal{P} = (p^{(1)},p^{(2)},\dots,p^{(n)})$, что будут верны соотношения

$$\begin{gathered} \mathcal{L}'(\nu,s,t)\mathcal{A}(\nu,s,t) = \Lambda(\nu,s,t)\mathcal{L}'(\nu,s,t), \\ \mathcal{A}(\nu,s,t)\mathcal{P}(\nu,s,t) = \mathcal{P}(\nu,s,t)\Lambda(\nu,s,t), \quad \mathcal{L}'(\nu,s,t)\mathcal{P}(\nu,s,t) = \dot{\mathrm{I}}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$, $'$ – знак транспонирования, $\dot{\mathrm{I}}$ — единичная матрица.

Легко заметить, что матрица $\mathcal{A}$ может быть недефектной только в том случае, если все матрицы A_j, $j = 1,2,\dots,m$, недефектные. Обратное утверждать, вообще говоря, нельзя. Отметим, что предположение о симметричности матриц, формирующих дифференциальный оператор (1.2), равносильно [18] равенству $\mathcal{L} = \mathcal{P}$, т.е. приводит к частному случаю соотношений (1.3) и, следовательно, принятое здесь в определении 1.1 понятие гиперболичности системы заведомо не уже, чем те, которые используются в [4]–[9].

Будем считать вектор-функцию $f(x,s,t)$ непрерывной по Липшицу по переменной x при фиксированных $(s,t) \in \mathrm{P}$ и интегрируемой по Лебегу в P при фиксированных $x \in \mathrm{E}^n$.

При сделанных предположениях относительно дифференциального оператора (1.2) и вектор-функции $f(x,s,t)$ требуется построить обобщенное решение системы (1.1), обосновать его существование и единственность в случае корректного способа постановки смешанных условий для решения x на границе Ω области P и установить оценки роста решения почти всюду в P.

2. Характеристики и бихарактеристики гиперболического оператора

Введем характеристики гиперболического оператора (1.2). Пусть в P уравнением $\chi(s,t) = \mathrm{c}$, $\chi \in C_1(\mathrm{P})$, задана поверхность $\mathcal{X}_\mathrm{c}$. Говорят, что поверхность $\mathcal{X}_\mathrm{c}$ является характеристикой гиперболического оператора (1.2), если

$$\det\left|\chi_t(s,t)\dot{\mathrm{I}} + \sum_{j=1}^{m} \chi_{s_j} A_j(s,t)\right| = 0$$

или если при некотором $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется равенство

$$\chi_t(s,t) + \lambda_i(\chi_s, s, t) = 0. \tag{2.1}$$

Отметим, что собственные значения $\lambda_i(\nu,s,t)$ и собственные векторы $\ell^{(i)}(\nu,s,t)$, $p^{(i)}(\nu,s,t)$ матрицы $\mathcal{A}(\nu,s,t)$ наследуют гладкость матриц A_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, по $(s,t) \in \mathrm{P}$. По переменной ν они обладают свойством однородности, в чем нетрудно убедиться, использовав линейность по ν матрицы $\mathcal{A}(\nu,s,t)$ и соотношения (1.3). При этом функции $\lambda_i(\nu,s,t)$ однородны первой степени, а вектор-функции $\ell^{(i)}(\nu,s,t)$, $p^{(i)}(\nu,s,t)$ — нулевой степени, чего всегда можно добиться их нормировкой, ибо $\langle \ell^{(i)}(\nu,s,t), p^{(i)}(\nu,s,t)\rangle \equiv 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Итак, имеем

$$\begin{gathered} \lambda_i(\alpha\nu,s,t) = \alpha\lambda_i(\nu,s,t), \quad \ell^{(i)}(\alpha\nu,s,t) = \ell^{(i)}(\nu,s,t), \\ p^{(i)}(\alpha\nu,s,t) = p^{(i)}(\nu,s,t), \quad \alpha \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Свойство (2.2) позволяет применить эффективный метод построения решения нелинейного дифференциального уравнения (2.1) по аналогии с тем, как это сделано в [2] для двумерного ($m = 2$) случая.

