Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Специальность: - Математика с дополнительной специальностью информатика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(дипломная работа)

«*Сурәтләр методы” буенча методик кулланма*»

Студентки 5го курса: Накиповой Алсу Наилевны

Работа завершена:

"___"_____ 2014г. _____

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доц.

"___"_____ 2014г. _____

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., проф.

"___"_____ 2014 г. _____

Казань – 2014

Эчтәлек:

I бүлек:

Кереш 3

II бүлек:

Үзәк проекцияләү 5

Параллель проекцияләү 8

Параллель проекцияләү ярдәмендә яссы һәм пространство фигураларын сурәтләү 10

Аксонометрия. Польке-Шварц теоремасы 26

Нокта, туры һәм яссылыкның сурәтләре 35

III бүлек:

Позицион мәсьәләләр. Тулы һәм тулы булмаган сурәтләр .....

Geo Gebra компьютер программасын кулланып демонстрация материаллары төзү Һәм мәсәләләр чишү 44

IV бүлек:

Мөстәкыйль эшләү өчен мәсьәләләр 44

V бүлек:

Йомгаклау 60

Кулланылган әдәбият 61

I бүлек. Кереш.

Бу диплом эше югары педагогик уку йортларында математика факультетының татар группаларында укучы студентларга ярдәмлек кулланма буларак тәкъдим ителә. Ул “Проектив пространство. Сурәтләр методы” курсы программасының “Сурәтләр методы” темасы белән яраклаштырылып төзелгән һәм үз эченә биш бүлекне ала.

I бүлек: кереш;

II бүлек: теория өлеше 2 курс IV семестр лекцияләр җыентыгы һәм педагогик уку йортлары өчен төзелгән китаплар һәм ярдәмлекләр нигезендә тупланган. Ул түбәндәге темалардан гыйбарәт:

- үзәк проекцияләү,
- параллель проекцияләү,
- параллель проекцияләү ярдәмендә яссы һәм пространство фигураларын сурәтләү,
- аксонометрия. Польке-Шварц теоремасы,
- нокта, туры һәм яссылыкның сурәтләре;

III бүлек: позицион һәм метрик мәсьәләләрне чишүнең төрле ысуллары белән таныштыра ;

IV бүлек: мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мәсьәләләр тәкъдим ителә. Анда 26 вариант, һәр вариантка җидешәр мәсьәлә бүлеп бирелгән. Мәсьәләләр сайлаганда төрле чыганаклар, шул исәптән киң танылган мәсьәләләр җыентыклары файдаланылды;

V бүлек: йомгаклау.

“Сурәтләр методы” темасының төп максаты булып студентларны бу метод ярдәмендә пространстводагы фигураларны яссылыкта сурәтләргә мөмкинлек бирүче аңлатмаларны, төшенчәләрне һәм теоремаларны өйрәнү , шулай ук булачак математика укытучыларына бик кирәкле булган системалы караш тәрбияләү тора.

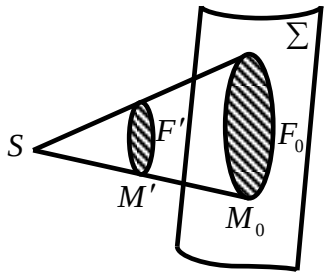
Пространство фигураларын яссылыкта сурәтләү методлары нигезендә үзәк һәм параллель проекцияләү тора. Шуңа күрә бу методларга аеруча тукталып китербез.

Диплом эшендә бирелгән барлык билгеләмә, теоремаларны үзләштерү өчен сызымнар кулланылган һәм алар аңлар өчен гади телдә язылган.

Бу методик кулланмадан студент үзенә кирәк булган мәгълүматны таба, куллана ала.

II бүлек: Үзәк проекцияләү.

1. E_3 евклид пространствосын үзбулмаган элементлар кушып, $\overline{E_3}$ киңәйтелгән пространствосына кадәр тулыландырыйк. $\overline{E_3}$ тә нинди дә булса $\sum$ яссылыгын, F' фигурасын һәм $S|S \notin \sum, S \notin F'$ ноктасын алыйк. $\pi : F' \to \sum$ чагылдыруы $\pi(M') = M_0 = (SM') \cap \sum, \forall M' \in F'$ законы буенча F' фигурасын S үзәгеннән $\sum$ яссылыгына ***проекцияләү*** дип атала (рәс.1).



Рәс.1

$\sum$ яссылыгын ***проекцияләр яссылыгы*** (яки сурәтләр яссылыгы), F' - ***оригинал***, $\pi(F') = F_0$ - F' оригиналының $\sum$ яссылыгына ***проекциясе*** дип атыйлар.

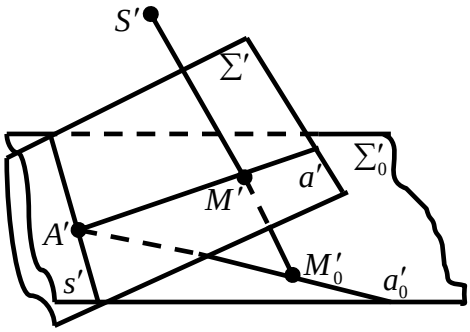
Гадәттә проекцияләр яссылыгы булып кәгазь бите, яки класс тактасы яссылыгы тора. Кайбер очракларда F_0 фигурасы кәгазь битенә сыймаскада мөмкин. Шуңа күрә $\sum$ яссылыгында F' оригиналының F_0 проекциясен табып, без $\sum$ яссылыгын p охшаш үзгәртүенә китерә алабыз. $p(F_0) = F$ фигурасы кәгазь битендә безгә уңайлы булган торышта һәм үлчәмдә булырга тиеш. F фигурасы F' оригиналының ***сурәте*** дип атала.

Кайбер вакытта p охшаш үзгәртүенең кирәге булмый, һәм ул вакытта $p = e$ дип алалар (e - $\sum$ яссылыгын бердәй үзгәртү). Бу очракта $F = F_0$, ягъни оригиналның сурәте булып аның проекциясе хезмәт итә.

F'- яссылык булган кирәкле аерым бер очракны карыйк. Ике $\sum', \sum'_0 \subset \overline{E}_3$ яссылыкларын һәм $S'|S' \notin \sum', S' \notin \sum'_0$ (рәс.2) ноктасын алыйк.

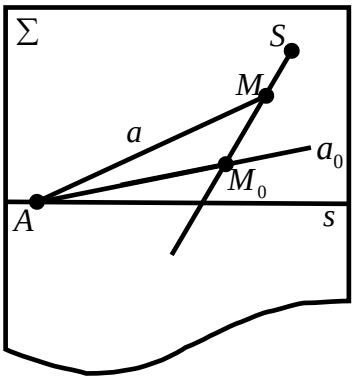
$\sum'$ яссылыгын S' үзәгеннән $\sum'_0$ яссылыгына π_1 проекцияләү $\pi_1 : \sum' \to \sum'_0$ биектив чагылдыру булып тора. Бу чагылдыру $\forall a' \subset \sum'$ турысын $\forall a'_0 \subset \sum'_0$

турысына күчерә. Димәк, бу проектив чагылдыру. Ләкин бу Σ' яссылыгын Σ'_0 яссылыгына проектив чагылдыруның гомуми очрагы булмый, чөнки каралган очракта барлык нокта парларын тоташтыручы $(M'M'_0)$ турылары S' үзәкле турылар бәйләменә керергә тиешләр. Бу үзлеккә ия булган $\Sigma' \to \Sigma'_0$ чагылдыруы ***перспектив чагылдыру*** дип атала. Билгеле ки, a' һәм a'_0 турыларының кисешү ноктасы A' $s' = \Sigma' \cap \Sigma'_0$ турысында ята.



Рәс.2

$F' = \{S', \Sigma', \Sigma'_0\}$ фигурасын, Σ яссылыгын һәм $S_0 | S_0 \notin \Sigma, S_0 \notin F'$ ноктасын алыйк. F' фигурасының S_0 үзәгеннән Σ яссылыгына $\pi : F' \to \Sigma$ проекцияләүен карыйк. $\pi(S') = S, \pi(s') = s$ булсын (рәс.3).



Рәс.3

Алда әйтеп үтелгәннәр буенча, $\pi|_{\Sigma'} : \Sigma' \to \Sigma$ һәм $\pi|_{\Sigma'_0} : \Sigma'_0 \to \Sigma$ π чагылдыруын кысулар проектив чагылдыру булып торалар. Шуңа күрә чагылдыруларның тапкырчыгышы (композиция) $\left(\pi|_{\Sigma'_0}\right) \cdot \pi_1 \cdot \left(\pi|_{\Sigma'}\right)^{-1} = f$ Σ яссылыгын проектив үзгәртү була.

Әгәр $\pi_1(M')=M_0', \pi(M')=M$ һәм $\pi(M_0')=M_0$ булса, $f(M)=M_0$ була. Моннан, f үзгәртүендә $A\in s$ ноктасы инвариант нокта булып тора, һәм, димәк, f - s күчәрле гомология. S - гомология үзәге. Чыннан да, $(M'M_0')$ турысы S' ноктасы аша үтә. Гомуми очракта, π проекцияләүендә бу туры $S=\pi(S')$ ноктасы аша үтүче (MM_0) турысына күчә.

Шулай итеп, $M, M_0=f(M)$ нокталар парын тоташтыручы һәрбер туры $\pi(S)$ бәйләменә керә, шуңа күрә S - f гомологиясенең үзәге булып тора. Σ_0' яссылыгын ***төп яссылык,*** π_1 проекцияләүен- ***эчке проекцияләү*** , π ны- ***тышкы проекцияләү,*** M_0' ноктасын (M' ноктасының эчке проекциясе) M' ***ноктасының нигезе*** дип атаячакбыз. Бу терминнарны кулланып алда табылган нәтиҗәне түбәндәге теорема аша күрсәтергә мөмкин:

Теорема 1: π тышкы проекцияләү Σ сурәтләр яссылыгында f гомологиясен урнаштыра. Бу гомология $\forall M'\in\Sigma'$ ноктасының M проекциясен аның нигезе $M_0'\in\Sigma_0'$ ның M_0 проекциясенә күчерә. f гомологиясенең күчәре булып $s=\pi(\Sigma'\cap\Sigma_0')$ турысы, ә үзәге булып $\pi(S')$ ноктасы тора. Монда S' - эчке проекцияләүнең үзәге.

2. $\pi: F'\to\Sigma$ S үзәгеннән проекцияләү булсын (рәс. 1). Әгәр S үз нокта булса, π ***үзәк проекцияләү***, ә әгәр S үзәге үзбулмаган нокта булса, ***параллель проекцияләү*** була (барлык проекцияләнүче (SM') турылары параллель турылар бәйләменә керәчәкләр).

F' фигурасының F сурәтен билгеләнеше буенча я үзәк, я параллель проекцияләү ярдәмендә башкаралар. Сурәтләр төзегәндә түбәндәге шартларны истә тотарга кирәк:

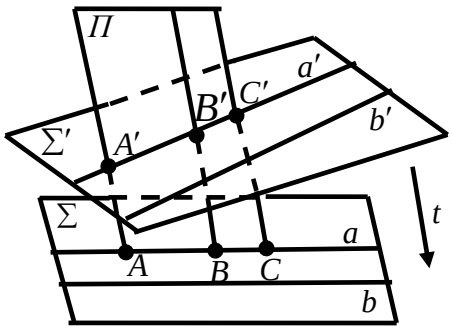
1) F сурәте ***дөрес*** булырга тиеш, ягъни ул оригиналның проекциясенә охшаш булырга тиеш;

2) оригиналны пространствода ***күзалларга мөмкинлек*** бирергә тиеш;

3) ***ирекле башкарыла торган*** булырга тиеш.

Параллель проекцияләү.

1. π - F' фигурасының S үзәгеннән Σ яссылыгына параллель проекцияләү булсын. $S \in \overline{E}_3$ үзбулмаган ноктасы E_3 пространствосында юнәлешне билгели, ягъни параллель турыларның бәйләнешен билгели. Бу юнәлеш (димәк, S ноктасы да) нинди дә булса үз булган t турысын бирү белән билгеләнә. Моны π проекцияләүе t юнәлеше буенча башкарыла дип әйтәләр.



Рәс. 4

F' - Σ' ның нинди дә булса яссылыгы булган очракны карыйк. Проекцияләүнең юнәлешен билгеләүче t турысы һәрбер $\Sigma, \Sigma' \subset E_3$ яссылыгын кисеп үтә дип уйлыйк (рәс. 4). Моннан соң t юнәлеше буенча π проекцияләүе $\pi : \Sigma' \to \Sigma$ биектив чагылдыруын билгели.

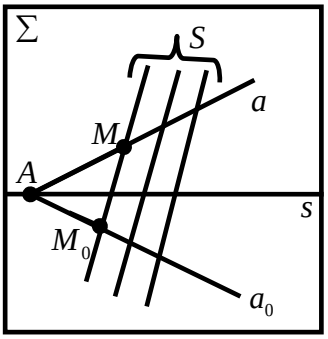
$a' \subset \Sigma'$ турысын алыйк. a' турысының $A', B', C', ...$ нокталарын проекцияләүче барлык турылар бер П яссылыгында яталар. $a = \Pi \cap \Sigma$ турысы a' турысының Σ яссылыгына проекциясе булып тора. П яссылыгының a' һәм a турылары параллель $(A'A), (B'B), (C'C)$ турылары белән кисешкәннәр. Моннан $(A'B', C') = (AB, C)$.

Шулай итеп, $\pi : \Sigma' \to \Sigma$ параллель проекцияләүе өч нокта мөнәсәбәтен саклый. Димәк, π - Σ' яссылыгының Σ яссылыгына аффинча чагылдыру була. Ләкин бу Σ' яссылыгын Σ га аффинча чагылдыруның гомуми очрагы түгел, чөнки монда чагылдыру вакытында нокталарны тоташтыручы барлык турылар параллель турылар бәйләменә керәләр. Мондый чагылдыруны ***перспектив-аффинча чагылдыру*** дип атыйлар.

Әгәр Σ' яссылыгында ике параллель a' һәм b' турыларын алсак, аларның Σ яссылыгына проекцияләре a һәм b параллель булуын әйтеп китәргә кирәк (яссылыкны яссылыкка аффинча чагылдыру вакытында параллель турылар параллель турыларга күчә).

2. Параллель проекцияләү очрагына *Теорема 1* не кулланыйк. Эчке һәм тышкы проекцияләү характерыннан һәм $\theta, \theta' \subset E_3$ яссылыкларының урнашуыннан түбәндәге аерым очракларны карарга мөмкин.

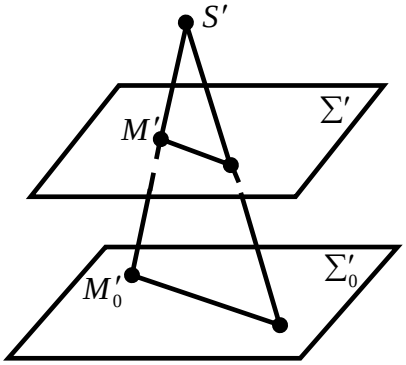
1) π_1 һәм π- проекцияләүләр (S' һәм S_0 үз булмаган нокталар), $s' = \Sigma' \cap \Sigma'_0$ үзбулган туры (ләкин s' турысы һәм π_1, π проекцияләүләренең юнәлешләре компланар түгел). Сурәтләр яссылыгында үзбулган $\pi(s') = s$ турысын, үзбулмаган $\pi(S') = S$ ноктасын табабыз (чөнки $S = (S'S_0) \cap \Sigma$, ә $(S'S_0)$ үзбулмаган туры), монда $S \notin s$. Димәк, *Теорема 1* дә әйтеп үтелгән f гомологиясе бу очракта s күчәре белән “туганлаша” һәм $M' \in \Sigma'$ ноктасының M проекциясен $M'_0 \in \Sigma'_0$ нигезенең M_0 проекциясенә күчерүче туганлык юнәлеше (MM_0) була (рәс. 5).

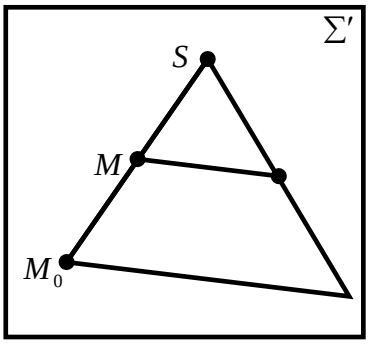


Рәс. 5

2) π_1-үзәк, π- параллель проекцияләү, $\Sigma' \| \Sigma'_0$ (рәс. 6).

Бу очракта f гомологиясенең үзбулган S үзәге һәм үзбулмаган s күчәре була, һәм, димәк, S үзәкле һәм $k \left| \overrightarrow{SM_0} = k\overrightarrow{SM} \right.$ коэффициентлы гомотетия килеп чыга (рәс. 7).

