ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 6 (469)

УДК 517.968

З.Б. ЦАЛЮК

СТРУКТУРА РЕЗОЛЬВЕНТЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

1. Рассмотрим систему уравнений

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)x(s)ds + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $f, x \in C[0,\infty) = C([0,\infty) \to C^n)$, $K \in L_1 = L_1([0,\infty) \to M_{n\times n})$, C^n — пространство n-мерных комплексных векторов, а $M_{n\times n}$ — пространство квадратных матриц. Через I будем обозначать единичную матрицу. Положим

$$K_1 * K_2(t) = \int_0^t K_1(t-s)K_2(s)ds, \quad \varphi(U)(t) = U(t) - K * U(t), \quad \widehat{K}(z) = \int_0^\infty e^{-zt}K(t)dt$$

— преобразование Лапласа функции K, R — резольвента ядра K, т. е. R является решением уравнения $R(t) = K(t) + K(t) * R(t)$. Как известно, решение уравнения (1) имеет вид $x(t) = f(t) + R(t) * f(t)$. Поэтому изучение асимптотического поведения x при заданном асимптотическом поведении f определяется резольвентой R. Так как $\widehat{R}(z) = (I - \widehat{K}(z))^{-1}\widehat{K}(z)$, то асимптотический (при $t \to \infty$) характер R определяется особыми точками $(I - \widehat{K}(z))^{-1}$. Из $K \in L_1$ следует, что $(I - \widehat{K}(z))^{-1}$ мероморфна в области $\operatorname{Re} z > 0$, т. е. в этой области она имеет лишь полюсы. Случай, когда $(I - \widehat{K}(z))^{-1}$ имеет полюсы и на мнимой оси, был изучен в [1]. В [2] в одномерной ситуации рассматривался случай, когда в конечном числе точек $\lambda_j = i\gamma_j$ функция $I - \widehat{K}(z)$ имела нули не целого порядка. Здесь, в частности, асимптотика резольвенты при наличии подобных особых точек у $(I - \widehat{K}(z))^{-1}$ исследуется в общей n-мерной ситуации. Кроме того, получено усиление результата работ [3], [2].

Пусть $I - \widehat{K}(z)$ не обратима в конечном числе точек $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, $\operatorname{Re}\lambda_j \geq 0$. Функцию $Q(t)$ назовем K-регулярной, если $\widehat{Q}(z)$ определена всюду в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, за исключением точек λ_j, $I + \widehat{Q}(z)$ обратима и λ_j — устранимые особые точки матриц $[I - \widehat{K}(z)][I + \widehat{Q}(z)]$ и $[I + \widehat{Q}(z)]^{-1}[I - \widehat{K}(z)]^{-1}$. Последнее равносильно существованию одного из пределов $\lim\limits_{z\to\lambda_j}[I - \widehat{K}(z)][I + \widehat{Q}(z)]$ или $\lim\limits_{z\to\lambda_j}[I + \widehat{Q}(z)]^{-1}[I - \widehat{K}(z)]^{-1}$ и обратимости предельной матрицы.

Лемма 1. *Пусть $I - \widehat{K}(z)$ не обратима в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ в конечном числе точек. Для каждой K-регулярной функции Q, удовлетворяющей условию*

$$\varphi(Q) \in L_1[0,\infty), \tag{2}$$

существует такая функция $R_0 \in L_1[0,\infty)$, что резольвента R ядра K представима в виде

$$R(t) = R_0(t) + Q(t) + Q(t) * R_0(t). \tag{3}$$

Обратно, если для некоторой K-регулярной Q существует такое $R_0 \in L_1[0,\infty)$, что выполнено (3), то Q удовлетворяет условию (2).

Выбор K-регулярной функции обусловлен характером особых точек $(I-\widehat{K}(z))^{-1}$. В одномерном случае особые точки $(I-\widehat{K}(z))^{-1}$ — это нули функции $1-\widehat{K}(z)$, характер которых можно определить и не находя $\widehat{K}(z)$. Например, если λ — нуль функции $\widehat{K}(z)-1$, $\varphi(t^{\beta-1}e^{\lambda t})\in L_1[0,\infty)$, $\beta>0$, и $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t^{\beta-1}e^{\lambda t})dt\neq 0$, то λ — нуль порядка β. Это следует из равенства

$$1-\widehat{K}(z)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}(z-\lambda)^\beta\widehat{\varphi}(t^{\beta-1}e^{\lambda t})(z)$$

и того, что $\widehat{\varphi}(t^{\beta-1}e^{\lambda t})(\lambda)\neq 0$.