Действительно, по теореме Эйлера для однородных первой степени функций справедливы тождества

$$\lambda_i(\nu,s,t) = \langle \lambda_{i\nu}(\nu,s,t), \nu\rangle, \quad \nu \in \mathrm{E}^m, \quad (s,t) \in \mathrm{P}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Положив здесь для краткости $\nu = \chi_s$, перепишем (2.1) в виде

$$\chi_t + \langle \lambda_{i\nu}(\chi_s,s,t), \chi_s\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Каждое из уравнений (2.4) может быть проинтегрировано методом характеристик ([19], с. 247) с незначительным его видоизменением, обусловленным следующим обстоятельством. При частных производных решения в (2.4) стоят коэффициенты, зависящие не от самого решения χ, что позволило бы использовать метод характеристик стандартным образом, а функции от тех же частных производных решения. Поэтому характеристики уравнений (2.4) зависят непосредственно не от решения χ, а от его градиента по пространственным переменным χ_s. Следовательно, для нахождения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, устанавливающего траекторию характеристики уравнения из (2.4), необходимо одновременно с ним уметь строить вектор-функцию χ_s вдоль этой характеристики.

Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решением которой и является градиент χ_s функции χ. Для этого продифференцируем уравнение (2.1) по s и воспользуемся обозначением $\nu = \chi_s$. Будем иметь для каждого собственного значения λ_i систему $2m$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{ds}{dt} = \lambda_{i\nu}(\nu,s,t), \quad \frac{d\nu}{dt} = -\lambda_{is}(\nu,s,t), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.5}$$

В силу однородности нулевой степени по ν вектор-функций $\lambda_{i\nu}$ и непрерывности по Липшицу по переменной s вектор-функций λ_{is} можно гарантировать, что для любого фиксированного $(\mu,\xi,\tau) \in \mathrm{E}^m \times S \times T$ существует единственное абсолютно непрерывное решение системы (2.5), которое будем называть, заимствуя термин из [2], бихарактеристикой и обозначать вектор-функциями $s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t)$ и $\nu^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t)$ соответственно.

Понятно, что вдоль интегральной кривой $s = s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t)$ функция χ_i сохраняет свое значение, т. к. с учетом (2.4)

$$\frac{d}{dt}\chi_i(s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t),t) = \chi_{it} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i\nu_j}(\nu,s,t)\chi_{is_j} = 0, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

На этом свойстве основан следующий алгоритм построения конкретной характеристики $\mathcal{X}_c^{(i)}$. Во-первых, для уравнения (2.1) или эквивалентного ему уравнения (2.4) следует задать начальное условие. Пусть оно имеет вид

$$\chi_i(s,\tau) = \zeta(s), \tag{2.6}$$

где $\zeta = \zeta(s)$ — некоторая кусочно-гладкая функция с невырожденным всюду в S градиентом $\|\nabla\zeta(s)\| > 0$. Во-вторых, необходимо найти точку $\xi \in S$, удовлетворяющую уравнению $\zeta(\xi) = c$, и вычислить в ней градиент $\mu = \nabla\zeta(\xi)$. В третьих, нужно проинтегрировать систему (2.5) с условиями Коши $t = \tau$, $\nu = \mu$, $s = \xi$. Получим бихарактеристику $s = s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t)$ и вектор-функцию $\nu = \nu^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t)$, которая, как уже отмечалось, совпадает с градиентом χ_{is} в точках $(s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t),t) \in \mathrm{P}$. Другими словами, вдоль бихарактеристики функция χ_i и ее градиент χ_{is} вычисляются по формулам $\chi_i(s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t),t) = \zeta(s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t))$, $\chi_{is}(s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t),t) = \nu^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t)$.

Описанная схема дает эффективный инструмент для непосредственного построения m-мерной характеристики $\mathcal{X}_c^{(i)}$ по заданной в момент $t = \tau$ уравнением $\zeta(s) = c$ "начальной" $m{-}1$-мерной поверхности. Кроме того, она подсказывает структуру связи между функциями χ_i и ζ. Покажем, что с формальной точки зрения решение задачи (2.1), (2.6) определяет соотношение

$$\chi_i(\zeta(\cdot),\tau;s,t) = \zeta(s^{(i)}(\nu^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t),s,t;\tau)). \tag{2.7}$$