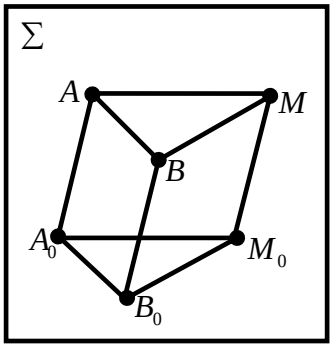




Рәс. 6 **Рәс. 7**

π параллель проекцияләүе турыдагы өч нокта мөнәсәбәтен саклавын истә тотып, $\overrightarrow{S'M'_0} = k\overrightarrow{S'M'}$ шартыннан k ны табарга мөмкин.

3) π_1 һәм π - проекцияләүләр; $\Sigma' \| \Sigma'_0$. Σ яссылыгында f гомологиясе үзбулмаган S үзәгенә һәм үзбулмаган s күчәренә ия, димәк, ул $\overrightarrow{MM_0}$ векторы белән билгеләнүче параллель күчерү булып тора (рәс. 8).



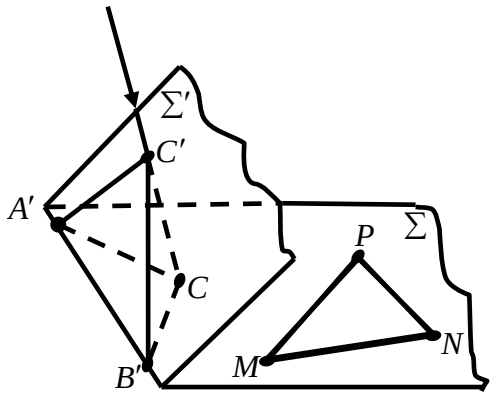
Рәс. 8

f гомологиясенең карап үтелгән очраклары еш кына сурәтләр төзегәндә кулланыла. Башка очракларда S' һәм S_0 нокталарын сайлауда һәм Σ' һәм Σ'_0 яссылыкларының үзара урнашуында *Теорема 1* не кулланырга кирәк.

Параллель проекцияләү ярдәмендә яссы һәм пространство фигураларын сурәтләү.

Параллель проекцияләүдә берничә геометрик фигураларның сурәтләрен карыйк.

1. Өчпочмак. Σ' яссылыгында $A'B'C'$ өчпочмагы бирелгән булсын (рәс. 9).



Рәс. 9

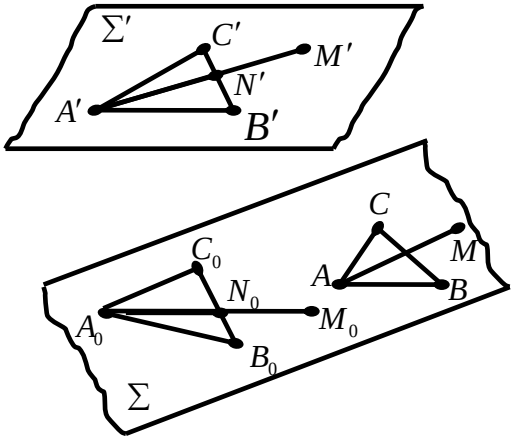
$(A'B')$ турысы аша $\Sigma \neq \Sigma'$ яссылыгын үткәреп, нинди дә булса MNP өчпочмагын алабыз. Σ яссылыгының $[A'B']$ ягында MNP өчпочмагына охшаш $A'B'C$ өчпочмагын төзибез ($\Delta A'B'C \sim \Delta MNP$). Әгәр $A'B'C'$ өчпочмагын $(C'C)$ юнәлеше буенча Σ яссылыгына проекцияләсәк, без $A'B'C$ өчпочмагын табачакбыз (ул MNP өчпочмагына охшаш).

Шулай итеп, бирелгән $A'B'C'$ өчпочмагының параллель проекциясе булып теләсә нинди алдан бирелгән өчпочмакка охшаш өчпочмак хезмәт итә. Моннан без бирелгән $A'B'C'$ өчпочмагының сурәте булып теләсә нинди MNP өчпочмагы хезмәт итүен күрәбез.

Теорема 2: Әгәр Σ сурәтләр яссылыгында параллель проекцияләү вакытында Σ' яссылыгында табылган нинди дә булса өч ноктаның гомуми торышы сурәтләре билгеләнгән булса, hәм өстәвенә, проекцияләү юнәлеше Σ' яссылыгына параллель булмаса, Σ' яссылыгының теләсә нинди ноктасының сурәтен төзеп булачак.

■ $A_0, B_0, C_0 \in \Sigma$ нокталары гомуми торыштагы $A', B', C' \in \Sigma'$ нокталарының параллель проекцияләре булсын (рәс. 10). Проекцияләүнең юнәлеше Σ' яссылыгына параллель булганлыктан A_0, B_0, C_0 нокталары бер турыда ятмыйлар. Ирекле $M' \in \Sigma'$ ноктасын алыйк. $N' = (A'M') \cap (B'C')$ булсын. N'

һәм M' нокталары $(B_0C_0, N_0) = (B'C', N'), (A_0N_0, M_0) = (A'N', M')$ шартларын канәгатьләндерүче $N_0, M_0 \in \Sigma$ нокталарына проекцияләнәчәкләр.



Рәс. 10

$ABC \subset \Sigma$ өчпочмагы $A'B'C'$ өчпочмагының сурәте буларак хезмәт итә (һәм, димәк, $\Delta ABC \sim \Delta A_0B_0C_0$). $A_0B_0C_0$ өчпочмагын ABC өчпочмагына күчерүче p охшашлыгы N_0 һәм M_0 нокталарын $(BC, N) = (B_0C_0, N_0), (AN, M) = (A_0N_0, M_0)$ шартларын канәгатьләндерүче N һәм M нокталарына күчерә һәм, димәк,

$$(BC, N) = (B'C', N'), \qquad \text{(а)}$$

$$(AN, M) = (A'N', M'). \qquad \text{(в)}$$

(а) һәм (в) тигезлекләренең уң кисәкләре билгеле (Σ' яссылыгының оригиналы буенча билгеләнә). Аларны кулланып без башта $N \in (BC)$ ноктасын, ә аннан соң $M \in (AN)$ ноктасын төзибез. Шул M ноктасы M' ноктасының сурәте булачак.

2. Дүртпочмак. Σ' яссылыгында $A'B'C'D'$ дүртпочмагы бирелгән булсын. Алда исбатланган *Теорема 2* буенча аның Σ яссылыгына сурәте булып,

$$(AC, E) = (A'C', E'), \qquad (1)$$

$$(BD, E) = (B'D', E'), \qquad (2)$$

шартларын канәгатьләндерүче $ABCD$ дүртпочмагы хезмәт итә (E' - оригинал дүртпочмакның диагональләре кисешү ноктасы). Әгәр Σ' һәм Σ

яссылыкларының үзара торышы, проекцияләүнең юнәлеше бирелгән булса, Σ яссылыгын һәм проекцияләү юнәлешен Σ яссылыгындагы A, B, C нокталары (A', B', C' нокталарының сурәтләре) алдан бирелгән өчпочмакның түбәләре булырлык итеп алырга мөмкин. Өстәвенә дүртпочмакның дүртенче D' түбәсенең сурәте (1), (2) тигезлекләреннән табыла.

Дүртпочмакларның аерым төр проекцияләрен карыйк:

а) Трапеция. Алда әйтелгәннәр буенча, трапециянең оригиналы трапеция белән сурәтләнә, өстәвенә оригинал һәм сурәтнең диагональләре кисешү нокталары өчен (1) тигезлеге үтәлә ($[A'B']$ һәм $[D'C']$ нигезле трапеция өчен $(A'C', E') = (B'D', E')$).

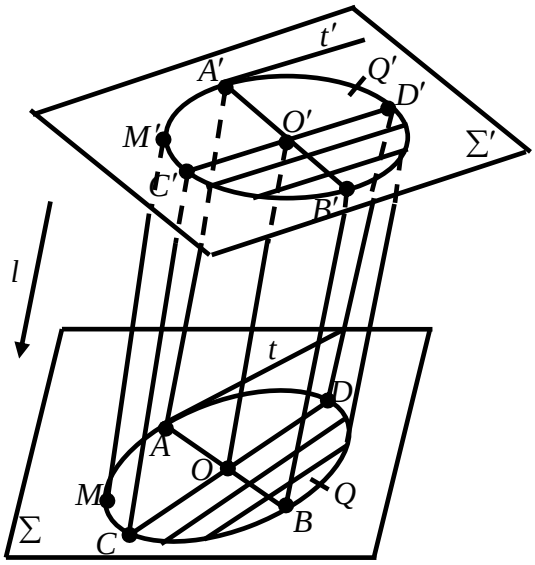
б) Параллелограмм (ромб, турыпочмак, квадрат) нинди дә булса параллелограмм рәвешендә сурәтләнә. Гомуми очракта, проекцияләү вакытында почмакның үлчәме сакланмавын истә тотарга кирәк.

3.n-почмак. *Теорема 1* буенча, пространствода бирелгән n-почмакны кәгазь битенә (яки класс тактасына) сурәтләгәндә безгә аның нинди дә булса өч түбәсенең сурәтен белү җитә. Калган $n-3$ түбәнең сурәтләре төзү нәтиҗәсендә табыла.

4. Әйләнә. Σ' яссылыгында O' үзәкле Q' әйләнәсе бирелгән булсын. Аны l юнәлеше буенча Σ яссылыгына проекциялибез. $M' \in Q'$ ноктасы Q' әйләнәсен төзегәндә проекцияләүче $(M'M)$ турысы Σ яссылыгы белән Q эллипсы буенча кисешүче эллиптик цилиндрны төзи. Димәк, Q' әйләнәсенең Σ яссылыгына параллель проекциясе булып Q эллипсы хезмәт итә (рәс. 11). O' ноктасы - әйләнәнең бу нокта аша үтүче теләсә нинди хордасының уртасы. Димәк, O ноктасы (O' ноктасының проекциясе) - Q эллипсының үзе аша үтүче теләсә нинди хордасын урталай бүлә. Шулай итеп, Q' әйләнәсенең O' үзәге Q эллипсының O үзәгенә проекцияләнә.

Q' әйләнәсендә үзара перпендикуляр булган ике $(A'B')$ һәм $(C'D')$ диаметрларын алып, $(C'D')$ диаметрына параллель булган хордалар

үткәрәбез. Бу хордаларның урталары $(A'B')$ диаметрында яталар. Әйләнәнең $(A'B')$, $(C'D')$ диаметрлары Q эллипсының $(AB),(CD)$ диаметрларына проекцияләнәләр. Өстәвенә, эллипсның (CD) диаметрына параллель булган хордаларының урталары (AB) диаметрына керәләр. Ә бу димәк, (AB) һәм (CD) диаметрлары – иярешле диаметрлар дигән сүз.



Рәс.11

Шулай итеп, Q' әйләнәсенең үзара перпендикуляр диаметрлары Q эллипсының иярешле диаметрларына проекцияләнәләр.

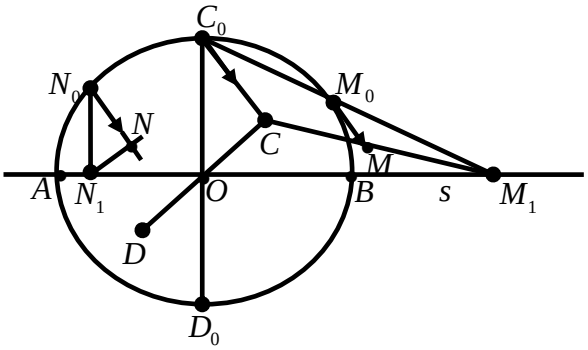
Q' әйләнәсенең A' ноктасындагы t орынмасы $(C'D')$ диаметрына параллель. t' турысы (AB) диаметрына иярешле булган (CD) диаметрына параллель булган $A \in Q$ ноктасы аша үтүче t турысына проекцияләнә. Димәк, t - Q эллипсының A ноктасындагы орынмасы.

Σ яссылыгының охшашлыгы эллипсны эллипска күчергәнлектән һәм өч нокта мөнәсәбәте сакланганлыктан, әйләнәнең сурәте булып эллипс тора. Өстәвенә, әйләнәнең перпендикуляр диаметрлары эллипсның иярешле диаметрлары аша сурәтләнә.

Эллипс нокталарын төзү ысулларын күрсәтик. Q эллипсының иярешле диаметрларында ятучы $[AB]$ һәм $[CD]$ кисемтәләре бирелгән булсын (гомуми очракта аның күчәрләрендә), өстәвенә $A,B,C,D \in Q$. Q

эллипсының A ноктасындагы t орынмасы (CD) диаметрына параллель булганлыктан, аны төзергә мөмкин. Хәзер Q эллипсын төзү мәсьәләсе дүрт ноктадан һәм аларның берсенә үткәрелгән орынмадан торучы икенче тәртиптәге овал кәкере нокталарын төзүгә кайтып кала. Q эллипсын башка ысул белән дә төзергә мөмкин. $[AB]$ кисемтәсендә, диаметрдагы кебек үк, Q_0 әйләнәсе төзибез һәм аның диаметры $[C_0D_0]\perp[AB]$ була (рәс. 12). Q эллипсы $s=(AB)$ күчәре һәм C_0, $C=f(C_0)$ нокталар пары белән бирелгән тугандаш f үзгәртүендә (f -кыек кысу) Q_0 әйләнәсенең сурәте булып тора. Q эллипсының $M=f(M_0)$ ноктасын төзү 12 нче рәсемдә күрсәтелә.

Әгәр тугандаш үзгәртүдә параллельлек саклануыннан файдалансак, эллипсның нокталарын төзүне түбәндәгечә башкарырга мөмкин. $N_0\in Q_0$ ноктасын алып, $(N_0N_1)\|(OC_0)$ турысы үткәрәбез, монда $N_1=(N_0N_1)\cap s, O=[AB]\cap[CD]$. Ул вакытта $N=f(N_0)$ ноктасы $(N_1N)\|f(OC_0)=(OC)$ турысында ята. $(N_0N)\|(C_0C)$ турысын үткәреп, $N=(N_1N)\cap(N_0N)$ ноктасын табабыз (рәс. 12).



Рәс. 12

Без төзегән Q эллипсының һәрбер ноктасы өчен аның O үзәгенә карата симметрик нокта шулай ук Q эллипсына керә.

Эллипсының үзен сызмыйча, бирелгән тугандашлыкны кулланып, Q эллипсы белән бирелгән турының кисешү ноктасын, аның тагын бер иярешле диаметрлар парын, күчәрен һ.б. төзү авыр түгел.

Параллель проекцияләүнең ике төрен билгеләп китәләр:

а) кыекпочмаклы, проекцияләү юнәлеше Σ проекцияләр яссылыгына перпендикуляр булмаганда;

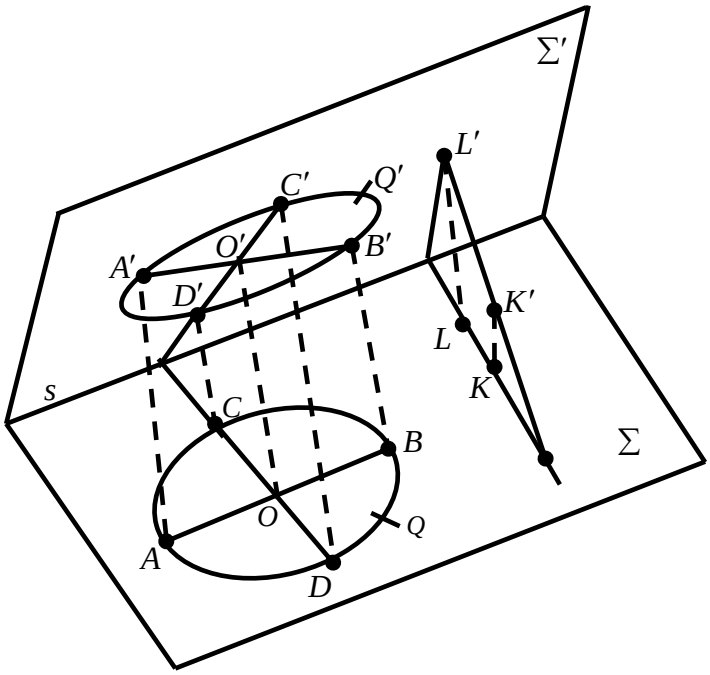
б) ортогональ, проекцияләү юнәлеше Σ проекцияләр яссылыгына перпендикуляр булганда.