Если $\widehat{K}(z)-1$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z\geq 0$ конечное число нулей $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ порядков $m_1,\dots,m_k$ соответственно, причем $m_1,\dots,m_p$ целые, а остальные m_j — не целые числа, то, как показано в [2], в качестве Q можно выбрать функцию

$$Q(t)=\sum_{j\leq p}\sum_{r=0}^{m_j-1}c_{jr}t^re^{\lambda_j t}+\sum_{j>p}\left\{\sum_{r=0}^{[m_j]}c_{jr}t^{m_j-r-1}+\sum_{r=0}^{[m_j]-1}\widetilde{c}_{jr}t^r\right\}e^{\lambda_j t}.$$

При этом регулярность Q обеспечивает требование

$$\prod_{j=1}^k(z-\lambda_j)^{m_j}[1+\widehat{Q}(z)]\neq 0,\quad \operatorname{Re} z\geq 0. \tag{4}$$

В случае лишь целых порядков это означает, что многочлен (4) должен быть устойчивым.

Чтобы обеспечить выполнение условия (2), в [3] требовалось, чтобы $t^mK\in L_1[0,\infty)$ при некотором m. Использование леммы 1 позволяет ослабить это требование до необходимого. А именно, справедлива

Теорема 1. *Пусть $\widehat{K}(z)-1$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z\geq 0$ конечное число нулей $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ целых порядков $m_1,\dots,m_k$. Пусть далее для тех j, при которых $\operatorname{Re}\lambda_j=0$,*

$$\varphi(t^re^{\lambda_j t})\in L_1[0,\infty),\quad r\leq m_j-1. \tag{5}$$

Тогда для любого квазимногочлена

$$Q(t)=\sum_{j=1}^k\sum_{r=0}^{m_j-1}c_{jr}t^re^{\lambda_j t},$$

удовлетворяющего (4), существует такая $R_0\in L_1[0,\infty)$, что

$$R(t)=R_0(t)+Q(t)+Q(t)*R_0(t). \tag{6}$$

Обратно, если для любого квазимногочлена Q, удовлетворяющего (4), справедливо (6) с $R_0\in L_1[0,\infty)$, то выполнено и (5).

Соответствующий результат справедлив и в случае, когда некоторые нули λ_j имеют не целый порядок.

Следующий пример показывает, что условия теоремы 1 слабее условий соответствующей теоремы работы [3]. Положим

$$K(t)=-\left(\frac{\cos t}{(t+1)^{1+\varepsilon}}\right)',\quad \varepsilon\in(0,1).$$

Тогда $K\in L_1[0,\infty)$, уравнение $\widehat{K}(z)=1$ имеет на мнимой оси единственный корень $z=0$,

$$\varphi(1)=1-\int_0^t K(s)ds\in L_1[0,\infty),\quad \text{а}\quad tK\notin L_1[0,\infty).$$

В случае размерности пространства больше единицы $[I - \widehat{K}(z)]^{-1} = \frac{H(z)}{\Delta(z)}$, где $\Delta(z) = \det[I - \widehat{K}(z)]$, а $H(z)$ — присоединенная матрица. Поэтому определение характера особой точки может представить существенные трудности. Эти трудности могут усугубляться еще сложностью построения K-регулярной функции Q. Следующий прием позволяет строить Q последовательно.

Пусть $I-\widehat{K}(z)$ не обратима в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ в конечном числе точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Пусть функция $Q_0(t)$ такова, что $\widehat{Q}_0(z)$ определена всюду в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, за исключением точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $p < k$, $I + \widehat{Q}_0(z)$ обратима и при $j \leq p$ существует $\lim\limits_{z \to \lambda_j} [I - \widehat{K}(z)][I + \widehat{Q}_0(z)] = D_j$, причем D_j — обратимая матрица.