Справедливость начальных условий (2.6) для функции (2.7) очевидна из принятого при определении бихарактеристики свойства $s^{(i)}(\nu,s,\tau;\tau) \equiv s$. При проверке (2.1) для краткости обозначим $\nu = \nu^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t)$, $\xi = s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)$. Непосредственно из (2.7) и второго равенства в (2.5) находим частные производные

$$\chi_{it} = \langle\nabla\zeta(\xi), s_t^{(i)}(\nu,s,t;\tau) - s_\nu^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\lambda_{is}(\nu,s,t)\rangle,$$
$$\chi_{is} = s_s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)'\nabla\zeta(\xi).$$

После подстановки этих выражений в (2.4) будем иметь

$$\chi_{it} + \langle\lambda_{i\nu}(\chi_s,s,t),\chi_s\rangle = \langle\nabla\zeta(\xi), s_t^{(i)}(\nu,s,t;\tau) + s_s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\lambda_{i\nu}(\nu,s,t) - s_\nu^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\lambda_{is}(\nu,s,t)\rangle.$$

Второй сомножитель в этом скалярном произведении равен нулю в силу тождества

$$s_t^{(i)}(\nu,s,t;\tau) + s_s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\lambda_{i\nu}(\nu,s,t) - s_\nu^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\lambda_{is}(\nu,s,t) \equiv 0, \tag{2.8}$$

вытекающего из тавтологии

$$\xi \equiv s^{(i)}(\nu^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t), s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t),t;\tau), \quad \mu \in \mathrm{E}^m, \quad (\xi,\tau) \in \mathrm{P}, \quad t \in T.$$

Таким образом, функция (2.7) есть решение задачи Коши (2.1), (2.6). Следовательно, проблемы интегрирования нелинейного дифференциального уравнения (2.1) и построения характеристик дифференциального оператора (1.2) могут решаться путем нахождения соответствующих решений бихарактеристической системы (2.5). Этим, как будет видно из дальнейшего, роль бихарактеристик в построении обобщенного решения системы (1.1) далеко не ограничивается.

3. Инварианты Римана

По аналогии с тем, как это принято в системах одномерных гиперболических уравнений [1], [11], [16], введем новые переменные $r = r(\nu, s, t)$, $r(\nu, s, t) \in \mathrm{E}^n$, $(\nu, s, t) \in \mathrm{E}^m \times S \times T$, связав их с решением x системы (1.1) линейным взаимно однозначным преобразованием

$$r(\nu, s, t) = \mathcal{L}'(\nu, s, t)x(s, t), \quad x(s, t) = \mathcal{P}(\nu, s, t)r(\nu, s, t). \tag{3.1}$$

Следуя традиции, функции $r_i = r_i(\nu, s, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, будем по-прежнему называть инвариантами Римана, несмотря на их существенное отличие от одномерного прототипа — наличие наряду с пространственной s и временной t еще одной независимой переменной ν, которая ассоциируется с некоторым направлением в точке s.

Нашей ближайшей целью будет вывод системы дифференциальных уравнений, которой должны подчиняться инварианты r в случае, если решение x системы (1.1) является классическим, т.е. непрерывным и непрерывно дифференцируемым в области P.

Вначале воспользуемся условиями (1.3) и проанализируем структуру матриц

$$M_j(\nu, s, t) = \mathcal{L}'(\nu, s, t)A_j(s, t)\mathcal{P}(\nu, s, t), \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Опуская для краткости аргументы ν, s, t, заметим, что справедливы равенства

$$\langle \ell^{(i)}, \mathcal{A}p^{(i)} \rangle = \lambda_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Продифференцируем каждое из них по переменной ν_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Будем иметь

$$\lambda_{i_{\nu_j}} = \langle {\ell^{(i)}}_{\nu_j}, \mathcal{A}p^{(i)} \rangle + \langle \ell^{(i)}, \mathcal{A}{p^{(i)}}_{\nu_j} \rangle + \langle \ell^{(i)}, A_j p^{(i)} \rangle = \lambda_i(\langle {\ell^{(i)}}_{\nu_j}, p^{(i)} \rangle + \langle \ell^{(i)}, {p^{(i)}}_{\nu_j} \rangle) + \langle \ell^{(i)}, A_j p^{(i)} \rangle.$$