Σ' яссылыгы Σ яссылыгына ортогональ проекцияләнсен. $Q' \subset \Sigma'$ әйләнәсе $Q \subset \Sigma$ эллипсына проекцияләнәчәк (рәс. 13). Әгәр диаметр $[A'B'] \| s = \Sigma' \cap \Sigma$ рәвешендә бирелсә, ул $[A'B']$ кисемтәсенә конгруэнт булган $[AB]$ кисемтәсенә проекцияләнәчәк, өстәвенә $(AB) \| s$. Q' әйләнәсенең $(A'B')$ га перпендикуляр булган $(C'D')$ диаметрын алыйк. Ул вакытта $(C'D') \perp s$, һәм өч перпендикуляр турындагы теорема буенча ($(C'D')$-авышма, (CD)-аның проекциясе),

$$(CD) \perp s \Rightarrow (CD) \perp (AB), \qquad (3)$$

$(A'B') \perp (C'D') \Rightarrow (AB)$ һәм (CD)- Q эллипсының иярешле диаметрларын табабыз. (3) не истә тотып, $[AB]$ һәм $[CD]$- Q эллипсының күчәрләре, өстәвенә $[AB]$- зур, ә $[CD]$- кече күчәр булуын әйтә алабыз.

$(K'L') \perp \Sigma'$ турысы һәм аның Σ яссылыгына (KL) проекциясе бирелгән булсын.

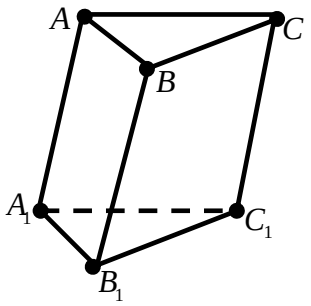


Рәс. 13

Ул вакытта $(KL)\perp s$ (өч перпендикуляр турындагы теорема) һәм, димәк, $(KL)\|(CD)$ була.

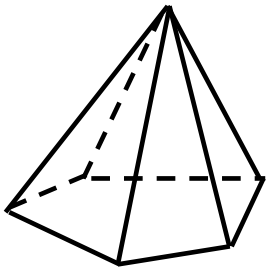
Шулай итеп, әгәр $(K'L')\perp\Sigma'$ булса, бу турының Σ яссылыгына проекциясе булып Q эллипсының кече күчәренә параллель булган (KL) турысы тора.

5. Призма. Әгәр a' һәм b' турылары параллель булса, аларның Σ сурәтләр яссылыгына параллель a һәм b проекцияләре шулай ук параллель булалар: $a'\|b'\Rightarrow a\|b$. Моннан призманың Σ яссылыгына сурәте призманың нигезен сурәтләүче ике конгруэнт күппочмактан (берсе икенчесеннән параллель күчерү нәтиҗәсендә килеп чыга) һәм берничә параллелограммнан (призманың ничә янкыры булса, шул кадәр була) торучы фигураны тәшкил итүе килеп чыга (рәс. 14).



Рәс. 14

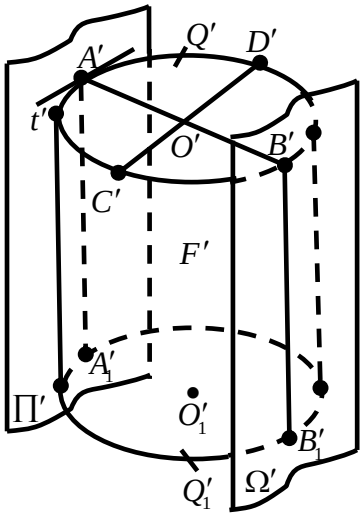
6. Пирамида. Аның сурәте булып оригинал пирамиданың нигезен сурәтләүче күппочмактан һәм пирамиданың янкырларын сурәтләүче берничә уртак түбәле өчпочмаклардан торучы фигура тора (рәс. 15).



Рәс. 15

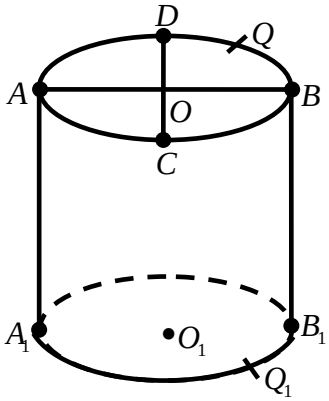
7. Цилиндр. F' оригинал- цилиндр булсын (рәс. 16).

F' цилиндрына орынган һәм проекцияләү юнәлешенә параллель булган ике яссылык барлыгы безгә билгеле. Бу яссылыкларны Π' һәм Ω' дип тамгалыйк. Алар цилиндрга $(A'A_1')$ һәм $(B'B_1')$ ясаучыларында кагылалар (контур ясаучылар дип аталалар).



Рәс.16

Q' - цилиндрның өске нигез әйләнәсе һәм t'- A' ноктасында бу әйләнәгә орынма булсын. $(AA_1) = \Pi' \cap \Sigma$ турысы цилиндрның $(A'A_1')$ ясаучысының проекциясе булып тора. Шулай ук $(B'B_1')$ ясаучысының проекциясен табабыз. Q' әйләнәсе Q эллипсы белән сурәтләнәчәк (рәс. 17).



Рәс. 17

Билгеле булганча, Q' әйләнәсенең A' ноктасындагы орынмасы Q эллипсының A ноктасындагы орынмага проекцияләнәчәк. Ләкин $t' \subset \Pi'$ булганлыктан, t' турысының проекциясе булып шулай ук (AA_1) турысы

хезмәт итәчәк. Димәк, Q эллипсы A ноктасында (AA_1) турысына орына, шулай ук B ноктасында (BB_1) турысына да орына. Аналогик рәвештә түбәндәге нәтиҗәгә киләбез: Σ яссылыгында F' цилиндрының аскы нигезендәге Q_1' әйләнәсен сурәтләүче Q_1 эллипсы A_1 ноктасында (AA_1) турысына һәм B_1 ноктасында (BB_1) турысына орына. F' цилиндрының сурәте 17 нче рәсемдә бирелгән.

F' цилиндрының $[O'O_1']$ биеклеге Σ яссылыгына параллель турыда ятканлыктан, $[OO_1]$ конгруэнт кисемтәсенә проекцияләнәчәк. Цилиндрның $[A'B']$ нигез диаметры Π' яссылыгына перпендикуляр һәм, димәк, Σ яссылыгына параллель (яки $\Pi' \perp \Sigma$) һәм шулай ук эллипсның аңа конгруэнт булган $[AB]$ диаметрына проекцияләнәчәк.

$$(A'B') \perp \Pi' \Rightarrow (A'B') \perp (AA_1) = \Pi' \cap \Sigma,$$

һәм $(A'B') \| (AB)$ булганлыктан,

$$(AB) \perp (AA_1). \qquad (4)$$

Ләкин (AA_1) орынмасының Q эллипсына юнәлеше (AB) диаметрының юнәлешенә капма- каршы юнәлешле, һәм (4) нче шарттан шуны әйтергә мөмкин, (AB)- Q эллипсының күчәре.

Искәрмә: Q' әйләнәсендә $(A'B')$ ка перпендикуляр булган $(C'D')$ диаметрын алыйк (рәс. 16). $(C'D') \perp (O'O_1')$ булуы билгеле, ә $(A'B')$ һәм $(O'O_1')$ Σ яссылыгына параллель булганлыктан, $(C'D') \perp \Sigma$ була. Аның Σ яссылыгына (CD) проекциясе Q эллипсының икенче күчәре булып тора. $[C'D']$ турысының нокталарын проекцияләүче турылар $(C'D')$ һәм $(O'O_1')$ турылары аша үтүче яссылыкта яталар. Бу яссылык Σ яссылыгына перпендикуляр.

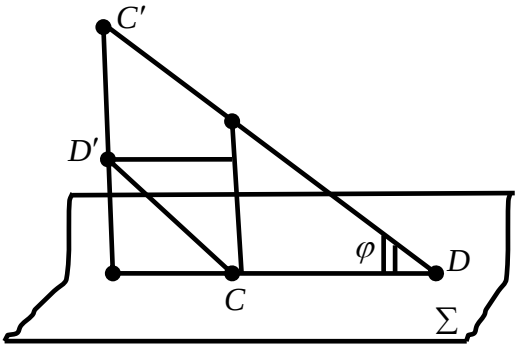
φ- һәрбер проекцияләнүче туры белән Σ яссылыгы арасындагы почмак (рәс. 18). Ул вакытта

$$\frac{CD}{C'D'} = ctg\varphi . \qquad (5)$$

Ләкин $C'D' = A'B' = AB$, һәм (5) формуласы түбәндәге рәвешне алачак:

$$\frac{CD}{AB} = ctg\varphi . \qquad (6)$$

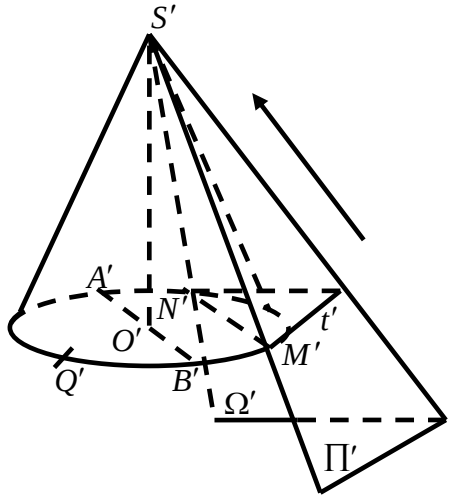
Без һәрвакыт $CD < AB$ булырлык итеп φ почмагын ала алабыз (ягъни тышкы проекцияләүнең юнәлешен), һәм ул вакытта сызымда $[AB]$ кисемтәсе Q эллипсының зур күчәре, ә $[CD]$- кече күчәре булачак.



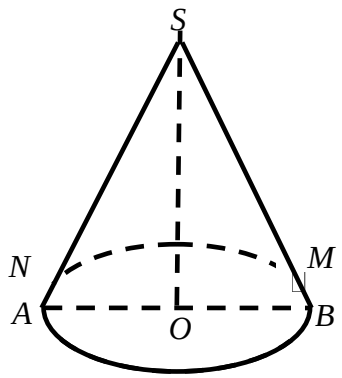
Рәс. 18

8. Конус. Пространствода F' конусын күчәре вертикаль (Σ сурәтләр яссылыгы да) һәм, димәк, Σ яссылыгына параллель булырлык итеп урнаштыралар. Проекцияләүнең юнәлеше Σ яссылыгына перпендикуляр булган һәм конусның биеклеге аша үтүче Λ яссылыгына параллель итеп алына. Ләкин проекцияләү- ортогональ түгел.

Проекцияләүнең юнәлешенә параллель һәм F' конусының ян өслегенә орынган Π', Ω' яссылыклары булуы ачык күренә (Π' коник өслекне $(S'M')$ ясаучы турысызыгында, ә Ω'- $(S'N')$ ясаучысында орына; болар F' конусының контур ясаучылары) (рәс. 19).



Рәс.19



Рәс. 20

Q' - F' конусының нигез әйләнәсе, t' - M' ноктасында бу әйләнәгә орынма булсын һәм, димәк, $t' \subset \Pi'$. $(SM) = \Pi' \cap \Sigma$ турысы $(S'M')$ турысының Σ яссылыгына проекциясе; $(SN) = \Omega' \cap \Sigma$ - $(S'N')$ турысының проекциясе. Q' әйләнәсе Q эллипсына проекцияләнәчәк (рәс. 20). $t' \subset \Pi'$ турысы (SM) турысына проекцияләнәчәк. Ләкин Q' әйләнәсенең орынмасы Q эллипсының орынмасына проекцияләнүен без беләбез. Димәк, (SM) турысы Q эллипсына M ноктасында орына. Аналогик рәвештә, (SN) турысы эллипсның N ноктасында орына. F' конусының сурәте 20 нче рәсемдә бирелгән. Монда конусның $[S'O']$ биеклеге $[SO]$ конгруэнт кисемтәсенә проекцияләнә. Λ яссылыгына перпендикуляр булган Q' әйләнәсенең $[A'B']$ диаметры эллипсның аңа конгруэнт (горизонталь) булган $[AB]$ диаметрына проекцияләнә.

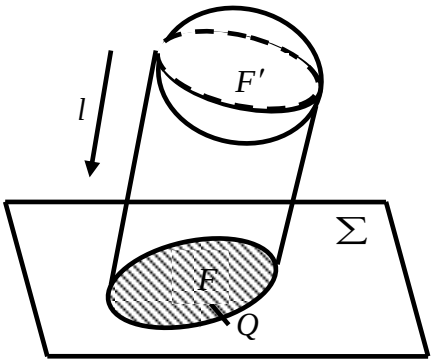
Эллипсның $[MN]$ хордасы аның үзәге аша үтми, чөнки Q эллипсының M һәм N нокталарындагы орынмалары параллель түгелләр, ә F' конусындагы S' түбәсенең проекциясе булган S ноктасында кисешәләр.

Конусның нигезен сурәтләү өчен (6) формуласы дөрес булачак. Без φ почмагын Q эллипсының $[AB]$ кисемтәсе зур күчәр булырлык итеп сайлап

алачакбыз. Димәк, конусның сурәтендә Q эллипсының $[AB]$ зур күчәре конусның $[S'O']$ биеклеген сурәтләүче $[SO]$ кисемтәсенә перпендикуляр.

9. Шар. F'- шар булсын, һәм без аны ниндидер l юнәлеше буенча Σ яссылыгына проекциялибез. Шарга орынучы һәм проекцияләү юнәлешенә ия булган турылар әйләнүнең цилиндрик өслеген барлыкка китерәчәкләр. Әгәр проекция кыекпочмаклы булса, Σ яссылыгы әйләнәдән аерылып торучы Q эллипсы бирелгән цилиндрик өслекне кисеп үтәчәк (рәс. 21). Q эллипсы F' шарының Σ яссылыгына булган F проекциясенең чиге булып тора һәм ***шарның сызыгы*** дип атала. Шарның мондый сурәте күренеп тормаячак.

Әгәр дә проекция ортогональ булса, шарның сызыгы булып әйләнә хезмәт итәчәк (аның радиусы шарның радиусына тигез), ә F' шары Σ яссылыгында F түгәрәге рәвешендә сурәтләнә. Шарның мондый сурәте дөрес һәм Σ яссылыгын охшаш үзгәртү вакытында үзенең формасын саклап калучан була.

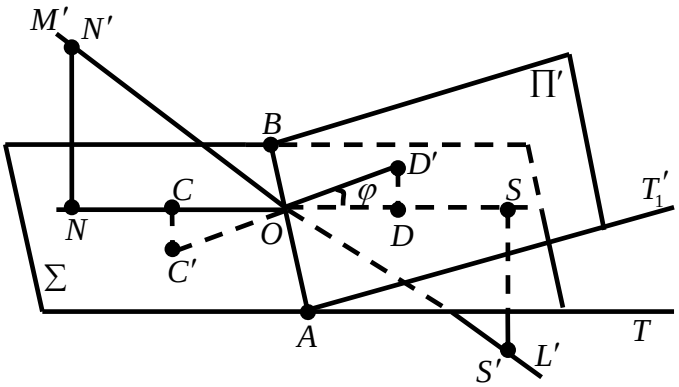


Рәс.21

Әгәр Σ яссылыгын проекцияләү юнәлешендә күчерсәк, F шарының проекциясе үзгәрмәячәк. Шуңа күрә Σ яссылыгы шарның үзәге аша уза дип санарга мөмкин. Ул вакытта $F = F' \cap \Sigma$ була.

Σ сурәтләр яссылыгына перпендикуляр булмаган F' шарындагы Q_1' зур түгәрәгенең $\Pi' \neq \Sigma$ яссылыгын алыйк. $[AB]$- Π' һәм Σ яссылыкларының кисешү сызыгында ятучы шарның диаметры, $[C'D']$- Q_1'

түгәрәгенең $[AB]$ га перпендикуляр булган диаметры, һәм $[CD]$- аның Σ яссылыгына проекциясе (рәс. 22).



Рәс. 22

Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча $[CD]\perp[AB]$. Q_1' зур түгәрәгенең әйләнәсе Σ яссылыгында $[AB]$ зур күчәре һәм $[CD]$ кече күчәре белән бирелгән Q_1 эллипсы рәвешендә сурәтләнә. $[CD]$ кисемтәсенең озынлыгы Π' һәм Σ яссылыклары арасындагы φ почмагының зурлыгына бәйле:

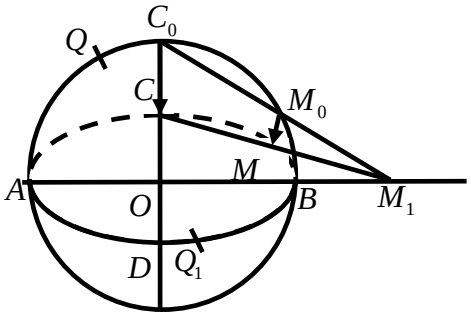
$$OC = R\cdot\cos\varphi, \qquad (7)$$

монда R- радиус, O- F' шарының үзәге (φ почмагын кысынкы дип санарга мөмкин).