Положим $K_0(t) = K(t) - \varphi(Q_0)(t)$. В силу равенства $I - \widehat{K}_0(z) = [I - \widehat{K}(z)][I + \widehat{Q}_0(z)]$ матрица $I - \widehat{K}_0(z)$ обратима всюду в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, за исключением точек $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_k$. Если теперь Q_1 является K_0-регулярной функцией, то $Q(t) = Q_0(t) + Q_1(t) + Q_0(t) * Q_1(t)$ будет K-регулярной. Это легко следует из равенств

$$[I - \widehat{K}(z)][I + \widehat{Q}(z)] = [I - \widehat{K}(z)][I + \widehat{Q}_0(z)][I + \widehat{Q}_1(z)] = [I - \widehat{K}_0(z)][I + \widehat{Q}_1(z)].$$

Так как $[I - \widehat{K}(z)]^{-1}$ мероморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, то ее особые точки λ_j с $\operatorname{Re} z > 0$ являются полюсами. Некоторые полюсы могут лежать и на прямой $\operatorname{Re} z = 0$. Пусть $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_k$ — все полюсы $[I - \widehat{K}(z)]^{-1}$. Тогда, как показано в [1], можно выбрать $Q_1(t) = \sum\limits_{j>p} P_{m_j-1}(t) e^{\lambda_j t}$, где m_j — порядок полюса λ_j, $P_{m_j-1}(t)$ — многочлены с матричными коэффициентами степени не больше $m_j - 1$.

Точка λ_j с $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ может быть полюсом $[I - \widehat{K}(z)]^{-1}$, если K имеет конечные моменты достаточно высокого порядка. Если у K нет конечных моментов, то $\det[I - \widehat{K}(z)]$ может иметь нули не целых порядков. Ниже изучается один из таких случаев в предположении

$$\int_t^\infty e^{-\lambda_j s} K(s) ds \sim C_j t^{-\alpha_j}, \quad \alpha_j \in (0,1), \quad t \to \infty \quad \text{(ср. [4]–[6])}.$$

Пусть матрица $I - \widehat{K}(\lambda_j)$ не обратима. Обозначим ее столбцы через $a_1, \ldots, a_n$ и предположим, что векторы $a_{k_1}, \ldots, a_{k_r}$ линейно независимы, а остальные являются их линейной комбинацией, т. е. $I - \widehat{K}(\lambda_j)$ имеет ранг r. Пусть $a_l = \sum\limits_{q=1}^{r} c_{lq} a_{k_q}$ при $l \neq k_1, \ldots, k_r$. Обозначим через g_l вектор, у которого k_q-компонента равна $-c_{lq}$, l-я равна единице, а остальные — нули. Через G_j обозначим матрицу, у которой l-й столбец равен g_l, а остальные столбцы нулевые. Тогда $[I - \widehat{K}(\lambda_j)]G_j = 0$ и $G_j^2 = G_j$.

Теорема 2. *Пусть $I - \widehat{K}(z)$ не обратима при $\operatorname{Re} z \geq 0$ в конечном числе точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, причем $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, $j = 1, \ldots, p$, $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, $j > p$. Пусть далее при $j = 1, \ldots, p$*

$$\int_t^\infty e^{-\lambda_j s} K(s) ds = \frac{C_j + V_j(t)}{(t+1)^{\alpha_j}}, \tag{7}$$

где $\alpha_j \in (0,1)$, матрица $C_j G_j + I - \widehat{K}(\lambda_j)$ обратима и $V_j \in C_0[0,\infty)$ [1], а $\frac{d}{dt} V_j \in L_1[0,\infty)$. Тогда для резольвенты R ядра K справедливо представление

$$R(t) = \sum_{j=1}^{p} A_j \frac{e^{\lambda_j t}}{(t+1)^{1-\alpha_j}} + \sum_{j=p+1}^{m} P_{m_j-1}(t) e^{\lambda_j t} + \sum_{j=1}^{p} B_j \frac{e^{\lambda_j t}}{(t+1)^{1-\alpha_j}} * W_1(t) + W_2(t), \tag{8}$$

где $W_1, W_2 \in L_1[0,\infty)$, m_j — порядок полюса λ_j.

[1] $C_0[0,\infty)$ — пространство непрерывных на $[0,\infty)$ функций, имеющих нулевой предел при $t \to \infty$.