Так как $\langle \ell^{(i)}, p^{(i)} \rangle \equiv 1$, то $\lambda_{i_{\nu_j}} = \langle \ell^{(i)}, A_j p^{(i)} \rangle$ или в матричной форме $\Lambda_{\nu_j} = \mathrm{diag}\{M_j^{(1,1)}, M_j^{(2,2)}, \ldots, M_j^{(n,n)}\}$. Пусть $\overset{\vee}{M}_j = M_j - \Lambda_{\nu_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Вообще говоря, эти матричные функции нетривиальны, т. к. одновременная диагонализация всех матриц $A_1, A_2, \ldots, A_m$ одним линейным преобразованием, как известно [18], возможна лишь для коммутативного относительно операции умножения семейства матриц, т. е. для случая $A_j A_k = A_k A_j$, $j, k = 1, 2, \ldots, m$. Такое предположение является очень жестким, оно резко сужает возможные приложения системы (1.1) и, естественно, упрощает проблему построения обобщенного решения фактически до ее уровня в одномерном ($m = 1$) варианте. Не вдаваясь в подробности, отметим лишь, что у дифференциального оператора (1.2) с коммутативными матрицами $A_1, A_2, \ldots, A_m$ характеристики совпадают с бихарактеристиками и не зависят от ν. Тем не менее для совокупности матриц $\overset{\vee}{M}_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, как нетрудно видеть, выполняется тождество

$$\sum_{j=1}^{m} \nu_j \overset{\vee}{M}_j(\nu, s, t) \equiv 0, \ \ \nu \in \mathrm{E}^m, \ \ (s, t) \in \mathrm{P}. \tag{3.2}$$

Подставим теперь в систему (1.1) вместо решения x соответствующее ему представление из (3.1). Получим

$$Dx = x_t + \sum_{j=1}^{m} A_j x_{s_j} = (\mathcal{P}r)_t + \sum_{j=1}^{m} A_j (\mathcal{P}r)_{s_j} = D\mathcal{P} \cdot r + \mathcal{P}(r_t + \mathcal{L}' \sum_{j=1}^{m} A_j \mathcal{P} r_{s_j}) =$$
$$= D\mathcal{P} \cdot r + \mathcal{P}(r_t + \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{\nu_j} r_{s_j} + \sum_{j=1}^{m} \overset{\vee}{M}_j r_{s_j}) = f(\mathcal{P}r, s, t).$$

Отсюда следует

$$r_t + \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{\nu_j} r_{s_j} = \mathcal{L}'(f - D\mathcal{P} \cdot r) - \sum_{j=1}^{m} \overset{\vee}{M}_j r_{s_j}. \tag{3.3}$$

Подсчитаем вдоль произвольной бихарактеристики $\xi = s^{(i)}(\nu, s, t; \tau)$, $\mu = \nu^{(i)}(\nu, s, t; \tau)$ полную производную i-го инварианта Римана $r_i = r_i(\nu^{(i)}(\nu, s, t; \tau), s^{(i)}(\nu, s, t; \tau), \tau)$ по переменной τ

$$\frac{d}{d\tau} r_i = r_{i_\tau} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i\mu_j} r_{i\xi_j} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i\xi_j} r_{i\mu_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Сравнив это выражение с левой частью i-го уравнения системы (3.3), заметим, что она отличается от полной производной инварианта r_i слагаемым $-\langle \lambda_{i_s}, r_{i_\nu} \rangle$. Поэтому после суммирования соответствующих уравнений системы (3.3) с равенствами

$$-\langle \lambda_{i_s}, r_{i_\nu} \rangle = -\langle \lambda_{i_s}, \ell_\nu^{(i)\prime} \mathcal{P} r \rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

которые справедливы в силу соотношений (3.1), получим нужный вид инвариантной системы

$$r_{it} + \langle \lambda_{i_\nu}, r_{i_s} \rangle - \langle \lambda_{i_s}, r_{i_\nu} \rangle = \langle \ell^{(i)}, f - D\mathcal{P} \cdot r \rangle - \langle \lambda_{i_s}, \ell_\nu^{(i)\prime} \mathcal{P} r \rangle - \\ - \sum_{j=1}^{m} \langle \overset{\vee}{M}{}_j^{(i)}, r_{s_j} \rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \nu \in \mathrm{E}^m, \quad (s, t) \in \mathrm{P}. \tag{3.5}$$