Әгәр φ почмагының зурлыгы бирелмәгән булса, $[CD]$ кисемтәсенең озынлыгын $CD < AB$ шартында ирекле бирергә мөмкин.

(AT)- шар сызыгының Q әйләнәсенең A ноктасындагы, (AT_1')- Q_1' түгәрәгенең әйләнәсендәге A ноктасының орынмасы. Ул вакытта $(AT)\perp(OA),(AT_1')\perp(OA)$, һәм, димәк, (AT)- (AT_1') турысының Σ яссылыгына проекциясе. Ләкин (AT_1') орынмасының Q_1' оригинал әйләнәсенә (AT) проекциясе эллипска орынма булып тора. Димәк, шар сызыгының Q әйләнәсе һәм Q_1 эллипсы A ноктасында уртак (AT) орынмасына ияләр. Аналогик рәвештә, Q һәм Q_1 B ноктасында орыначаклар.

Q_1 эллипсы $[AB]$ һәм $[CD]$ күчәрләре белән билгеләнгән, һәм аны Q әйләнәсенә тугандаш булган фигура рәвешендә төзергә мөмкин (рәс. 23).



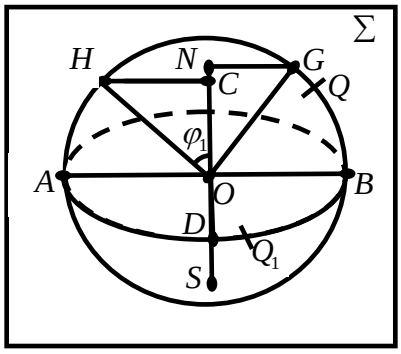
Рәс. 23

Q_1' экваторына (зур түгәрәкнең әйләнәсе) туры килүче полюсларының (шарның диаметры һәм өслеге белән кисешүче нокталар) проекцияләрен төзү өчен түбәндәгеләрне әйтеп үтәргә кирәк. $(M'L')$- Π' яссылыгына перпендикуляр булган F' шарының диаметры, һәм N', S' - аның шар өслеге белән кисешү нокталары (полюслар) (рәс. 22). $(M'L')$ турысы Σ яссылыгы белән $\frac{\pi}{2}-\varphi$ почмагын барлыкка китерә (чөнки $(M'L')\perp\Pi'$). Шуңа күрә шарның $[ON']$ радиусы $[ON]\perp[AB]$ кисемтәсенә проекцияләнәчәк һәм

$$ON = R\cdot\sin\varphi. \qquad (8)$$

Димәк, шарның $[N'S']$ диаметры $[NS]\subset(CD)$ кисемтәсе белән сурәтләнәчәк.

Q_1 эллипсының C ноктасындагы орынмасы Q әйләнәсен H ноктасында кисеп үтсен (рәс. 24).



Рәс.24

$\square OCH$ турыпочмаклы өчпочмагыннан (монда $OH = R, COH = \varphi_1$) табабыз:

$$OC = R \cdot \cos\varphi_1, CH = R \cdot \sin\varphi_1. \qquad (9)$$

(9) формуласының беренче тигезлеге белән (7) формуласын чагыштырып һәм φ, φ_1 почмаклары кысынкы булуны исәпкә алып, $\varphi_1 = \varphi$ булуын табабыз. Ул вакытта (9) формуласының икенче тигезлеге һәм (8) формуласы түбәндәгене бирәчәк: $ON = CH$. $[OC)$ нурының O ноктасыннан $[ON] \square [CH]$ кисемтәсен салабыз, моннан без Q_1' зур түгәрәгендәге N' полюсының N проекциясен табабыз. S ноктасы бу түгәрәкнең икенче S' полюсының проекциясе булып тора.

Шулай итеп, әгәр) Q_1' экваторының Q_1 проекциясе бирелгән булса (ягъни Q_1 эллипсының $[CD]$ кече күчәре бирелгән); аңа туры килүче полюсларның проекцияләре түбәндәгечә төзелергә мөмкиннәр.

N ноктасы аша (ON) га перпендикуляр үткәрәбез, һәм G - шар сызыгындагы Q әйләнәсе белән бу перпендикулярның кисешү нокталарының берсе булсын (рәс. 24). Ул вакытта $\square OCH \cong \square GNO$ (катет һәм гипотенуза буенча) һәм, димәк, $[OC] \cong [NG]$ була. Шуңа күрә әгәр шар сызыгындагы Q әйләнәсенең эчендә нинди дә булса N ноктасы алып һәм аны бу шарның нинди дә булса зур Q_1' түгәрәге полюсларының берсенең проекциясе дип санасак, Q_1' түгәрәге әйләнәсенең проекциясе булып торучы Q_1 эллипсын түбәндәге рәвештә табарга мөмкин:

1) $[NG] \| (NG) \perp (ON), G \in Q$ кисемтәсен табабыз;

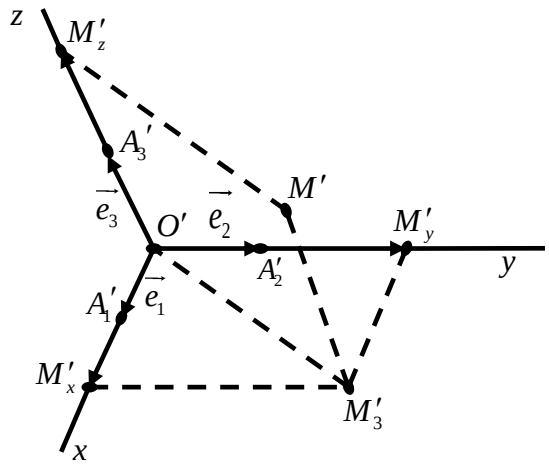
2) $[ON)$ нурында $[OC] \cong [NG]$ һәм бу нурның дәвамында $[OD] \cong [NG]$ кисемтәләрен салабыз;

3) Q әйләнәсенең $[AB] \perp [OC]$ диаметрын үткәрәбез. $[AB]$ һәм $[OC]$ күчәрләре белән бирелгән эллипс- эзләнелә торган эллипс.

Аксонометрия. Польке-Шварц теоремасы.

1. Пространствода $R'=\{O',A_1',A_2',A_3'\}$ аффин реперын һәм координаталары R реперына карата $x,y,z:\overrightarrow{O'M'}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}$ рәвешендә бирелгән нинди дә булса M' ноктасын алабыз (монда $\vec{e_i}=\overrightarrow{O'A_i'}$, $\exists M_x',M_y',M_z'\left|\overrightarrow{O'M_x'}=x\vec{e_1},\overrightarrow{O'M_y'}=y\vec{e_2},\overrightarrow{O'M_z'}=z\vec{e_3}\right.$) (рәс.25). Без M' ноктасының i-нче координаталар күчәренә параллель $\left[O',\vec{e_j},\vec{e_k}\right]$ (i,j,k-төрле) координаталар яссылыгына проекциясен M_i' дип тамгалаячакбыз. $\overrightarrow{M_x'M_3'}=\overrightarrow{O'M_y'},\overrightarrow{M_3'M'}=\overrightarrow{O'M_z'}$ булуы безгә билгеле. Шулай итеп M' ноктасы пространствода үзенең $O'M_x'M_3'M'$ “координата сынык сызыгы” белән билгеләнә.

Бу сынык сызык белән R' реперын Σ яссылыгына параллель проекциялибез. Шул ук вакытта $[O'A_i']$ $(i=1,2,3)$ кисемтәләре R' реперының күчәрләре проекциясендә ятучы O уртак башлангычлы $[OA_i]$ кисемтәсенә проекцияләнә (рәс. 26). M' ноктасының координата сынык сызыгы сурәтенең проекциясе булып OM_XM_3M кәкре сызыгы торачак, өстәвенә, $M_X\in(OA_1)$, $(M_XM_3)//(OA_2)$,

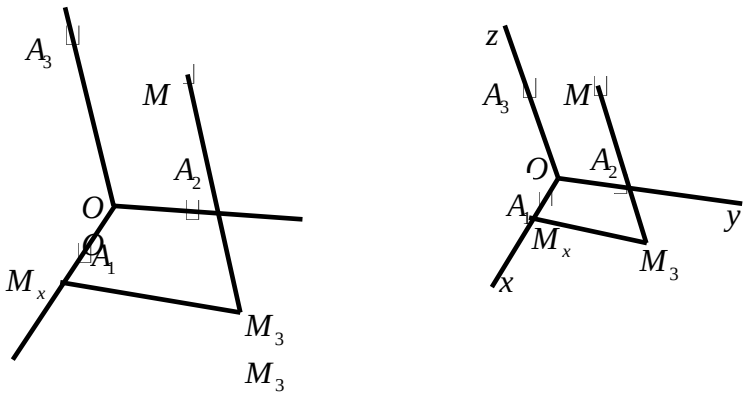


Рәс. 25

$(M_3M)//(OA_3)$ (параллель проекцияләү үзлеге буенча). Σ яссылыгын кирәкле p охшаш үзгәртүләрен кулланып, тәртипләштерелгән

$\{O, A_1, A_2, A_3\}$ (R' аффин реперының сурәте) нокталар күплеген табабыз (рәс. 26).

$(OA_1) = (Ox), (OA_2) = (Oy), (OA_3) = (Oz)$ турылары R' реперының координаталар күчәрен сурәтли. OM_xM_3M сынык сызыгы M' ноктасының координата сынык сызыгын сурәтли (монда $M_x \in (Ox), (M_xM_3) \| (Oy), (M_3M) \| (Oz)$).



Рәс. 26

$(O'A_1', M_x') = (OA_1, M_x)$ турысының параллель проекцияләү һәм охшаш үзгәртү вакытында өч нокта мөнәсәбәтенең саклануыннан,

$$\overrightarrow{O'M_x'} = x \cdot \overrightarrow{O'A_1'} \Rightarrow \overrightarrow{OM_x} = \overrightarrow{OA_1} \qquad (1)$$

була. Аналогик рәвештә

$$\overrightarrow{M_xM_3} = y \cdot \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{M_3M} = z \cdot \overrightarrow{OA_3}. \qquad (2)$$

Шулай итеп, әгәр Σ яссылыгында R' реперының $\{O, A_1, A_2, A_3\}$ сурәте бирелгән булса, R' реперына карата x, y, z координаталарыннан теләсә нинди M' ноктасының M сурәтен төзергә мөмкин. Моның өчен (1) һәм (2) тигезлекләрендә табылганнар буенча векторлар суммасын төзибез:

$$\overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{M_xM_3} + \overrightarrow{M_3M} = \overrightarrow{OM}.$$

$\overrightarrow{OM}$ векторы бирелгән M ноктасының радиус-векторы булып тора (O ноктасына карата).

Бирелгән ысул белән пространство нокталарының сурәтен төзүне белә торып, без пространство фигураларының сурәтләрендә төзи алачакбыз. Бу

методны ***аксонометрик проекциялəү методы*** дип атала (аксонометрия – күчəрлəр буенча үлчəү).

R' реперының $(Ox),(Oy),(Oz)$ күчəрлəре сурəтлəрен ***аксонометрик күчəрлəр*** дип атыйлар.

2. Без R' реперының торышын Σ сызымы яссылыгына карата үзгəртə алабыз. Шулай ук без Σ яссылыгына тышкы проекциялəү юнəлешен төрлечə сайлап ала алабыз. Сорау туа: əгəр без Σ сызымы яссылыгын ирекле рəвештə тəртиплəштерелгəн O, A_1, A_2, A_3 нокталар дүртлеген бирсəк, аны параллель проекциялəү ярдəмендə табылган нинди дə булса $R' = \{O', A_1', A_2', A_3'\}$ аффин реперының сурəте буларак карарга мөмкинме? Бу сорауга җавапны Польке-Шварц теоремасы бирер (аксонометриянең төп теоремасы).

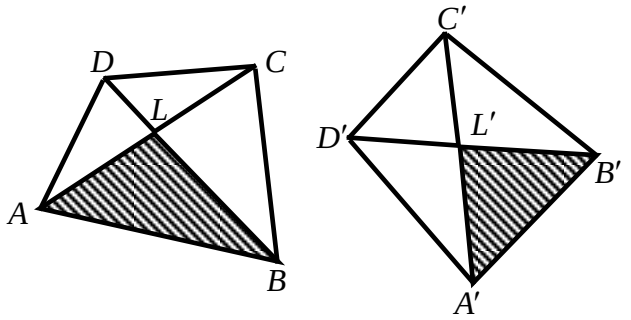
Яссылыкта

$$\begin{aligned}(AC, L) &= (A'C', L') \\ (BD, L) &= (B'D', L')\end{aligned} \qquad (3)$$

Үзлеклəренə ия булган ике $ABCD$ һəм $A'B'C'D'$ дүртпочмаклары бирелгəн булсын. Монда L һəм L' бу дүртпочмакларның диагональлəре кисешү нокталары (рəс. 27).

Без бу дүртпочмаклар аффинча эквивалент дип раслыйбыз. Чыннан да, ALB өчпочмагын $A'L'B'$ өчпочмагына күчерүче f аффин үзгəртүен карыйбыз. Бу үзгəртү (AL) турысын $(A'L')$ турысына һəм

$$(AL, C) = (A'L', C''), \qquad (4)$$



Рəс. 27

$$(3),\ (4) \Rightarrow (A'L', C') = (A'L', C'') \Rightarrow C'' = C'$$

Шартларын канәгатьләндерүче беренче турыдан C ноктасын икенче турының C'' ноктасына күчерә. Аналогик рәвештә $f(D) = D'$ булуы килеп чыга, һәм, димәк, $ABCD$ дүртпочмагын $A'B'C'D'$ дүртпочмагына күчерә. Моның киреседә дөрес: әгәр $ABCD$ һәм $A'B'C'D'$ дүртпочмаклары аффинча эквивалент бусалар, (3) тигезлекләре үтәлә (чөнки турының өч нокта мөнәсәбәте теләсә нинди аффин үзгәртүендә дә үзгәрми). Исбатланды.

Лемма 1: Әгәр $ABCD$ һәм $A'B'C'D'$ дүртпочмакларының диагональләре кисешү нокталары L, L' (3) тигезлекләрне канәгатьләндерсәләр, бу дүртпочмаклар аффинча эквивалент булалар.

3. f - Π евклид яссылыгын аффинча үзгәртү булсын. Ул Π яссылыгында һәрбер юнәлешне (ягъни параллель турылар бәйләмен) нинди дә булса башка юнәлешкә күчерә.

f аффин үзгәртүенең ***төп юнәлеше*** дип, үзара перпендикуляр булган юнәлешләргә күчүче ике үзара перпендикуляр юнәлеш атала.

Лемма 2: Π евклид яссылыгының барлык f аффин үзгәртүе өчен төп юнәлеш бар.

■ П яссылыгының $R = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ортонормаль реперында f аффин үзгәртүе түбәндәге формулалар белән бирелгән булсын:

$$y^i = a^i_j x^j + a^i, \det\left\|a^i_j\right\| \neq 0 \left(i, j = 1, 2\right), \qquad (5)$$

монда x^j - M ноктасының, ә y^i - $M' = f(M)$ ноктасының R реперындагы координаталары.

Билгеле булганча, f үзгәртүе $\{\vec{e}_i\}$ базисында $l^i = a^i_j l^j$ формуласы белән бирелгән П яссылыгындагы V күчерүләр пространствосының φ изоморфизмы аша тудырылган. Монда l^j - $\vec{l} \in V$ векторының координаталары, ә l^i - $\tilde{\vec{l}} = \varphi(\vec{l})$ векторының координаталары. Π яссылыгында юнәлешне аңа керүче нинди дә булса турының юнәлдерелгән

векторы аша бирергә мөмкин. Безгә нуль булмаган $\vec{l},\vec{m}\in V\left|\vec{l}\cdot\vec{m}=0\right.$ һәм $\varphi\left(\vec{l}\right)\cdot\varphi\left(\vec{m}\right)=0$ векторларын , ягъни

$$l^1m^1+l^2m^2=0, \qquad (6)$$

$$\left(a_1^1l^1+a_2^1l^2\right)\left(a_1^1m^1+a_2^1m^2\right)+\left(a_1^2l^1+a_2^2l^2\right)\left(a_1^2m^1+a_2^2m^2\right)=0, \qquad (7)$$

(6)$\Rightarrow m^1=\lambda l^2, m^2=-\lambda l^1\left(\lambda\neq 0\right)$ табарга мөмкин.