Замечание. Условие $V_j' \in L_1[0,\infty)$ накладывается лишь для того, чтобы обеспечить включение

$$U_j(t) = \frac{V_j(t)}{(t+1)^{\alpha_j}} - \frac{V_j(t)}{(t+1)^{\alpha_j}} * \frac{1-\alpha_j}{(t+1)^{2-\alpha_j}} \in L_1[0,\infty).$$

Оно, естественно, может быть заменено любым другим, обеспечивающим нужное включение. Например, можно потребовать $V_j(t)/(t+1)^{\alpha_j} \in L_1$ или $V_j(t) = V_{j1}(t) + V_{j2}(t)$, где $V_{j1}' \in L_1$, $V_{j2}(t)/(t+1)^{\alpha_j} \in L_1$. Воспользуемся этим при доказательстве теоремы 3. Как уже отмечалось [2], не ясно, не выполняется ли включение $U_j(t) \in L_1[0,\infty)$ лишь при условии $V_j \to 0$.

Что касается условия обратимости матрицы $C_jG_j + I - \widehat{K}(\lambda_j)$, то в наиболее интересном случае $\operatorname{rank}(I-\widehat{K}(\lambda_j)) = n-1$ оно означает (см. построение G_j), что уравнение $(I-\widehat{K}(\lambda_j))x = C_ju$, где $u \in \operatorname{Ker}(I-\widehat{K}(\lambda_j))$, $u \neq 0$, не имеет решения. Последнее выполняется, например, при $n=1$, а также $n>1$, $\widehat{K}(\lambda_j) > 0$, 1 — максимальное собственное значение $\widehat{K}(\lambda_j)$ и $C_j \geq 0, C_j \neq 0$. Действительно, согласно теореме Перрона [7] в этом случае $u>0$, и присоединенная к $I-\widehat{K}(\lambda_j)$ матрица $D>0$. Если предположить, что уравнение $(I-\widehat{K}(\lambda_j))x = C_ju$ имеет решение, то $DC_ju = 0$, что невозможно, т.к. $C_ju \geq 0$, $C_ju \neq 0$ и, значит, $DC_ju > 0$. Таким образом, в условиях, несколько слабее условия $K(t) \geq 0$ теоремы Феллера [4] и ее многомерного аналога [5], [6], но при дополнительном требовании на $V_j(t)$, из теоремы 2 вытекает не только известная асимптотика решения уравнения (1), но и определенное представление резольвенты.

Хорошо известно, что интегродифференциальное уравнение различными способами может быть сведено к интегральному. Сводя систему

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t K(t-s)x(s)ds + f(t) \tag{9}$$

определенным образом к системе интегральных уравнений и применяя к последней теорему 2, получим асимптотическое представление функции Коши системы (9). Напомним, что функция Коши $R(t)$ системы (9) — это решение задачи

$$R'(t) = AR(t) + K * R(t), \quad R(0) = I, \tag{10}$$

и любое решение (9) имеет вид $x(t) = R(t)x(0) + R * f(t)$. Последнее выражение позволяет по асимптотическому представлению R находить асимптотику $x(t)$.

Теорема 3. *Пусть $K \in L_1[0,\infty)$ и матрица $zI - A - \widehat{K}(z)$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, не обратима в конечном числе точек $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, причем $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, $j=1,\dots,p$, $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, $j>p$. Пусть далее для ядра K выполнены условия (7). Тогда для функции Коши $R(t)$ системы (9) справедливо представление (8), где $W_1, W_2 \in L_1 \cap C_0$.*

Для доказательства теорем понадобится подсчитать некоторые свертки.

Лемма 2. *Пусть $\beta > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_3 > 0$, $r \geq 0$ целое. Тогда*

$$\frac{e^{\lambda_1 t}}{(t+1)^\beta} * t^r e^{\lambda_3 t} = c\frac{e^{\lambda_1 t}}{(t+1)^\beta} + P_r(t)e^{\lambda_3 t} + V(t),$$
$$\frac{e^{\lambda_1 t}}{(t+1)^\beta} * e^{-\lambda_2 t} = c_1\frac{e^{\lambda_1 t}}{(t+1)^\beta} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + V(t),$$
$$e^{-\lambda_2 t} * t^r e^{\lambda_3 t} = ce^{-\lambda_2 t} + P_r(t)e^{\lambda_3 t},$$

где $V \in L_1[0,\infty) \cap C_0[0,\infty)$.