Здесь $\overset{\vee}{M}{}_j^{(i)}$ — i-я строка матрицы $\overset{\vee}{M}_j$. Пусть бихарактеристика $\xi = s^{(i)}(\nu, s, t; \tau)$, выпущенная из точки s в момент времени t по направлению вектора ν в “обратном” времени $\tau < t$, достигает границы Ω области P в точке $\xi^{(i)}$ в момент времени $\tau^{(i)}$ с направлением $\mu^{(i)}$. Понятно, что для построения такой тройки $\mu^{(i)}$, $\xi^{(i)}$, $\tau^{(i)}$ достаточно проинтегрировать i-ю систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.5) из точки (ν, s, t) по $\tau < t$. Как уже отмечалось, левая часть каждого из уравнений системы (3.5) представляет собой полную производную (3.4) соответствующего инварианта Римана. Следовательно, решение дифференциальной системы (3.5) должно удовлетворять интегральной системе

$$r_i(\nu, s, t) = r_i(\mu^{(i)}, \xi^{(i)}, \tau^{(i)}) + \int_{\tau^{(i)}}^{t} \Bigg[\langle \ell^{(i)}, f - D\mathcal{P} \cdot r \rangle - \langle \lambda_{i_s}, \ell_\nu^{(i)\prime} \mathcal{P} r \rangle - \\ - \sum_{j=1}^{m} \langle \overset{\vee}{M}{}_j^{(i)}, r_{s_j} \rangle \Bigg] \Bigg|_{\substack{\xi = s^{(i)}(\nu, s, t; \tau) \\ \mu = \nu^{(i)}(\nu, s, t; \tau)}} d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \nu \in \mathrm{E}^m, \quad (s, t) \in \mathrm{P}. \tag{3.6}$$

С помощью непосредственной громоздкой проверки, которую приводить не будем, убедимся в справедливости обратного утверждения. Отметим только, что при этом существенным образом наряду с (2.8) используется симметричное ему тождество

$$\nu_t^{(i)}(\nu, s, t; \tau) + \nu_s^{(i)}(\nu, s, t; \tau) \lambda_{i\nu}(\nu, s, t) - \nu_\nu^{(i)}(\nu, s, t; \tau) \lambda_{is}(\nu, s, t) \equiv 0,$$

которое тоже вытекает из тавтологии

$$\mu \equiv \nu^{(i)}(\nu^{(i)}(\mu, \xi, \tau; t), s^{(i)}(\mu, \xi, \tau; t), t; \tau), \quad \mu \in \mathrm{E}^m, \quad (\xi, \tau) \in \mathrm{P}, \quad t \in T.$$

Таким образом, при условии существования классического решения x системы (1.1) эквивалентность дифференциальной (3.5) и интегральной (3.6) систем доказана.

4. Построение корректных смешанных условий

Смешанные условия для системы (1.1) сконструируем по следующей схеме. Вначале выясним, каким образом можно определить такие условия для инвариантной системы (3.5), а затем трансформируем их на систему (1.1), пользуясь взаимно однозначным отображением (3.1).

Из (3.6) видно, что для построения единственного решения инвариантной системы (3.5) нужно его “закрепить” в начальных точках $(\mu^{(i)}, \xi^{(i)}, \tau^{(i)})$ каждой бихарактеристики $\xi = s^{(i)}(\nu, s, t; \tau)$, $\nu \in \mathrm{E}^m$, $(s, t) \in \mathrm{P}$, как если бы речь шла о постановке условий Коши для бесконечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.5).

Введем в рассмотрение функции $\sigma_i{=}\sigma_i(\mu,\xi,\tau)$, $i{=}1,2,\ldots,n$, положив $\sigma_i{=}\nu_0+\langle\lambda_{i\nu}(\mu,\xi,\tau),\nu\rangle$, где $\widehat{\nu}=(\nu_0,\nu)$ — вектор внешней нормали к поверхности Ω области P в точке (ξ,τ), а μ — произвольный вектор из E^m. С помощью этих функций удобно классифицировать произвольную тройку (μ,ξ,τ), $\mu\in\mathrm{E}^m$, $(\xi,\tau)\in\Omega$, как начальную или конечную точку конкретной бихарактеристики. Будем говорить, что такая тройка является начальной (конечной) точкой бихарактеристики $s=s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t)$, если $\sigma_i<0$ $(\sigma_i>0)$. Введенное определение представляется вполне естественным аналитическим критерием проверки геометрического факта входа в область P или выхода из нее в точке (ξ,τ) гладкой кривой с касательным вектором $(ds,dt)=(\lambda_{i\nu}(\mu,\xi,\tau),1)dt$. Случай $\sigma_i=0$ соответствует "гладкому прикосновению" бихарактеристики к границе области и не позволяет на основе используемой выше локальной информации идентифицировать точку (μ,ξ,τ) более детально. Вообще говоря, она может быть и начальной, и конечной, и промежуточной. Вместе с тем, очевидная "экзотичность" равенства $\sigma_i=0$ предопределяет нулевую меру множества тех точек из P, для которых оно влияет на решение гиперболической системы.