(7) тигезләмәсенә m^i аңлатмаларын кертеп һәм $\lambda\neq 0$ булуын истә тотып,

$$a\left(l^2\right)^2+bl^1l^2-a\left(l^1\right)^2=0, \qquad (8)$$

монда

$$a=a_1^1a_2^1+a_1^2a_2^2, \qquad (9)$$

$$b=\left(a_1^1\right)^2+\left(a_1^2\right)^2-\left(a_2^1\right)^2-\left(a_2^2\right)^2 \qquad (10)$$

Тигезләмәләрен табабыз.

1)Әгәр $a\neq 0$ булса, (8)тигезләмәдән , $l^1\neq 0$ була. (8)тигезләмәсенең ике кисәгендә $\left(l^1\right)^2$ ка бүлеп һәм $\frac{l^2}{l^1}=k$ ($\vec{l}$ юнәлешенең почмакча коэффициенты) дип тамгалап, аны түбәндәге рәвештә язабыз:

$$ak^2+bk-a=0. \qquad (8')$$

k_1,k_2 тамырлары реаль, өстәвенә $k_1k_2=-1$ һәм, димәк, k_1,k_2 почмакча коэффициентлы юнәлешләр үзара перпендикуляр булуын күрсәтү авыр түгел. Табылган юнәлешләр(6), (7) тигезләмәләр системасын канәгатьләндергәнлектән, алар f аффин үзгәртүенең төп юнәлешләре була.

2)Әгәр $a=0, b\neq 0$ булса, (8) тигезләмәсеннән R реперының $\vec{e_1},\vec{e_2}$ координата векторлары төп юнәлешләрне билгеләячәкләр.

3) $a=b=0$ булганда (8) тигезләмәсе бердәйлеккә әйләнә һәм, димәк, төп юнәлешләр билгеләнмәгән булачак.

$$\left(a=0, b=0, (10)\right)\Rightarrow\left(a_1^1\right)^2+\left(a_1^2\right)^2\neq 0,$$

киресенчә булганда, $a_i^j=0$.

$$(9) \Rightarrow a_2^2 = ta_1^1, a_2^1 = -ta_1^2.$$

Ул вакытта $b = 0$ дан без $t = \pm 1$ булуын табабыз. (5) формулалары түбәндәге рәвешне алалар:

$$y^1 = a_1^1 x^1 - \varepsilon a_1^2 x^2 + a^1 , \qquad (11)$$

$$y^2 = a_1^2 x^1 + \varepsilon a_1^1 x^2 + a^2 ,$$

монда $\varepsilon = \pm 1$.

$k = \sqrt{\left(a_1^1\right)^2 + \left(a_1^2\right)^2}, \cos\varphi = \frac{a_1^1}{k}, \sin\varphi = \frac{a_1^2}{k}$ аңлатмаларын кулланып, (11) формулаларын түбәндәге рәвештә язабыз:

$$y^1 = k\left(x^1 \cos\varphi - \varepsilon x^2 \sin\varphi\right) + a^1 , \qquad (12)$$

$$y^2 = k\left(x^1 \sin\varphi + \varepsilon x^2 \cos\varphi + a^2\right).$$

$(12) \Rightarrow f$ үзгәртүе охшашлык булып тора.

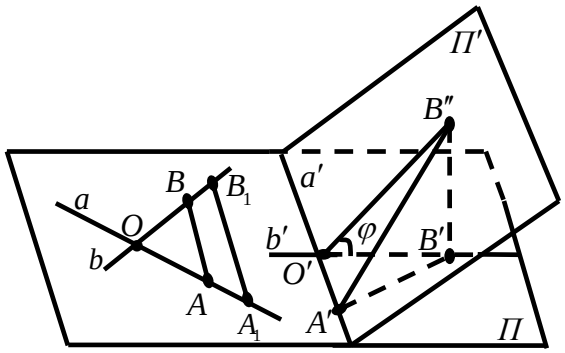
Киресе дә дөрес: охшашлыкта (билгеле булганча ул евклид яссылыгын аффинча үзгәртүнең аерым очрагы) теләсә нинди үзара перпендикуляр булган юнәлешләр пары шулай ук үзара перпендикуляр булган юнәлешләр парына күчә. Димәк, бары тик охшаш үзгәртүләр вакытында гына теләсә нинди үзара перпендикуляр булган ике юнәлеш кенә төп булачаклар.

4. Лемма 3: Π евклид яссылыгының һәрбер f аффин үзгәртүен Π яссылыгын Π' яссылыгына изотермик чагылдыруның һәм Π' ны Π яссылыгына ортонормаль проекцияләүнең гомотетия тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтергә мөмкин.

■ f O ноктасын O' ноктасына күчерсен. f аффин үзгәртүенең төп юнәлешләренә керүче a һәм b турылары үткәреп, O ноктасы белән тәңгәл килмәгән $A \in a, B \in b$ нокталарын алабыз (рәс. 28).

$a' = f(a), b' = f(b) | a' \perp b'$ һәм $a' \cap b' = O'$, $A' = f(A) \in a', B' = f(B) \in b'$ булуын табабыз. f аффин үзгәртүе өч коллинеар булмаган O, A, B нокталарын O', A', B' нокталарына күчерә, һәм шуның белән билгеләнә дә инде.

$\frac{O'A'}{OA}=\lambda_1, \frac{O'B'}{OB}=\lambda_2$ дип тамгалыйбыз. a турысы $\lambda_1 \geq \lambda_2$ шартын канәгатьләндерүче төп юнәлештә ятсын. a' турысы аша Π яссылыгы белән $\varphi \left| \cos\varphi = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right.$ почмагын ясаучы Π' яссылыгын үткәрик. Π' яссылыгын Π яссылыгына ортогональ проекцияләүне π дип тамгалыйк, һәм $\pi^{-1}(B')=B''$ булсын. Ул вакытта $\angle A'O'B''$ туры почмак була (өч перпендикуляр турындагы теорема буенча).



Рәс. 28

h - O үзәкле һәм λ_1 коэффициентлы Π яссылыгының гомотетиясе булсын.

$$h(A)=A_1 \Rightarrow OA_1=\lambda_1 \cdot OA = O'A',$$
$$h(B)=B_1 \Rightarrow OB_1=\lambda_1 \cdot OB = \lambda_1 \frac{O'B'}{\lambda_2} = \frac{O'B'}{\cos\varphi} = O'B''.$$

Димәк, $\Delta A_1OB_1 \cong \Delta A'O'B'$, һәм бирелгән өчпочмакларның беренчесен икенчесенә күчерүче $i:\Pi \to \Pi'$ изотермик чагылдыруы бар (моның белән i чагылдыруы билгеләнә).

$$\Delta AOB \xrightarrow{h} \Delta A_1OB_1 \xrightarrow{i} \Delta A'O'B'' \xrightarrow{\pi} \Delta A'O'B', \Delta AOB \xrightarrow{f} \Delta A'O'B'.$$

Моннан без $f=\pi i h$ булуын күрәбез. Шулай итеп *лемма 3* исбатла[redacted]ды.

5. Польке-Шварц теоремасы. Σ яссылыгының гомуми торышындагы теләсә нинди тәртипләштерелгән A,B,C,D ноталар дүртлеге бирелгән $\{A_0',B_0',C_0',D_0'\}$ реперына конгруэнт $\{A',B',C',D'\}$ аффин реперының сурәте буларак хезмәт итәргә мөмкин.

$L=(AC)\cap(BD)$ булсын. $(A_0'C_0',M_0')=(AC,L),(B_0'D_0',N_0')=(BD,L)$ булырлык $M_0'\in(A_0'C_0'),N_0'\in(B_0'D_0')$ нокталарын табабыз (рәс. 29). Нинди дә булса $\Pi_0|\Pi_0\perp(M_0'N_0')$ яссылыгын алабыз. $L_0=\Pi_0\cap(M_0'N_0')$ һәм A_0,B_0,C_0,D_0- бирелгән $\{A_0',B_0',C_0',D_0'\}$ реперы түбәләренең Π_0 яссылыгына ортогональ проекцияләр булсын. Ул вакытта

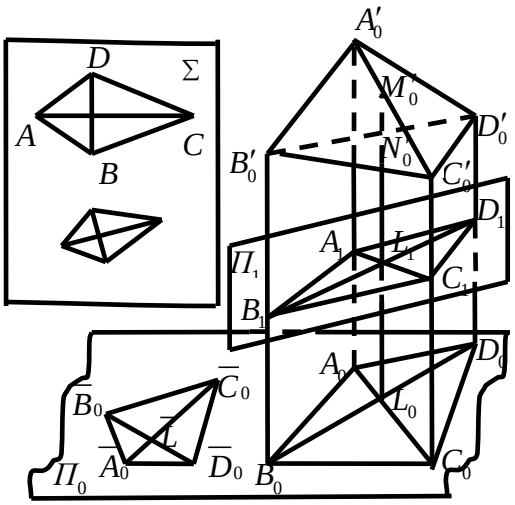
$$(A_0C_0,L_0)=(AC,L),(B_0D_0,L_0)=(BD,L). \qquad (13)$$

Π_0 яссылыгында $ABCD$ дүртпочмагына конгруэнт $\overline{A}_0\overline{B}_0\overline{C}_0\overline{D}_0$ дүртпочмагын төзибез.

$$\left(\overline{A}_0\overline{C}_0,\overline{L}\right)=(AC,L),\left(\overline{B}_0\overline{D}_0,\overline{L}\right)=(BD,L), \qquad (14)$$

монда $\overline{L}=\left(\overline{A}_0\overline{C}_0\right)\cap\left(\overline{B}_0\overline{D}_0\right)$.

(13), (14)$\Rightarrow\left(\overline{A}_0\overline{C}_0,\overline{L}\right)=(A_0C_0,L_0)$ һәм $\left(\overline{B}_0\overline{D}_0,\overline{L}\right)=(B_0D_0,L_0)$. *Лемма 1* буенча $\overline{A}_0\overline{B}_0\overline{C}_0\overline{D}_0$ һәм $A_0B_0C_0D_0$ дүртпочмаклары аффинча эквивалент. *Лемма 3* буенча $A_0B_0C_0D_0$ дүртпочмагы $\overline{A}_0\overline{B}_0\overline{C}_0\overline{D}_0$ дүртпочмагына охшаш $A_1B_1C_1D_1$



Рәс. 29

дүртпочмагының ортонормаль проекциясе булып тора.

Π_1 аша $A_1B_1C_1D_1$ дүртпочмагы яткан яссылыкны билгелик. Билгеле ки, дүртпочмакның түбәләре бирелгән $\{A_0',B_0',C_0',D_0'\}$ реперы түбәләренең

$(M_0'N_0')$ юнәлеше буенча Π_1 яссылыгына параллель проекцияләре булып тора. ∂ - Π_1 яссылыгын Σ яссылыгына күчерүче пространствоның нинди дә булса хәрәкәтләренең берсе. Бу хәрәкәт бирелгән $\{A_0', B_0', C_0', D_0'\}$ реперын аңа конгруэнт $\{A', B', C', D'\}$ реперына күчерә, ә $A_1B_1C_1D_1 \subset \Pi_1$ дүртпочмагын конгруэнт $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} \subset \Sigma$ дүртпочмагына күчерә. $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} \subset \Sigma$ дүртпочмагының түбәләре $\{A', B', C', D'\}$ реперы түбәләренең Σ яссылыгына параллель проекцияләре булып тора (чөнки параллель $(A_0'A_1), (B_0'B_1), (C_0'C_1), (D_0'D_1)$ турылары ∂ хәрәкәтендә параллель $(A'\overline{A}), (B'\overline{B})$, $(C'\overline{C})$, $(D'\overline{D})$ турыларына күчә). $A_1B_1C_1D_1 \sim ABCD$ hәм $A_1B_1C_1D_1 \cong \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$. Моннан $ABCD \sim \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$.

Димәк, $\{A, B, C, D\}$ фигурасы Σ яссылыгында бирелгән $\{A_0', B_0', C_0', D_0'\}$ реперына конгруэнт булган $\{A', B', C', D'\}$ аффин реперының сурәте булып тора.

6. Күп кенә мәсьәләләрдә башлангыч $\{A_0', B_0', C_0', D_0'\}$ реперы рәвешендә ортонормаль реперны алырга уңайлы. Польке-Шварц теоремасы буенча Σ яссылыгында гомуми торыштагы барлык тәртипләштерелгән O, A_1, A_2, A_3 нокталар дүртлеген алдан бирелгән ортонормальләштергән реперга конгруэнт $\{O', A_1', A_2', A_3'\}$ ортонормальләштергән реперының сурәте буларак карарга мөмкин. Бу очракта $[OA_1] = e_x, [OA_2] = e_y, [OA_3] = e_z$ кисемтәләре ***аксонометрик берәмлекләр*** дип аталалар.

Аксонометрик проекцияләрне өч типка аералар:

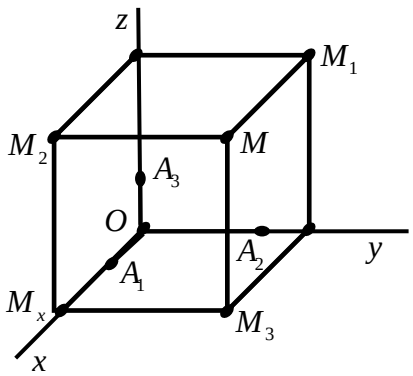
1) ***Триметрик проекцияләр***: барлык аксонометрик берәмлекләрнең озынлыклары төрле.

2) ***Диметрик проекцияләр***: ике аксонометрик берәмлекнең озынлыклары тигез. Әгәр $e_x \cong \frac{1}{2} e_z, e_y \cong e_z, yOz = \frac{\pi}{2}, xOy = xOz = \frac{3}{4}\pi$ булса, проекция ***кабинетлы*** дип атала.

3) ***Изометрик проекцияләр***: барлык аксонометрик берәмлекләрдә тигез озынлыкка ияләр. Шуның өстенә, $yOz = \frac{\pi}{2}, xOy = xOz = \frac{3}{4}\pi$ булса, проекция ***кавалерлы*** яки ***военный*** дип атала.

Нокта, туры һәм яссылыкның сурәтләре.

1.Әгәр Σ яссылыгында $R' = \{O', A_1', A_2', A_3'\}$ аффин реперының $\{O, A_1, A_2, A_3\}$ сурәтләрен бирсәк, пространствоның R' реперына карата координаталары аркылы теләсә нинди M' ноктасына M сурәтен төзергә мөмкин. M ноктасын M' ноктасының ***аксонометрик проекция***, ә M_i' нокталарының M_i сурәтләрен M' ноктасының ***икенчел проекцияләре*** дип атала. $(MM_i) \| (OA_i)$ булуы билгеле (рәс. 30).



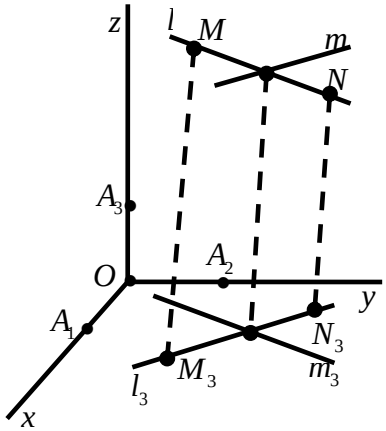
Рәс. 30

Бер M ноктасы гына әле R' реперына карата M' оригинал ноктасын билгеләмиячәк. Ләкин әгәр Σ яссылыгында M' ноктасының аксонометрик проекциясен һәм аның бер икенчел M_i проекцияләрен бирсәк, M' ноктасы билгеләнәчәк. Чыннан да, M ноктасын һәм M_i нокталарының берсен белә торып, без OM_xM_3M сынык сызыгын төзи алабыз. Аның ярдәмендә $R' = \{O', A_1', A_2', A_3'\}$ реперына карата M' ноктасының x, y, z координаталарын табабыз.

2. Пространствоның l' турысы теләсә нинди M' һәм N' үзнокталары белән билгеләнә. Σ яссылыгында без $l = (MN)$ турысын - l' турысының

аксонометрик проекциясен һәм аның өч икенчел проекцияләрен: $l_i = (M_i N_i)$ ны табабыз.

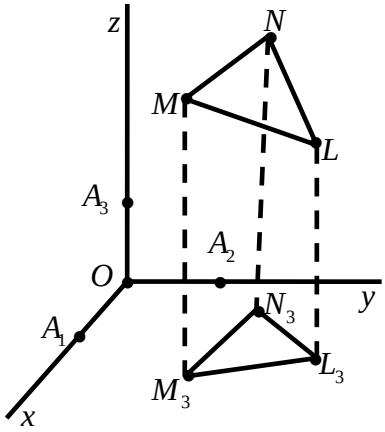
Билгеле ки, Σ сурәтләр яссылыгында l турысын һәм l_i турыларының берсен бирү l' оригинал турысын билгели: $l'(l, l_i)$. Ике $l'(l, l_i)$ һәм $m'(m, m_i)$ турылары кисешәләр $\Leftrightarrow$ әгәр Σ яссылыгында $l \cap m$ һәм $l_i \cap m_i$ нокталары аша үтүче туры (OA_i) турысына параллель булса (рәс. 31).