2. Доказательство леммы 1. Положим $K_0(t) = K(t) - \varphi(Q)(t)$. Тогда $K_0 \in L_1[0,\infty)$ и

$$I - \widehat{K}_0(z) = (I - \widehat{K}(z))(I + \widehat{Q}(z)).$$

Так как $Q(t)$ K-регулярна, то $I - \widehat{K}_0(z)$ обратима в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Пусть $R_0(t)$ — резольвента ядра K_0. По теореме Винера $R_0 \in L_1[0,\infty)$. Далее, из равенства $I + \widehat{R}_0(z) = [I - \widehat{K}_0(z)]^{-1}$ и аналогичного равенства для $\widehat{R}$ получим

$$\widehat{R}(z) = \widehat{R}_0(z) + \widehat{Q}(z) + \widehat{Q}(z)\widehat{R}_0(z)$$

и, значит, для R справедливо представление (3).

Обратно, пусть для K-регулярной Q выполнено (3) с $R_0 \in L_1[0,\infty)$. Обозначим через $-K_0(t)$ резольвенту ядра $-R_0(t)$. Из (3) следует, что $I + \widehat{R}(z) = [I + \widehat{Q}(z)][I + \widehat{R}_0(z)]$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$, $z \neq \lambda_j$ и, следовательно,

$$[I - \widehat{K}(z)][I + \widehat{Q}(z)][I + \widehat{R}_0(z)] = I. \tag{11}$$

Так как $\lim\limits_{z\to\lambda_j} [I - \widehat{K}(z)][I + \widehat{Q}(z)]$ существует, то (11) означает, что матрица $I + \widehat{R}_0(z)$ обратима в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. По теореме Винера $-K_0 \in L_1[0,\infty)$.

Отсюда и из (11) следует $I - \widehat{K}_0(z) = [I - \widehat{K}(z)][I + \widehat{Q}(z)]$, т. е. $K_0(t) = K(t) - Q(t) + K * Q(t) = K(t) - \varphi(Q)(t)$. Так как $K_0, K \in L_1[0,\infty)$, то и $\varphi(Q) \in L_1[0,\infty)$. $\square$

Доказательство леммы 2. При $r = 0$, интегрируя по частям, получим

$$e^{\lambda_3 t} * \frac{e^{\lambda_1 t}}{(t+1)^\beta} = e^{\lambda_3 t}\int_0^\infty \frac{e^{(\lambda_1-\lambda_3)s}}{(s+1)^\beta} ds + c\frac{e^{\lambda_1 t}}{(t+1)^\beta} - \frac{\beta e^{\lambda_3 t}}{\lambda_1 - \lambda_3}\int_t^\infty \frac{e^{(\lambda_1-\lambda_3)s}}{(s+1)^{\beta+1}} ds.$$

Так как

$$\left| e^{\lambda_3 t}\int_t^\infty \frac{e^{(\lambda_1-\lambda_3)s}}{(s+1)^{\beta+1}}\, ds \right| \leq \frac{c}{(t+1)^{\beta+1}},$$

то первое равенство леммы справедливо при $r = 0$. Предполагая справедливость этого равенства при всех $r_0 < r + 1$, получим

$$t^{r+1}e^{\lambda_3 t} * \frac{e^{\lambda_1 t}}{(t+1)^\beta} = (r+1)\int_0^t e^{\lambda_3(t-\tau)}\left[\tau^r e^{\lambda_3\tau} * \frac{e^{\lambda_1\tau}}{(\tau+1)^\beta}\right] d\tau =$$
$$= P_{r+1}(t)e^{\lambda_3 t} + C\,\frac{e^{\lambda_1 t}}{(t+1)^\beta} + v_0(t) + c\,e^{\lambda_3 t}\int_0^\infty e^{-\lambda_3\tau}v_r(\tau)\, d\tau + v(t),$$

где $v(t) = ce^{\lambda_3 t}\int\limits_t^\infty e^{-\lambda_3 s}v_r(s)\, ds \to 0$ при $t \to \infty$ и

$$\int_0^\infty |v(t)|dt \leq c\int_0^\infty |v_r(s)|\int_0^s e^{-\operatorname{Re}\lambda_3(s-t)}\, dt\, ds < \infty.$$

Первое утверждение леммы 2 доказано.