Обратимся теперь к рассмотрению механизма смешанных условий, зафиксировав для простоты некоторую точку $(\xi,\tau)\in\Omega$. Знак функции $\sigma_i=\sigma_i(\mu,\xi,\tau)$ служит индикатором всей тройки (μ,ξ,τ) в том смысле, что либо требует "закрепить" значение инварианта Римана $r_i(\mu,\xi,\tau)$ "извне" при $\sigma_i<0$, либо, если $\sigma_i\geq 0$, запрещает такое закрепление, т. к. в этом случае значение $r_i(\mu,\xi,\tau)$ определяется при решении дифференциальной системы в области P с использованием условия Коши в точке, соответствующей данной бихарактеристике. Предположим, что $\sigma_i<0$ при выбранном $\mu\in\mathrm{E}^m$. Значит, для $r_i(\mu,\xi,\tau)$ начальное условие ставить нужно, хотя оно не может быть совсем произвольным, ибо в силу (3.1) тождество $r_i(\mu,\xi,\tau)=\langle\ell^{(i)}(\mu,\xi,\tau),x(\xi,\tau)\rangle$ должно сохраняться для всех $\mu\in\mathrm{E}^m$, на которых функция $\sigma_i(\mu,\xi,\tau)<0$. Другими словами, следует обеспечить корректное взаимодействие между различными проекциями $r_i(\mu,\xi,\tau)$ одного и того же вектора $x(\xi,\tau)$ на направления $\ell^{(i)}(\mu,\xi,\tau)$.

Заметим, что среди всевозможных векторов $\mu\in\mathrm{E}^m$ особую роль играет подвектор ν вектора внешней нормали $\widehat{\nu}$ к поверхности Ω в точке (ξ,τ), т. к. лишь с его помощью можно выяснить, приходит в точку (ξ,τ) (т. е. находится внутри P при $t<\tau$) или уходит из нее (т. е. находится внутри P при $t>\tau$) произвольная бихарактеристика $s=s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t)$, $\mu\in\mathrm{E}^m$. Кроме того, функции σ_i вычисляются гораздо проще при условии $\mu=\nu(\xi,\tau)$. Действительно, в силу (2.3) имеем $\sigma_i(\nu,\xi,\tau)=\nu_0+\lambda_i(\nu,\xi,\tau)$. Приведенные соображения говорят в пользу выбора в качестве "базового" направления в произвольной точке $(\xi,\tau)\in\Omega$ именно вектора ν.

Определим вспомогательные конструкции, существенно упрощающие запись начально-краевых условий. Вначале построим матрицу

$$B(\xi,\tau)=\nu_0(\xi,\tau)\mathrm{I}+\sum_{j=1}^{m}\nu_j(\xi,\tau)A_j(\xi,\tau).$$

С учетом соотношений (1.3) для нее справедливо также равенство

$$B(\xi,\tau)=\mathcal{P}(\nu(\xi,\tau),\xi,\tau)\Sigma(\xi,\tau)\mathcal{L}'(\nu(\xi,\tau),\xi,\tau),$$

в котором $\Sigma=\operatorname{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\}$. Через Σ^- обозначим матрицу, получаемую из матрицы Σ заменой положительных диагональных значений на нули. Тогда начально-граничные условия для инвариантного вектора $r(\nu,\xi,\tau)$ можно записать в виде

$$\Sigma^-(\xi,\tau)[r(\nu,\xi,\tau)-r^0(\xi,\tau)]=0. \tag{4.1}$$

Здесь $r^0=r^0(\xi,\tau)$ считаем заданной функцией. Ясно, что равенство (4.1) эквивалентно соотношениям

$$r_i(\nu,\xi,\tau)=r_i^0(\xi,\tau),\sigma_i(\nu,\xi,\tau)<0,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{4.2}$$