Рәс. 31

3. Пространствода Π' яссылыгы үзенең бер турыда ятмаучы өч ноктасы, яки үзенең ике турысы, яки бер туры һәм Π' яссылыгында ятучы, ләкин бу турыга кермәүче нокта белән билгеләнә.

θ сурәтләр яссылыгында Π' яссылыгын билгеләүче һәр элементның аксонометрик һәм икенчел проекцияләре бирелгән булырга тиеш (рәс. 32).



Рәс. 32

Теорема: Әгәр Π' яссылыгы R' реперының $(O'A_i')$ күчәренә параллель булмаса, ул Σ яссылыгында $\varphi(M)=M_i$ законы буенча φ туганлыгын билгеләячәк. Өстәвенә φ туганлыгының сурәте булып Π' яссылыгы белән $(O'A_j'A_k')$ координата яссылыгының кисешү l_i' сызыгын сурәтләүче $l=l_i$ турысы хезмәт итә (l_i' турысы бирелгән координата яссылыгында Π' яссылыгының ***эзе*** дип атала).

III бүлек. Позицион мәсьәләләр. Тулы һәм тулы булмаган сурәтләр.

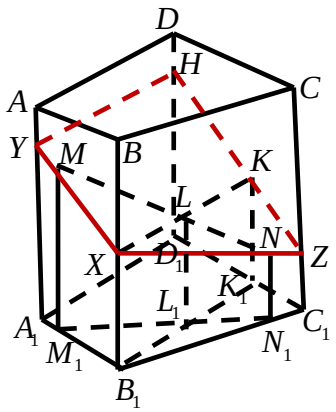
1. Σ яссылыгында берүк проекциядә башкарылган F_1', F_2' фигураларының (алар пространствода урнашкан) F_1, F_2 сурәтләре бирелгән булсын. F_1', F_2' фигураларының кисешү нокталары сурәтен төзү мәсьәләсе ***позицион мәсьәлә*** дип атала. Мондый мәсьәләләрне аксонометрия методын кулланып чишәргә уңайлы.

2. Σ яссылыгында нинди дә булса F' фигурасының F сурәте бирелгән булсын. Әгәр F сурәтенә F' фигурасын билгеләүче барлык нокталар, турылар һәм яссылыклар Σ яссылыгында бирелгән аффин реперының $\{O, A_1, A_2, A_3\}$ сурәтен кушсак, ул ***тулы сурәт*** дип аталачак. Өстәвенә әгәр сурәтләр яссылыгында M' ноктасының M аксонометрик проекциясе һәм икенчел проекциянең берәрсе күрсәтелгән булса, M' ***ноктасы бирелгән*** дип атала. Әгәр l' турысының ике ноктасы бирелгән булса, ул үзе дә бирелгән дип санала. Әгәр Π' яссылыгының бер турыда ятмаучы өч ноктасы бирелгән булса, бу яссылык үзе дә бирелгән була. Сурәт үзлегенең тулы булуы аффин реперының кушылган сурәтен сайлап алуга бәйле булмавын исбатларга мөмкин.

Алда карап үтелгән яссы һәм пространство фигураларының (яссы n-почмаклар, прзма, пирамида, цилиндр, конус, шар) сурәтләре тулы булуын күрсәтү авыр түгел.

Шуны да истән чыгармаска кирәк, тулы сурәтләрдә позицион мәсьәләләр тулысынча билгеләнгән чишелешләр ала.

Мәсьәлә 1: Дүртпочмаклы призманың сурәте бирелгән. Бу призма белән аның ян кырларында ятучы M, N, K нокталары аша үтүче яссылыкның кисемен төзергә (рәс. 33).



Рәс. 33

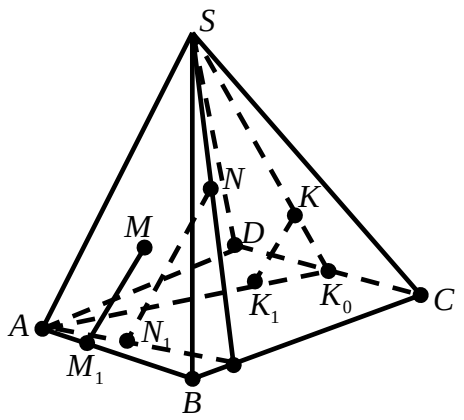
Әгәр без аффин реперының сурәте рәвешендә тәртипләштерелгән $\{A_1, A, B_1, D_1\}$ нокталар дүртлеген алсак, призманың барлык түбәләре дә (димәк барлык кабыргалары да, кырлары да) бирелгән булалар. M, N, K нокталары өчен M_1, N_1, K_1 икенчел проекцияләре билгеләнә. Димәк, бирелгән сурәт тулы була.

Сурәт яссылыгында $(MNK) = \Pi$ яссылыгы $\varphi(P) = P_1, \forall P \in \Pi$ законын канәгатьләндерүче φ- туганлыгын билгели. $L_1 = (M_1N_1) \cap (B_1K_1)$ ноктасы өчен $L = \varphi^{-1}(L_1) \in (MN)$ ноктасын табабыз.

$$X = (LK) \cap (BB_1) \Rightarrow \varphi(X) = B_1 \Rightarrow X = \Pi \cap (BB_1),$$
$$Y = (XM) \cap (AA_1) \Rightarrow \varphi(Y) = A_1 \Rightarrow Y = \Pi \cap (AA_1),$$
$$Z = (XN) \cap (CC_1) \Rightarrow \varphi(Z) = C_1 \Rightarrow Z = \Pi \cap (CC_1),$$
$$H = (ZK) \cap (DD_1) \Rightarrow \varphi(H) = D_1 \Rightarrow H = \Pi \cap (DD_1).$$

$XYHZ$ дүртпочмагы эзләнелә торган кисем.

Мәсьәлә 2: Дүртпочмаклы $SABCD$ пирамидасының сурәте бирелгән. Аның ян кырларында ятучы M, N, K нокталары аша үтүче Π яссылыгы белән кисемен төзергә (рәс. 34).



Рәс. 34

Аффин реперының $\{A,S,B,D\}$ сурәтен алып без пирамиданың барлык түбәләре (димәк аның кабыргалары, кырлары) бирелгән булуын күрәбез. M,N,K нокталары өчен M_1,N_1,K_1 икенчел проекцияләре билгеләнә (рәс. 34). Димәк, бирелгән сурәт тулы, эзләнелә торган сурәт тулысынча билгеләнгән һәм аны төзергә кирәк. Без бу кисемне *Мәсьәлә 1*дә кулланылган $\varphi(P)=P_1,\forall P\in \Pi$ туганлыгын кулланып төзи алабыз. Ләкин яссылык белән пирамиданың (яки конусның) кисемен төзү өчен башка ысулларны куллану уңайлырак. Пространствода Π яссылыгының нигез яссылыгына пирамиданың түбәсеннән үзәк f проекцияләвен карыйбыз (эчке проекцияләү), һәм $f(L')=L_0'$ булсын. Безгә бирелгән сурәт оригиналны Σ яссылыгына g параллель проекцияләү ярдәмендә табылды. $g(L')=L, g(L_0')=L_0$ булсын. Ул вакытта, билгеле булганча, Π яссылыгы Σ сурәтләр яссылыгына $h\big|h(L)=L_0,\forall L'\in \Pi$ гомологиясен көйли. h гомологиясенең үзәге булып S ноктасы, ә күчәре- Π яссылыгының пирамида нигезе яссылыгына булган эзнең сурәте булып хезмәт итә (ягъни бу яссылыкларның кисешү сызыгы сурәте).

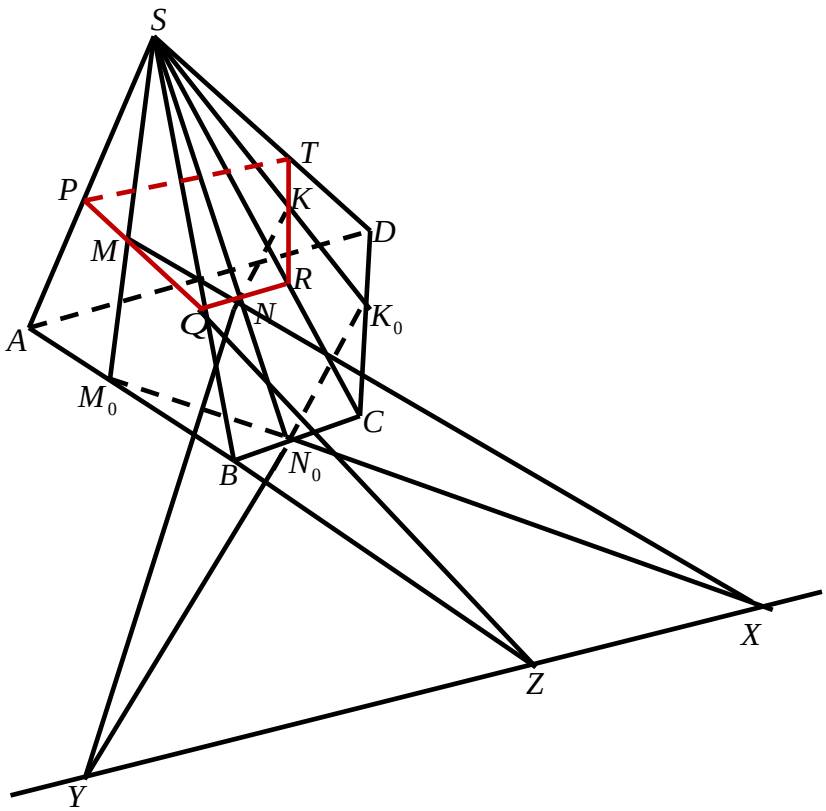
Шуңа күрә эзләнелә торган кисемне түбәндәгечә төзибез (рәс. 35): $M_0=h(M)$ $\big(M_0=(SM)\cap(AB)\big)$ һәм аналогик рәвештә N_0,K_0 нокталарын табабыз.

$X=(MN)\cap(M_0N_0)$ һәм $Y=(NK)\cap(N_0K_0)$ нокталары h гомологиясе күчәрендә яталар. Димәк, (XY) турысы бу гомологиянең күчәре.

$(MZ)=h^{-1}(AB)$ турысын һәм $P=(AS)\cap(MZ), Q=(BS)\cap(ZM)$ (Π яссылыгының $[AS]$ һәм $[BS]$ кабыргалары белән кисешү нокталары) нокталарын табабыз.

$R=(QN)\cap(SC), T=(RK)\cap(SD)$.

$PQRT$ дүртпочмагы бирелгән пирамиданың Π яссылыгы белән кисеме була.



Рәс. 35

3. Теорема. F тулы сурәте аффин эквивалентлыгына кадәр төгәллек белән F' оригиналын билгели.

■ Σ яссылыгында F тулы сурәте бирелгән булсын. Σ яссылыгында F' оригиналын билгеләүче барлык нокталар, турылар һәм яссылыклар бирелгән булырлык R' аффин реперының $\{O, A_1, A_2, A_3\}$ сурәте бар. Һәрбер шундый M' ноктасы өчен сызымда без аның аксонометрик проекциясенә

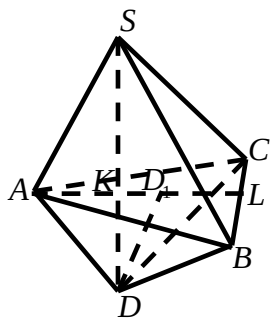
һәм икенчел проекцияләрнең берәрсенә иябез, алар ярдәмендә R' аффин реперына карата M' ноктасының x, y, z координаталарын төзекләндерә алабыз. Ләкин Польке-Шварц теоремасы буенча R' реперын теләсә нинди алдан бирелгән R_0 аффин реперына конгруэнт дип санарга мөмкин. Әгәр без нинди дә булса R_0 аффин реперын бирсәк, $\{O, A_1, A_2, A_3\} \subset \Sigma$ фигурасын $R' \cong R_0$ реперының сурәте дип саный алабыз. Өстәвенә, R' реперында x, y, z координаталары аша M' нокталарын төзеп, F' оригиналын табабыз (сызым ярдәмендә).

Әгәр дә башка R_0 аффин реперын бирсәк, шулай ук $\{O, A_1, A_2, A_3\}$ фигурасын $R' \cong R_0$ реперының сурәте дип санарга мөмкин, һәм без R' реперында x, y, z координаталары аша M' нокталары белән билгеләнүче F' оригиналын табабыз.

Без M' ноктасы R' реперында координаталар M' ноктасының R' реперындагы координаталарыкебек үк була. Шуңа күрә пространствоның R' реперын R' реперына күчерүче аффин үзгәртүе F' фигурасын F' фигурасына күчерә, һәм, димәк, F', F' фигуралары аффинча эквивалент булалар. Шулай итеп, F тулы сурәте бары тик аффин эквивалентлыгына кадәр төгәллек белән генә F' оригиналын билгели.

4. а) $SABCD$ алтыпочмаклыгының сурәте тулы булмаган сурәт (рәс. 36).

Чыннан да, аффин реперының $\{A, S, B, C\}$ сурәтен алыйк. A, S, B һәм C нокталары бирелгән, ә D ноктасы бирелмәгән (аның икенчел проекциясе билгеләнмәгән) була. Шуңа күрә без, мәсәлән, (SD) турысының (ABC) яссылыгы белән кисешү ноктасын төзи алмыйбыз.



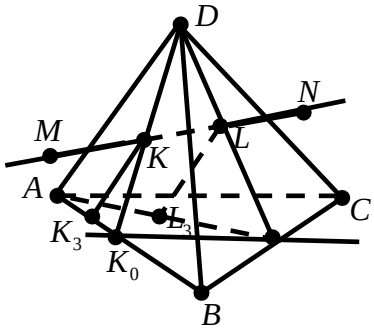
Рәс. 36

Тулы булмаган сурәтне тулы ясау өчен кыйммәтләрен бирергә кирәк булган бәйле булмаган параметрлар саны бирелгән сурәтнең ***тулы булмаулык коэффициенты*** дип атала. Безнең мәсьәләдә өч ноктаның (SD,K) мөнәсәбәтен бирергә кирәк, монда $K=(SD)\cap(ABC)$. Бу мөнәсәбәт сурәттә K ноктасын, һәм, димәк, шулай ук $D\left(D_1\in(AK),(DD_1)\|(AS)\right)$ ноктасының икенчел D_1 проекциясендә билгеләячәк.

$(SD,K)=\lambda$ мөнәсәбәте урынына $(BC,L)=\mu$, монда $L=(BC)\cap(ASD)$, мөнәсәбәтендә бирергә була иде. Аңлашыла ки, λ,μ параметрлары бәйле һәм аларның берсенең кыйммәтен бирергә кирәк.

Шулай итеп, безгә бирелгән $SABCD$ алтыпочмаклыгының $k=1$ тулы булмаулык коэффициентына ия.

б) $ABCD$ тетраэдрының сурәте һәм (MN) турысы бирелгән (рәс. 37).



Рәс. 37

Аффин реперының $\{A,B,C,D\}$ сурәтен алабыз. A,B,C,D нокталары бирелгән, ә M һәм N нокталары өчен икенчел проекцияләре билгеләнмәгән була. Димәк, тулы булмаган сурәт була.

Мондый позицион мәсьәләләрне чишү өчен бирелгәннәр аз: (MN) турысының $ABCD$ тетраэдры кырлары белән кисешү нотасын төзергә. (MN) турысында нинди дә булса ике K һәм L нокталарын алыйк (ягъни (MN,K) һәм (MN,L) мөнәсәбәтләрен бирик), аларны (MN) турысының (ABD) һәм (BCD) яссылыклары белән кисешү нокталары итеп карарга була.

K,L нокталары өчен икенчел K_3 һәм L_3 проекцияләрен билгеләргә була (рәс. 37), димәк, K,L нокталары бирелгән, шуңа күрә (MN) турысы да бирелгән була һәм бирелгән сурәттә тулы сурәткә әйләнә. Димәк, бу мәсьәләдә тулы булмаулык коэффициенты $k=2$.

K һәм L нокталары урынына $K_0=(AB)\cap(DMN)$, $L_0=(BC)\cap(DMN)$ нокталарында алырга була иде, ягъни (AB,K_0) һәм (BC,L_0) мөнәсәбәтен алырга мөмкин.