Далее, интегрируя по частям и используя тот факт, что

$$\int_0^t \frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2)s}}{(s+1)^\beta}\, ds = O\Big(\frac{e^{\lambda_2 t}}{(t+1)^\beta}\Big), \quad t \to \infty,$$

получим

$$\frac{e^{\lambda_1 t}}{(t+1)^\beta} * e^{-\lambda_2 t} = e^{-\lambda_2 t}\left[\frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2)s}}{(\lambda_1+\lambda_2)(s+1)^\beta}\Big|_0^t + \frac{\beta}{\lambda_1+\lambda_2}\int_0^t \frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2)s}}{(s+1)^{\beta+1}}\,ds\right] =$$
$$= C_1\frac{e^{\lambda_1 t}}{(t+1)^\beta} + C_2 e^{-\lambda_2 t} + v(t),$$

где

$$v(t) = O\left(\frac{1}{(t+1)^{\beta+1}}\right) \in L_1[0,\infty)\cap C_0[0,\infty).$$

Наконец,

$$t^r e^{\lambda_3 t} * e^{-\lambda_2 t} = e^{\lambda_3 t}\int_0^\infty (t-s)^r e^{-(\lambda_2+\lambda_3)s}\,ds - e^{\lambda_3 t}\int_t^\infty (t-s)^r e^{-(\lambda_2+\lambda_3)s}\,ds =$$
$$= P_r(t)e^{\lambda_3 t} + (-1)^r e^{-\lambda_2 t}\int_0^\infty \tau^r e^{-(\lambda_2+\lambda_3)\tau}\,d\tau. \quad \square$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $Q(t) = \sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{r=0}^{m_j-1} C_{jr}t^r e^{\lambda_j t}$ удовлетворяет требованию (4). По условию теоремы

$$1 - \widehat{K}(z) = \prod_{j=1}^{k}(z-\lambda_j)^{m_j}\Psi(z),$$

где $\Psi(z)\neq 0$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$. Следовательно,

$$[1-\widehat{K}(z)][1+\widehat{Q}(z)] = \Psi(z)\prod_{j=1}^{k}(z-\lambda_j)^{m_j}[1+\widehat{Q}(z)] \neq 0$$

при $\operatorname{Re} z \geq 0$. Это означает, что Q — K-регулярная функция.

Пусть $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$. Тогда $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_j s}K(s)ds = \widehat{K}(\lambda_j) = 1$, $\int\limits_0^\infty s^r e^{-\lambda_j s}K(s)ds = \widehat{K}^{(r)}(\lambda_j) = 0$ при $r \leq m_j - 1$. Следовательно, при $r \leq m_j - 1$

$$\varphi(t^r e^{\lambda_j t}) = e^{\lambda_j t}\left[t^r - \int_0^\infty (t-s)^r e^{-\lambda_j s}K(s)ds\right] + \int_t^\infty (t-s)^r e^{\lambda_j(t-s)}K(s)ds =$$
$$= \int_t^\infty (t-s)^r e^{\lambda_j(t-s)}K(s)ds.$$

Так как

$$\int_0^\infty\int_t^\infty (s-t)^r e^{-\operatorname{Re}\lambda_j(s-t)}|K(s)|ds\,dt \leq \int_0^\infty |K(s)|\int_0^\infty \tau^r e^{-\operatorname{Re}\lambda_j\tau}d\tau\,ds < \infty,$$

то $\varphi(t^r e^{\lambda_j t}) \in L_1[0,\infty)$ при $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, $r \leq m_j - 1$. Отсюда и из условия (5) получим $\varphi(Q) \in L_1[0,\infty)$. Представление (6) следует теперь из леммы 1.

Обратно, если представление (6) справедливо для каждого квазимногочлена Q, удовлетворяющего (4), то в силу леммы 1 $\varphi(Q) \in L_1[0,\infty)$. Пусть Q — один из таких квазимногочленов, $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ и $r \leq m_j - 1$. Положим $Q_1(t) = Q(t) + \Delta c t^r e^{\lambda_j t}$. При достаточно малом $\Delta c > 0$ квазимногочлен Q_1 также удовлетворяет (4), и потому $\varphi(Q_1) \in L_1[0,\infty)$. Следовательно, $\varphi(t^r e^{\lambda_j t}) = \frac{1}{\Delta c}[\varphi(Q_1) - \varphi(Q)] \in L_1[0,\infty)$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся леммой 1 и указанным перед формулировкой теоремы приемом построения K-регулярной Q. При $j = 1,\ldots,p$ положим

$$U_j(t) = \frac{e^{\lambda_j t}}{(t+1)^{1-\alpha_j}}G_j, \quad \Psi_j(t) = \int_t^\infty e^{-\lambda_j s}K(s)ds.$$