Теперь с помощью линейного невырожденного преобразования (3.1) нетрудно переписать условия (4.1) в терминах переменных x. Положив $x^0(\xi,\tau)=\mathcal{P}(\nu(\xi,\tau),\xi,\tau)r^0(\xi,\tau)$ и $B^-(\xi,\tau)=$

$\mathcal{P}(\nu(\xi,\tau),\xi,\tau)\Sigma^{-}(\xi,\tau)\mathcal{L}'(\nu(\xi,\tau),\xi,\tau)$, будем иметь

$$B^{-}(\xi,\tau)[x(\xi,\tau)-x^{0}(\xi,\tau)]=0. \tag{4.3}$$

Понятно, что условия (4.3) в отличие от условий (4.1) ввиду недиагональности матрицы B^{-} не допускают покомпонентную расшифровку типа (4.2).

Покажем теперь, как следует определять, не противореча тождеству (3.1), начально-граничные условия для инвариантов $r_i(\mu,\xi,\tau)$, если $\sigma_i(\mu,\xi,\tau)<0$ и $\mu\neq\nu$. Здесь, разумеется, уже нельзя использовать компоненты r_i^0 вектор-функции r^0, соответствующие неравенствам $\sigma_i(\mu,\xi,\tau)\geq 0$, которые автоматически игнорируются условиями (4.1)–(4.3). Если $\sigma_i(\nu,\xi,\tau)\geq 0$, то значение $r_i(\nu,\xi,\tau)$ находится как результат интегрирования системы (3.5). Добавив к этим компонентам условия (4.2), будем иметь в распоряжении весь вектор $r(\nu,\xi,\tau)$, что позволяет подсчитать значение $x(\xi,\tau)$ по формуле (3.1). Окончательно имеем: если $\sigma_i(\mu,\xi,\tau)<0$, то $r_i(\mu,\xi,\tau)=\langle\ell^{(i)}(\mu,\xi,\tau),x(\xi,\tau)\rangle$. Таким образом, полностью сформировать граничные условия для системы (3.5) в момент времени τ можно только после того, как эта система проинтегрирована в полосе $[t_0,\tau]$.

5. Существование и единственность обобщенного решения

Как уже отмечалось, дифференциальная система (3.5) и интегральная система (3.6) на гладких решениях эквивалентны. В то же время, в отличие от дифференциальной, интегральная система не теряет смысл и в том случае, когда входные параметры задачи — вектор-функции f и r^0 — разрывны по независимым переменным. Как известно [1], именно это обстоятельство позволяет определить обобщенное решение исходной дифференциальной системы как решение интегральной. Для одномерных инвариантных систем такое построение обобщенного решения использовалось в [11], [16]. Принципиальным отличием рассматриваемой здесь интегральной системы для инвариантов Римана от аналогичной системы из [11], [16] является последнее слагаемое в (3.6), содержащее частные производные по пространственным переменным от недиагональных компонент решения. Однако можно показать, что почти всюду в P величина евклидовых норм этих производных и решения r имеет одинаковый порядок. После установления такой оценки доказательство существования и единственности решения интегральной системы (3.6) по существу проходит по схеме [11], использующей метод последовательных приближений и принцип интегрального сжатия.

Существование и единственность решения инвариантной системы наряду с наличием взаимно однозначного преобразования (3.1) адекватно построению обобщенного решения исходной системы (1.1) с начально-граничными условиями (4.3). Укажем теперь оценку решения x в точках области P через входные параметры f и x^0 начально-краевой задачи (1.1), (4.3).