Искәрмә: Әгәр сурәт тулы булса, позицион мәсьәләне чишкәндә барлык төзүләрдә бернинди ирекле кне дә тәшкил итми (һәм аналогик рәвештә оригинал төзүләр башкарыла). Әгәр сурәт тулы булмаган булса, кайбер элементларны ирекле алырга мөмкин (каралган мәсьәләдә K һәм L нокталары). Ләкин бу очракта сак булырга кирәк: ничә элемент һәм аларның кайсын ирекле алырга мөмкин булуын белү мөһим. Моннан соң сурәт тулы булачак һәм, димәк , барлык башка төзүләр катгый билгеләнгән үзлекләр буенча гына үткәреләчәк. Шуңа күрә, позицион мәсьәләләр чишкәндә тулы булмаган сурәттә иң башта тулы булмаулык коэффициентын санарга һәм тәңгәл килүче параметрларның геометрик мәгънәсен билгеләргә кирәк.

Димәк, каралган мәсьәләдә тулы булмаулык коэффициенты $k=2$. K һәм L нокталарын керткәннән соң тулы сурәт барлыкка килде. (MN) турысы белән $ABCD$ тетраэдрының калган ике кыры кисешү ноталары билгеләнә. Һәм, K һәм L нокталарыннан башка (MN) турысысының

тетраэдр нигезе яссылыгы белән кисешүче ирекле P ноктасында бирсәк хата булыр иде.

Geo Gebra компьютер программасын кулланып демонстрация материаллары төзү һәм мәсәләләр чишү

IV бүлек. Мөстәкыйль эшләү өчен мәсьәләләр.

Вариант №1.

1. Бишпочмаклы призма бирелгән. Призманың өске нигезендә ятучы бер һәм ян кырларында ятучы ике нокта аша яссылык үткәреп, призманың кисемен төзергә.

2. Параллелепипедның диагоналендә алынган нокта һәм нигез яссылыгында урнашкан туры аша яссылык үткәреп, параллелепипедның кисемен төзергә.

3. Параллель проекциядә төзек бишпочмаклыкның сурәтен төзергә.

4. Вейсбах теоремасын кулланып, ортогональ диметрик проекциядә ортонормалаштырылган реперның сурәтен төзергә.

5. Параллель проекциядә $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ кубының сурәте бирелгән. Кубның A_1' түбәсеннән $[A'C_1']$ диагоналенә перпендикуляр яссылык үткәреп,

(өстәвенә, X'- яссылык белән $[A'C_1']$ диагоналенең кисешү ноктасы) барлыкка килгән кисемнең сурәтен төзергә.

6. Бишпочмаклы пирамида бирелгән. Пирамиданың ян кабыргасында һәм бирелгән кабырганы үз эченә алмаучы ян кырында, нигез яссылыгында алынган нокталар аша яссылык үткәреп, пирамиданың кисемен төзергә.

7. $SABCD$ пирамидасы бирелгән. M ноктасы SCD кырында ята. M ноктасыннан SA турысына параллель туры үткәрегез һәм бу туры белән пирамида өслегенең очрашу нокталарын табыгыз.

Вариант №2.

1. $SABCDE$ пирамидасының һәм $P_1 \in (SAE), Q_1 \in [SC], M \in (ABC)$ нокталарының сурәте бирелгән. (ABC) яссылыгында (P_1Q_1M) яссылыгының эзен сурәтләргә.

2. $ABCD$ төзек тетраэдрының сурәте һәм ABD кырында алынган M ноктасы бирелгән. M ноктасы аша BC кабыргасы янындагы икекырлы почмакның биссектариаль яссылыгына перпендикуляр үткәрергә.

3. Шарга камалган кубның сурәтен төзергә.

4. Параллель проекциядә F' конусының һәм аның нигез яссылыгында эзе һәм ян өслегендәге ноктасы белән бирелгән Π' яссылыгының сурәте бирелгән. F' конусы белән Π' яссылыгы кисеменең сурәтен төзергә.

5. $A'B'C'A_1'B_1'C'$ төзек өчпочмаклы призмасының ян кабыргасы нигез ягына конгруэнт. A_1' түбәсеннән $(AB_1'C_1')$ яссылыгына перпендикуляр төшерелгән. Параллель проекциядә сурәт төзергә.

6. Бишпочмаклы призманың өске нигезендә, ян кабыргасында һәм ян кырында бирелгән нокталар аша яссылык үткәреп, кисемен төзегез.

7. $SABCDE$ пирамидасында $M \in SB, N \in (SAD), P \in (ABC)$ нокталары аша кисем үткәрегез.

Вариант №3.

1. $A_1B_1C_1D_1ABCD$ кубының һәм $P_1 \in (A_1B_1)$ ноктасының сурәте бирелгән. (P_1D) турысына һәм CC_1 кабыргасына перпендикуляр сурәтләргә.

2. Кубның сурәте һәм кырында алынган M ноктасы бирелгән. M ноктасы аша диагональ яссылыкка перпендикуляр туры үткәрергә.

3. Параллель проекциядә төзек өчпочмакның, төзек өчпочмаклы пирамиданың, төзек алтыпочмаклы призманың сурәтен төзергә.

4. Параллель проекциядә бирелгән $A'B'C'$ өчпочмагының сурәте һәм аңа камалган әйләнәнең Q' үзәге аша $A'B'C'$ өчпочмагының формасын торгызырга.

5. Эпюрда Σ яссылыгы үзенең $m_1 \subset \Pi_1$ һәм $l_2 \subset \Pi_2$ эзләре белән бирелгән. $A(A_1, A_2)$ ноктасыннан Σ яссылыгына төшерелгән перпендикулярның нигезен төзергә.

6. Төзек өчпочмакның сурәте бирелгән. AB ягында ятучы ноктадан BN биеклегенә төшерелгән перпендикулярның сурәтен төзергә.

7. $ABCDE$ пирамидасының $M \in SA, N \in (SCD), N_1 \in (SED)$ нокталары аша яссылык үткәреп, кисем төзергә.

Вариант №4.

1. Туры түгәрәк конусның сурәте һәм конус өслегендә A_1, нигез яссылыгында B һәм $C_1(C)$ нокталары бирелгән. Конусның $(A_1B_1C_1)$ яссылыгы белән ирекле кисем ноктасының сурәтен төзергә.

2. Төзек өчпочмаклы пирамида бирелгән. A ноктасы ян кабыргасында, ә B ноктасы пирамиданың биеклегендә урнашкан. Пирамида өслеге белән AB турысының очрашу ноктасын төзергә.

3. Параллель проекциядә ян кабыргасы нигез ягына конгруэнт булган төзек өчпочмаклы призманың сурәтен төзергә.

4. Параллель проекциядә әйләнәгә камалган өчпочмакның сурәте бирелгән. Бу өчпочмакка камалган әөләнә үзәгенең сурәтен төзергә.

5. Эпюрда $[A_1B_1]$ һәм $[A_2B_2]$ проекцияләре аша $[AB]$ кисемтәсенең төп зурлыгын табарга.

6. Дүртпочмаклы пирамиданың нигез яссылыгында ятучы нокта аша ике капма-каршы кабыргаларына параллель яссылык үткәрергә.

7. Төзек өчпочмаклы призмага камалган төзек өчпочмаклы пирамиданың биеклекләре тигез булса, пирамиданы сурәтләргә.

Вариант №5.

1. Дүртпочмаклы пирамиданың капма-каршы ян кырларында M һәм P нокталары ята. MP турысы белән калган ян кырлары яссылыкларының очрашу нокталарын табарга.

2. Дүртпочмаклы призма бирелгән. A ноктасы ян кабыргасында, ә B ноктасы призмада ятмаучы ас нигез яссылыгында урнашкан. AB турысы белән призма өслегенең очрашу ноктасын төзергә.

3. Параллель проекциядә квадратның, кубның, төзек сигезпочмаклы пирамиданың сурәтен төзергә.

4. $\Re(O', A_1', A_2', A_3')$-ортонормалаштырылган репер, Σ-сурәтләр яссылыгы, $Q' \notin \Sigma, A_i = (O'A_i') \cap \Sigma, (i = 1,2,3), (OA_i)$-ортогональ проекциядә төрле өч аксонометрик күчәрләр булсын. $A_1A_2A_3$ өчпочмагы өчпочмаклы эз дип атала. Бирелгән аксонометрик кучәрләр аша e_x, e_y, e_z (кучәрләр аша шуышу коэффициентлар) кисемтәләренең озынлыкларын табып булуын; һәм, киресенчә, әгәр шуышу коэффициентларының мөнәсәбәтләре бирелгән булса, аксонометрик кучәрләр арасындагы почмакларны исәпләп булуын исбатларга.

5. Параллель проекциядә бер яссылыкта ятучы квадратның һәм почмакың сурәте бирелгән. Бу почмакның төп зурлыгын табып, биссектрисасының сурәтен төзергә.

6. A ноктасы дүртпочмаклы призманың ян кырында, ә B ноктасы аскы нигез яссылыгында урнашкан. AB турысы белән призманың өске

нигез яссылыгының һәм диагональ яссылыкларның очрашу нокталарын төзергә.

7. Бишпочмаклы пирамиданың CE диагонале аша үтүче һәм SA ян кабыргасына параллель булган яссылык үткәреп, кисем төзергә.

Вариант №6.

1. $A_1B_1C_1D_1ABCD$ призмасының һәм $M_1 \in (AA_1), N_1 \in (B_1C_1C), P_1(P)$ нокталарының сурәте бирелгән. Призманың $(M_1N_1P_1)$ яссылыгы белән кисемен төзергә.

2. Төзек дүртпочмаклы пирамиданың сурәте һәм биеклеге бирелгән. Пирамиданың биеклегендә алынган нокта һәм ян кабыргаларының берсенә параллель булган яссылык үткәреп, кисемен төзергә.

3. Параллель проекциядә әйләнәнең сурәте бирелгән. Квадратның һәм төзек сигезпочмаклыкның сурәтен төзергә.

4. Параллель проекциядә кубның сурәте бирелгән. Куб белән яссылык кисеменең сурәтен төзергә.

5. Параллель проекциядә квадратның сурәте бирелгән. Беренче квадрат яссылыгында ятучы башка квадратның $[A'B']$ ягының $[AB]$ сурәте аша сурәтен төзергә.

6. Өчпочмаклы пирамиданың нигезендә ятучы ноктасы аша бер ян кабыргасына параллель туры үткәрегез һәм бу турының бирелгән кабыргага капма-каршы ятучы ян кыр яссылыгы белән кисешү ноктасын төзегез.

7. $ABCA_1B_1C_1$ призмасының AA_1B_1B кырында P ноктасы, ә CC_1 кабыргасында Q ноктасы алынган. Призманың $K \in BB_1$ ноктасы аша үтүче һәм B_1P, A_1Q турыларына параллель яссылык үткәреп, призманың кисемен төзегез.

Вариант №7.

1. $A_1B_1C_1D_1ABCD$ призмасының һәм $P_1 \in (A_1B_1B), M_1(M)$ нокталарының сурәте бирелгән. (P_1D) һәм (BC) турыларын кисеп үтүче m турысын сурәтләгез.

2. Бишпочмаклы призманың өске нигез ягында алынган нокта һәм аскы нигез яссылыгында урнашкан туры аша яссылык үткәреп, призманың кисемен төзегез.

3. Шарның сурәте һәм экваторы бирелгән. Яссылыклары үзара перпендикуляр булган ике меридианының сурәтен төзегез.

4. Параллель проекциядә S' түбәсе һәм Q_1' әйләнәсе белән бирелгән F' конусының сурәте бирелгән. Π' кисүче яссылыгы конусның ян өслегендә алынган M' ноктасы һәм Q_1' әйләнәсен ике ноктада кисеп үтүче конус нигезе яссылыгында алынган a' эзе белән бирелгән. Кисем төземичә, F' конусының ян өслеген Π' яссылыгы ниндидер кәкре сызык буенча кисеп үтә. Шушы кәкре сызыкның төрен билгеләргә.

5. Эпюрда бер турыда ятмаучы өч $A(A_1, A_2), B(B_1, B_2), C(C_1, C_2)$ нокталары белән бирелгән Σ яссылыгы белән $l(l_1, l_2)$ турысының кисешү ноктасын төзегез.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB һәм A_1D_1 кабыргаларында M һәм N ноталары алынган. AA_1 һәм MN турыларына уртак перпендикуляр төзегез.

7. $SABCD$ пирамидасында SC һәм DK турыларын кисеп үтүче $M \in AB$ ноктасы аша туры үткәрегез (K - SA кабыргасының уртасы).

Вариант №8.

1. Төзек дүртпочмаклы пирамиданың нигезендә алынган нокта аша чиктәш ян кабыргаларының ике апофемасына параллель булган яссылык үткәрергә.

2. Куб белән биеклеге кубның ян кабыргасына, ә нигез мәйданы куб кырының мәйданыннан ике тапкырга кечкенә булган аңа камалган дүртпочмаклы пирамиданы сурәтләргә.

3. Параллель проекциядә әйләнәнең сурәте бирелгән. Аңа камалган төзек алтыпочмаклыкның сурәтен төзергә.

4. Параллель проекциядә әйләнәнең һәм аның яссылыгында ятучы почмакның сурәте бирелгән. Биссектрисасының сурәтен төзергә.

5. Эпюрда ABC өчпочмагының $A_1B_1C_1$ һәм $A_2B_2C_2$ проекцияләре бирелгән. $M \in (ABC)$ ноктасының M_1 горизонталь проекциясен белә торып, M_2 вертикаль проекциясен төзергә.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призмасының AA_1 ян кабыргасында ятучы M ноктасы аша CC_1 кабыргасын кисеп үтүче туры һәм очлары AB һәм C_1D_1 кабыргаларын урталай бүлүче кисемтә үткәрергә.

7. $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ призмасының $M \in EE_1, N \in C_1CD, P$ призмада ятмаучы нокталары аша яссылык үткәреп, призманың кисемен төзергә.

Вариант №9.

1. $MABCDE$ бишпочмаклы пирамида һәм BCM, MAE кырларында K һәм P нокталары бирелгән. KP турысы белән MAB кырының очрашу ноктасын төзергә.

2. Төзек дүртпочмаклы пирамиданың сурәте һәм биеклеге бирелгән. Пирамиданың биеклегендә алынган нокта аша һәм бер кырына параллель булган яссылык үткәреп, пирамиданың кисемен төзергә.

3. Яссылыкның тугандаш үзгәртүе бирелгән. Бирелгән нокта аша үтүче һәм бу үзгәртүнең төп юнәлешенә керүче турыларны төзергә.

4. Параллель проекциядә әйләнәгә камалган өчпочмакның сурәте бирелгән. Аның биеклекләренең сурәтен төзергә.

5. $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ кубының өске нигезенең $[A'D']$ кабыргасы аша аскы нигезне $[M_1'N_1']$ кисемтәсе аша кисеп үтүче яссылык үткәрелгән. Өске

нигезнең P' ноктасыннан кисем яссылыгына перпендикуляр төшерелгән. Параллель проекциядә аның сурәтен төзергә.

6. Төзек бишпочмаклы пирамиданың сурәтен төзергә.

7. $SABCDE$ пирамидасында $M \in SAB, N \in SD$ һәм пирамида эчендә алынган P нокталары аша кисем үткәрегез.

Вариант №10.

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының сурәте бирелгән. Кубның AC_1 диагонале һәм аскы нигездәге AD ягының уртак перпендикулярын төзергә.

2. Тигезьяклы өчпочмакның сурәте бирелгән. Өчпочмакның биеклекләренә перпендикуляр булган якларның берсенең уртасыннан үткәрелгән турыларны сурәтләргә.

3. Шарны камаучы цилиндрның сурәтен төзергә.

4. Параллель проекциядә төзек дүртпочмаклы пирамиданың сурәте бирелгән. Пирамиданың бер ян кабыргасында ятучы M', һәм ян кырларында алынган N' һәм P' нокталары белән бирелгән $M'N'P'$ аша үтүче яссылык белән төзелгән кисемнең сурәтен төзергә.

5. Эпюрда $l(l_1, l_2)$ турысы бирелгән. Π_1 һәм Π_2 яссылыкларында бу турының эзләрен төзергә.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының сурәте бирелгән. Кубның эчендә $A_1B_1C_1D_1$ нигез яссылыгына M_1 ортогональ проекциясе белән M ноктасы бирелгән. M ноктасыннан аскы нигезнең A_1B_1 һәм өске нигезенең AB якларына перпендикуляр төшерергә.

7. $SABC$ өчпочмаклы пирамидада: ΔABC турыпочмаклы, $\angle C = 90°, AC : CB = 3 : 4$, $SC \perp ABC$. C ноктасыннан (SAB) яссылыгына перпендикуляр үткәрегез.

Вариант №11.

1. Төзек бишпочмаклы призманың сурәтен төзегез.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының сурәте бирелгән. Кубның эчендә $A_1B_1C_1D_1$ нигез яссылыгына үткәрелгән M_1 ортогональ проекциясе белән M ноктасы

бирелгән. M ноктасыннан аскы нигезнең A_1B_1 һәм өске нигезенең AB якларына перпендикуляр төшерергә.