Интегрируя по частям и используя равенство $[I-\widehat{K}(\lambda_j)]G_j=0$, найдем

$$\varphi(U_j)(t)=e^{\lambda_j t}\Big[\frac{1}{(t+1)^{1-\alpha_j}}I-\int_0^t\frac{e^{-\lambda_j s}K(s)}{(t-s+1)^{1-\alpha_j}}ds\Big]G_j=$$

$$=e^{\lambda_j t}\Big[\Psi_j(t)-\Psi_j*\frac{1-\alpha_j}{(t+1)^{2-\alpha_j}}\Big]G_j. \quad (12)$$

Снова интегрируя по частям, получим

$$\varphi(U_j)=e^{\lambda_j t}\Big[\frac{C_j+V_j(t)}{(t+1)^{\alpha_j}}-(C_j+V_j(s))\frac{1}{(t+2)}\Big(\frac{s+1}{t-s+1}\Big)^{1-\alpha_j}\Big|_0^t+$$

$$+\frac{1}{(t+2)}\int_0^t\Big(\frac{s+1}{t-s+1}\Big)^{1-\alpha_j}V_j'(s)ds\Big]G_j\in L_1[0,\infty), \quad (13)$$

т. к.

$$\int_0^\infty\frac{1}{(t+2)}\int_0^t\Big(\frac{s+1}{t-s+1}\Big)^{1-\alpha_j}\|V_j'(s)\|ds\le\int_0^\infty\|V_j'(s)\|\int_1^\infty\frac{d\tau}{\tau(\tau-1)^{1-\alpha_j}}ds<\infty.$$

Положим $Q_0(t)=c\sum\limits_{j=1}^p U_j(t)$. Так как $w_j(t)=1/(t+1)^{1-\alpha_j}-1/t^{1-\alpha_j}\in L_1[0,\infty)$, то $\widehat{U}_j(z)=[\Gamma(\alpha_j)/(z-\lambda_j)^{\alpha_j}+\widehat{w_j}(z)]G_j$, и $\widehat{w_j}(z)$ ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re}z\ge0$. Отсюда

$$\widehat{Q}_0(z)=c\sum_{j=1}^p\frac{\Gamma(\alpha_j)G_j}{(z-\lambda_j)^{\alpha_j}}+cW(z),$$

где $A=\sup\limits_{\operatorname{Re}z\ge0}\|W(z)\|<\infty$. Покажем, что $I+\widehat{Q}_0(z)$ обратима при $\operatorname{Re}z\ge0$, $z\ne\lambda_j$, $j=1,\dots,p$, если c достаточно мало. Пусть q таково, что множества $B(\lambda_j)=\{z:|z-\lambda_j|\le q,\ \operatorname{Re}z\ge0\}$ попарно не пересекаются. При $z\notin\bigcup\limits_{j=1}^p B(\lambda_j)$ имеем

$$\|\widehat{Q}_0(z)\|\le c\sum_{j=1}^p\frac{\Gamma(\alpha_j)\|G_j\|}{q^{\alpha_j}}+cA,$$

и потому $I+\widehat{Q}_0(z)$ обратима, если c достаточно мало. Пусть $z\in B(\lambda_j)$, $z\ne\lambda_j$. Легко подсчитать, используя равенство $G_j^2=G_j$, что

$$E_j(z)=\Big[I+\frac{c\Gamma(\alpha_j)}{(z-\lambda_j)^{\alpha_j}}G_j\Big]^{-1}=I-\frac{c\Gamma(\alpha_j)}{(z-\lambda_j)^{\alpha_j}+c\Gamma(\alpha_j)}G_j.$$

Так как $|\arg(z-\lambda_j)^{\alpha_j}|<\pi/2$, то

$$|(z-\lambda_j)^{\alpha_j}+c\Gamma(\alpha_j)|\ge\operatorname{Re}[(z-\lambda_j)^{\alpha_j}+c\Gamma(\alpha_j)]\ge c\Gamma(\alpha_j),$$

и потому

$$\Big|\frac{c\Gamma(\alpha_j)}{(z-\lambda_j)^{\alpha_j}+c\Gamma(\alpha_j)}\Big|\le1$$