Для произвольной фиксированной точки $(s,t)\in$ P рассмотрим характеристики $\mathcal{X}^{(i)}=\mathcal{X}^{(i)}(s,t)$, положив

$$\mathcal{X}^{(i)}=\{(\xi,\tau)\in \mathrm{P},\ \xi=s^{(i)}(\nu,s,t;\tau),\ \nu\in \mathrm{E}^m,\ \|\nu\|=1\},\quad i=1,2,\dots,n.$$

Заметим, что в силу равенств (3.2) вектор $\mu=\nu^{(i)}(\nu,s,t;\tau)$ всегда ортогонален векторам $(M_1^{(i,k)},M_2^{(i,k)},\dots,M_m^{(i,k)})$, $i,k=1,2,\dots,n$, $i\neq k$, а значит, в системах (3.5), (3.6) градиенты по s инвариантов Римана r_k направлены по касательной к поверхностям $\mathcal{X}^{(i)}$. Основываясь на этом факте и тождествах (3.1), можно получить оценку

$$\|x(s,t)\|\leq K\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\int\limits_{\Omega\cap\mathcal{X}^{(i)}}\|x^0\|d\omega+\int\limits_{\mathcal{X}^{(i)}}\|f\|d\omega\Bigg)+\int\limits_{\Omega\cap\partial\triangle(s,t)}\|x^0\|d\omega+\iint\limits_{\triangle(s,t)}\|f\|d\xi d\tau\Bigg],$$

которая справедлива почти всюду в P. Здесь $K>0$ — некоторая константа; $\triangle(s,t)$ — область зависимости решения x в точке $(s,t)\in$ P, являющаяся объединением всех характеристических конусов, охватываемых поверхностями $\mathcal{X}^{(i)}(s,t)$, $i=1,2,\dots,n$; $\partial\triangle(s,t)$ — граница области $\triangle(s,t)$.

Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.А. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* – М.: Наука, 1978. – 687 с.
2. Годунов С.К. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1979. – 392 с.
3. Friedrichs K.O. *The identity of weak and strong extensions of differential operator* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1944. – V. 55. – P. 132–151.
4. Friedrichs K.O. *Symmetric hyperbolic linear differential equations* // Comm. Pure Appl. Math. – 1954. – V. 7. – № 2. – P. 345–392.
5. Friedrichs K.O. *Symmetric positive linear differential equations* // Comm. Pure Appl. Math. – 1958. – V. 11. – P. 333–418.
6. Lax P.D., Phillips R.S. *Local boundary conditions for dissipative linear differential operators* // Comm. Pure Appl. Math. – 1960. – V. 13. – P. 427–455.
7. Sarason L. *On weak and strong solutions of boundary value problems* // Comm. Pure Appl. Math. – 1962. – V. 15. – P. 237–288.
8. Sarason L. *On boundary value problems for hyperbolic equations* // Comm. Pure Appl. Math. – 1962. – V. 15. – P. 373–395.
9. Phillips R.S., Sarason L. *Singular symmetric first order differential operators* // J. Math. and Mech. – 1966. – V. 15. – № 2. – P. 235–271.
10. Терлецкий В.А. *Вариационный принцип максимума в управляемых системах многомерных гиперболических уравнений* // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск, 2000. – № 4. – С. 93–110.
11. Терлецкий В.А. *Необходимые условия оптимальности и численные методы оптимизации в системах полулинейных гиперболических уравнений*: Автореф. дис. … канд. физ.-матем. наук. – Л., 1983. – 17 с.
12. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. *Методы оптимизации и их приложения.* Ч. 2. *Оптимальное управление.* – Новосибирск: Наука, 1990. – 151 с.
13. Vasiliev O.V., Terletsky V.A., Arguchintsev A.V. *Iterative processes in optimization of semilinear hyperbolic system* // 11-th IFAC World Congress. – Tallinn, 1990. – V. 6. – P. 216–220.
14. Васильев О.В., Терлецкий В.А. *Итерационные процессы решения задач оптимального управления в системах с сосредоточенными и распределенными параметрами, основанные на принципе максимума Л.С. Понтрягина* // Оптимизация: Модели. Методы. Решения. – Новосибирск: Наука, 1992. – С. 35–54.
15. Васильев О.В., Терлецкий В.А., Болдонов А.В. *К исследованию некоторых задач оптимального управления, возникающих в обратной проблеме цунами* // Методы численного анализа и оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 3–33.
16. Терлецкий В.А. *Вариационный принцип максимума в управляемых системах одномерных гиперболических уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С.82–90.
17. Ланкастер П. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1982. – 269 с.
18. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – М.: Мир, 1989. – 625 с.
19. Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1964 г. – 272 с.

Иркутский государственный университет

Поступила
24.08.2001