3. Q эллипсы $[AB]$ һәм $[CD]$ капма-каршы ятучы диаметрлар пары белән бирелгән. Сызым төземичә, Q эллипсының тагын бер капма-каршы ятучы диаметрлар парын төзергә.

4. Параллель проекциядә $\Re(O', A_1', A_2', A_3')$ ортонормалаштырылган реперның (O, A_1, A_2, A_3) сурәте бирелгән. Π' яссылыгы $\Re'$ реперының координаталар яссылыгында аның эзләре белән бирелгән. Q' ноктасыннан Π' яссылыгына төшерелгән перпендикулярның сурәтен төзергә.

5. Параллель проекциядә кубның аскы нигезе конусның нигез яссылыгына керерлек, ә кубның өске нигез түбәләре конус ян өслегендә ятарлык нигез диаметрына конгруэнт төзүчесе булган конуска камалган кубның сурәтен төзергә.

6. A, B һәм C нокталары пирамиданың өч ян кырында урнашуын белә торып, ABC яссылыгының эзен төзергә.

7. Дүртпочмаклы пирамиданың чиктәш булмаган ике ян кабыргасының урталарын тоташтыручы туры аша калган ике кабыргасының берсенә параллельбулган яссылык үткәрегез.

Вариант №12.

1. $A_1B_1C_1D_1ABCD$ призмасының һәм $P_1 \in (A_1B_1B), Q \in [DC]$ һәм $M \in (ABC)$ нокталарының сурәте бирелгән. $M \in m$ һәм $m \square (P_1Q)$ булырлык итеп m турысын сурәтләргә.

2. Дүртпочмаклы пирамиданың Һәм биеклегенең сурәте бирелгән. Пирамиданың ян кырына параллель булган биеклекнең уртасы аша яссылык үткәреп, пирамиданың кисемен төзергә.

3. Шарны камаучы төзек өчпочмаклы призманың сурәтен төзергә.

4. Параллель проекциядә F' цилиндрының һәм аның төзүчеләрендә алынган өч нокта белән бирелгән Π' яссылыгының сурәте бирелгән. F' цилиндрының Π' яссылыгы белән кисеменең сурәтен төзергә.

5. Эпюрда бер турыда ятмаучы өч $A(A_1,A_2),B(B_1,B_2),C(C_1,C_2)$ нокталары белән бирелгән Σ яссылыгының $\Sigma\cap\Pi_1$ һәм $\Sigma\cap\Pi_2$ эзләрен төзергә.

6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$-төзек алтыпочмаклы призма. AA_1 кабыргасына һәм очлары AB һәм D_1E_1 якларында урнашкан кисемтәгә уртак перпендикуляр төзергә.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының түбәсе аша AC_1 диагоналенә перпендикуляр яссылык үткәрегез.

Вариант №13.

1. $ABCA_1B_1C_1$ төзек призмасының ян кабыргасы нигез ягына тигез. A_1 түбәсеннән AB_1C_1 яссылыгына төшерелгән перпендикулярның сурәтен төзергә.

2. Цилиндрның ян өслегендә ятучы ике ноктасы һәм нигез яссылыгында ятучы бер ноктасы аша үтүче яссылык үткәреп, цилиндрның кисемен төзергә.

3. Параллель проекциядә аффин реперының сурәте бирелгән. π' яссылыгы өч ноктасының M,N,P аксонометрик проекциясе һәм аларның икенчел M_3,N_3,P_3 $\left(M_3\notin\left(N_3P_3\right)\right)$ проекцияләре белән бирелгән. π' яссылыгын кисеп үтүче l° турысы l аксонометрик проекциясе һәм l_3 икенчел проекциясе белән бирелгән. $X'=\pi'\cap l'$ ноктасының аксонометрик һәм икенчел проекциясен төзергә.

4. Параллель проекциядә үлчәмнәре $1:2:3$ чагыштырмасында булган $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ турыпочмаклы параллелепипедының сурәте бирелгән. Шулай ук C' түбәсеннән чыгучы параллелепипедның кабыргаларын

M', N', P' нокталарында кисеп үтүче яссылык бирелгән. A_1' ноктасыннан $(M'N'P')$ яссылыгына төшерелгән перпендикулярның сурәтен төзергә.

5. Параллель проекциядә $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ кубының һәм $(M'N')$ турысы ян кырларын кисеп үтәрлек M', N' нокталарының сурәте бирелгән. $(M'N')$ һәм $(D'D_1')$ турыларының уртак перпендикулярының сурәтен төзергә.

6. A һәм B нокталары дүртпочмаклы призманың капма-каршы ятучы ян кабыргаларында урнашканнар. AB турысы белән призманың диагональ кисемнәре яссылыкларының очрашу нокталарын төзегез.

7. Дүртпочмаклы призманың өске нигезендә ятучы нокта һәм ике ян кырында ятучы нокта аша яссылык үткәреп, призманың кисемен төзегез.

Вариант №14.

1. Төзек бишпочмаклы пирамиданың сурәтен төзегез.

2. $SABC$ пирамидасының сурәте бирелгән: ΔABC-тигезьянлы, $|SA| = |SB| = |SC| = 2|AC|$. (SA) һәм (BC) турыларының уртак перпендикулярын сурәтләргә.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призмасының AA_1 ян кабыргасында ятучы M ноктасы аша призманың BD_1 диагонален һәм CC_1 ян кабыргасын кисеп үтүче туры үткәрергә.

4. $\Re(O', A_1', A_2', A_3')$-ортонормалаштырылган репер, Σ-сурәтләр яссылыгы, $Q' \notin \Sigma, A_i = (O'A_i') \cap \Sigma, (i = 1, 2, 3), (OA_i)$-ортогональ проекциядә төрле өч аксонометрик күчәрләр булсын. $A_1A_2A_3$ өчпочмагы өчпочмаклы эз дип атала. Әгәр эзләр өчпочмагы билгеләнмәгән булса, аксонометрик күчәрләр үзара җәенке почмак тәшкил итәләр. Q ноктасы аша чыгучы һәм үзара парлап җәенке почмаклар тәшкил итүче теләсә нинди өч нур аксонометрик күчәрләр рәвешендә алына алуын исбатларга.

5. Эпюрда бер турыда ятмаучы өч $A(A_1,A_2),B(B_1,B_2),C(C_1,C_2)$ нокталары белән бирелгән Σ яссылыгының $\Sigma\cap\Pi_1$ һәм $\Sigma\cap\Pi_2$ эзләрен төзергә.

6. Дүртпочмаклы призма бирелгән. Призманың ян кырында алынган нокта аша үтүче яссылыкка параллель, бирелгән кырның аскы нигез ягы һәм өске нигезнең капма-каршы ятучы түбәсе аша яссылык үткәреп, призманың кисемен төзергә.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призмасында $M\in A_1B_1$ ноктасы аша һәм BD_1,CC_1 турыларын кисеп үтүче туры үткәрегез.

Вариант №15.

1. Ирекле дүртпочмаклы призманың нигез диагонале аша әлеге диагональне кисеп үтмәүче диагональгә параллель булган яссылык үткәрергә.

2. Призманың ян кабыргасына тигез биеклеге булган төзек өчпочмаклы пирамидага камалган төзек өчпочмаклы призманы сурәтләргә.

3. Төзек өчпочмаклы $SABC$ пирамидасының сурәте бирелгән. Пирамиданың эчендә S түбәсеннән (ABC) яссылыгына M_1 проекциясе белән бирелгән M ноктасы бирелгән. M ноктасы аша нигез якларына перпендикуляр төшерергә.

4. Кубка камалган шарның сурәтен төзергә.

5. Параллель проекциядә $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ кубының сурәте бирелгән. Кубның диагонален һәм аның кырының диагонален тәшкил итүче $(A'C_1')$ һәм $(B'D')$ чиктәш турыларның уртакперпендикуляры сурәтен төзергә. Әгәр a-куб кабыргасының озынлыгы булса, бу турылар арасындагы ераклыкны исәпләргә.

6. Бишпочмаклы пирамиданың M һәм N ян кырларында һәм P-нигез яссылыгында ятучы нокталар аша яссылык үткәреп, пирамиданың кисемен төзегез.

7. Дүртпочмаклы призманың ян кабыргасында ятучы нокта аша аскы нигезнең ягы һәм өске нигезнең түбәсе аша үтүче яссылыкка параллель кисем үткәрегез.

Вариант №16.

1. Төзек уникепочмаклыкның сурәтен төзергә.

2. A һәм B нокталары дүртпочмаклы пирамиданың ян кабыргаларында, ә C ноктасы пирамиданың нигез яссылыгында урнашуын белә торып, ABC яссылыгының эзен төзергә.

3. Шарга камалган төзек дүртпочмаклы призманың сурәтен төзергә.

4. Параллель проекциядә l' турысының һәм $A'B'C'D'E'$ пространство сынык сызыгының сурәте бирелгән. Кәкре сызык түбәләреннән l' турысына ортогональ проекцияләрнең сурәтен төзергә.

5. Эпюрда кисешүче турылар пары белән бирелгән ике яссылыкның кисешү турыларының проекцияләрен табарга.

6. A ноктасы дүртпочмаклы пирамиданың ян кабыргасында, ә B ноктасы ян кырында урнашкан. AB турысы белән әлеге кабырганы үз эченә алмаган диагональ яссылыкның очрашу ноктасын табыгыз.

7. A ноктасы өчпочмаклы призманың ян кырында, ә B ноктасы аскы нигездә урнашкан. AB турысы белән призманың A ноктасы үз эченә алмаган ян кырлар яссылыкларының кисешү ноктасын төзегез.

Вариант №17.

1. Кубның үзәгеннән диагоналенә перпендикуляр булган яссылык үткәрелгән. Параллель проекциядә куб белән әлеге яссылык кисеменең сурәтен төзергә.

2. $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ - төзек алтыпочмаклы призма. AA_1 кабыргасына һәм очлары AB һәм D_1E_1 якларында урнашкан кисемтәгә уртак перпендикуляр төзергә.

3. Шарны камаучы төзек тетраэдрның сурәтен төзергә.

4. Параллель проекциядә Q эллипсы Q' әйләнәсенең сурәте, ә l турысы Q' әйләнә яссылыгында ятучы l' турысының сурәте булып тора. l' турысында ятучы һәм Q' әйләнәсенең диаметрына конгруэнт булган кисемтәнең сурәтен төзергә.

5. Параллель проекциядә кубның аскы нигезе төзек дүртпочмаклы пирамиданың нигез яссылыгына керерлек, ә кубның өске нигез түбәләре пирамиданың ян кабыргаларында ятарлык нигез диагоналенә конгруэнт ян кабыргасы булган пирамидага камалган кубның сурәтен төзергә.

6. Төзек бишпочмаклы пирамиданың сурәтен төзегез.

7. M һәм N нокталары кубның чиктәш AB һәм A_1D_1 кабыргаларында урнашканнар. AA_1 һәм MN турыларына уртак перпендикуляр төзегез.

Вариант №18.

1. Бишпочмаклы пирамиданың биеклегендә алынган нокта һәм ян кырларында алынган ике нокта белән бирелгән яссылык үткәреп, пирамиданың кисемен төзегез.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының сурәтендә BB_1C_1C кырында ятучы һәм BB_1 кабыргасына параллель MP турысы бирелгән. MP һәм BD турыларының уртак перпендикулярын төзергә.

3. Параллель проекциядә төзек тетраэдрның сурәтен төзергә.

4. $\Re(O', A_1', A_2', A_3')$-ортонормалаштырылган репер, Σ-сурәтләр яссылыгы, $Q' \notin \Sigma, A_i = (O'A_i') \cap \Sigma, (i = 1, 2, 3), (OA_i)$-ортогональ проекциядә төрле өч аксонометрик күчәрләр булсын. $A_1A_2A_3$ өчпочмагы өчпочмаклы эз дип атала. Эзләр өчпочмагы һәрвакыттада кысынкыпочмаклы булуын исбатларга (теләсә нинди кысынкыпочмаклы өчпочмак эзләр өчпочмагы дип каралырга мөмкин).

5. Кубның үзәге аша аның диагоналенә перпендикуляр яссылык үткәрелгән. Параллель проекциядә кубның бу яссылык белән кисемен төзергә. Әгәр a-кубның кабыргасы булса, кисемнең мәөданын исәпләргә.

6. Бишпочмаклы призманың эзе һәм ян кабыргасында алынган ноктасы белән бирелгән яссылык үткәреп, призманың кисемен төзергә.

7. Өчпочмаклы пирамиданың ян кырында ятучы M ноктасы аша капма-каршы ятучы ян кабыргасына параллель туры үткәреп, аның аның пирамиданың нигез яссылыгы белән кисемен төзегез.

Вариант №19.

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының сурәте бирелгән. AA_1 кабыргасына һәм DCC_1D_1 кырында ятучы PM турысына уртак перпендикуляр төзергә.

2. $SABC$ пирамидасының сурәте бирелгән: ΔABC-тигезьянлы, $|SA|=|SB|=|SC|=2|AC|$. (SA) һәм (BC) турыларының уртак перпендикулярын сурәтләргә.

3. Сурәтләр яссылыгында $A',B',C'\left(A'\notin(B'C')\right)$ нокталарының проекциясе һәм аларның бер координаталар яссылыгына икенчел проекцияләре, һәм шулай ук l',m' кисешүче турыларының аксонометрик проекцияләр һәм аларның координаталар яссылыгына икенчел проекцияләре бирелгән. $(A'B'C')$ яссылыгының l' һәм m' турылары белән билгеләнүче яссылык белән кисешү сызыгының сурәтен төзергә.

4. $\Re(O',A_1',A_2',A_3')$-ортонормалаштырылган репер, Σ-сурәтләр яссылыгы, $Q'\notin\Sigma, A_i=(O'A_i')\cap\Sigma,(i=1,2,3),(OA_i)$-ортогональ проекциядә төрле өч аксонометрик күчәрләр булсын. $A_1A_2A_3$ өчпочмагы өчпочмаклы эз дип атала. Аксонометрик күчәрләр эзләр өчпочмагының биеклекләре буенча юнәлгәнлеген исбатларга (нигездән биеклеккә таба).

5. Эпюрда $ABCD$ тетраэдрының горизонталь һәм вертикаль проекцияләре бирелгән. Тетраэдрның бер турыда ятмаучы

$(M_1, M_2), N(N_1, N_2), P(P_1, P_2)$ нокталары белән бирелгән яссылык үткәреп, тетраэдрның кисемен төзергә.

6. Төзек алтыпочмаклы пирамиданың сурәтен төзегез.

7. Дүртпочмаклы пирамиданың ян кырында ятучы нокта аша бу кырга кермәүче кабыргага параллель туры үткәреп, бу туры белән нигез яссылыгының кисешү ноктасын төзегез.

V бүлек. Йомгаклау.

Бу методик кулланма алдан куелган барлык максатларны күздә тотып башкарылды. Аның буенча студентлар “Сурәтләр методы” курсын өйрәнгәндә тиешле дәрәҗәдәге татар телендә бирелгән белем белән таныша алалар. Шулай ук аудиторияләрдә мөстәкыйль эшләү, имтиханнарга әзерләнү өчен дә бик уңайлы ярдәмлек булып тора. Монда бирелгән тема буенча кыскача теория, әдәбият тәкъдим ителгән, эшләнелгән мәсьәләләр һәм мөстәкыйль чишүгә мәсьәләләр бирелгән. Һәрбер математик термин математик сүзлек ярдәмендә тәрҗемә ителде. Билгеләмәләр, теоремалар, мәсьәләләр һәм сызымнар төгәл, аңлаешлы итеп тасвирланган. Бу кулланма әлеге курсны татарча өйрәнергә теләүче студентларга белемнәрен үстерү өчен язылды.

Кулланылган әдәбият:

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия Ч. 2. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов – Москва: Просвещение, 1987.

2. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов – Москва: Просвещение, 1975.

3. Казаков П.Г. Параллельные проекции и методы и решения конструктивных задач. – Москва: Учпедгиз, 1957.

4. Четверухин Н.Ф. Изображения фигур в курсе геометрии. – Москва: Учпедгиз, 1958.

5.Ефимов Н. В. Высшая геометрия. – Москва: Наука, 1978.

6. Лащенов М.П. Полные и неполные изображения и их применение в педагогическом процессе. – Москва: Учпедгиз, 1963.

7. Атанасян Л.С. Бутузов В.Ф. Кадомцев С.Б. и др. Геометрия, 7-9: учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2010.

Интернет-ресурс

1. www. edu - "Российское образование" Федеральный портал.

2. www. school.edu - "Российский общеобразовательный портал".

3. www.school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов

4. www.mathvaz.ru - досье школьного учителя математики

5. www.it-n.ru "Сеть творческих учителей"