при всех $c>0$. Следовательно, матрица $E_j(z)\Big[\sum\limits_{l\ne j}\widehat{U}_l(z)+\widehat{W}_j(z)G_j\Big]$ ограничена в $B(\lambda_j)$ равномерно по z и $c>0$. Поэтому матрица

$$I+\widehat{Q}_0(z)=\Big[I+\frac{c\Gamma(\alpha_j)G_j}{(z-\lambda_j)^{\alpha_j}}\Big]\Big\{I+cE_j(z)\Big[\sum_{l\ne j}\widehat{U}_l(z)+\widehat{W}_j(z)G_j\Big]\Big\}$$

обратима при $z\in B(\lambda_j)$, $z\ne\lambda_j$ и достаточно малом $c>0$.

Покажем, наконец, что существует

$$D_j = \lim_{z\to\lambda_j}[I - \widehat{K}(z)][I + \widehat{Q}_0(z)]$$

и D_j — обратимая матрица. В самом деле, при $z \to \lambda_j$

$$[I - \widehat{K}(z)][I + \widehat{Q}_0(z)] = I - \widehat{K}(\lambda_j) + c\widehat{\varphi}(U_j)(\lambda_j) + c[I - \widehat{K}(\lambda_j)]\sum_{m\neq j}\widehat{U}_m(\lambda_j) + o(1),$$

так что $D_j = [I - \widehat{K}(\lambda_j)](I + cF_j) + c\widehat{\varphi}(U_j)(\lambda_j)$, где $F_j = \sum\limits_{m\neq j}\widehat{U}_m(\lambda_j)$.

Подсчитаем $\widehat{\varphi}(U_j)(\lambda_j)$. Так как

$$1 - \widehat{\frac{1-\alpha_j}{(t+1)^{2-\alpha_j}}} = z\widehat{\frac{1}{(t+1)^{1-\alpha_j}}} = z^{1-\alpha_j}\Gamma(\alpha_j) + z\widehat{W}(z),$$

то в силу (12) $\widehat{\varphi}(U_j) = [(z-\lambda_j)^{1-\alpha_j}\Gamma(\alpha_j) + (z-\lambda_j)\widehat{W}(z-\lambda_j)]\widehat{\Psi}_j(z-\lambda_j)G_j = [\Gamma(\alpha_j)+o(1)][C_j\Gamma(1-\alpha_j) + o(1)]G_j$ при $z \to \lambda_j$, $z - \lambda_j$ — действительное число. Из (13) следует, что $\widehat{\varphi}(U_j)(z)$ непрерывна во всех точках мнимой оси. Поэтому $\widehat{\varphi}(U_j)(\lambda_j) = bC_jG_j$, где $b = \mathrm{const}$. Обозначим через d_m столбцы матрицы $[I - \widehat{K}(\lambda_j)]F_j$. При достаточно малом c матрица $I + cF_j$ обратима, и потому в матрице $[I - \widehat{K}(\lambda_j)](I + cF_j) = (a_1 + cd_1, \dots, a_k + cd_k)$ столбцы с номерами $k_1, \dots, k_r$ (см. построение G_j перед формулировкой теоремы) линейно независимы, а остальные являются их линейной комбинацией. У матрицы C_jG_j все столбцы с номерами $k_1, \dots, k_r$ нулевые, а остальные равны C_jg_l. Поэтому

$$\begin{aligned}\det D_j = \det(a_1 + cd_1 + cbC_jg_1, \dots, a_{k_1} + cd_{k_1}, \dots) = (cb)^{n-r}\det(C_jg_1, \dots, C_jg_{k_1-1}, a_{k_1} + \\ + cd_{k_1}, \dots) = (cb)^{n-r}[\det(C_jg_1, \dots, C_jg_{k_1-1}, a_{k_1}, \dots) + cb_1 + \ldots + c^rb_r] = \\ = (cb)^{n-r}[\det(C_jG_j + I - \widehat{K}(\lambda_j)) + cb_1 + \ldots + c^rb_r] \neq 0,\end{aligned}$$

если c достаточно мало.

Таким образом, Q_0 удовлетворяет всем условиям, необходимым для использования описанного после теоремы 1 приема построения K-регулярной функции.

Положим $K_0(t) = K(t) - \varphi(Q_0)(t)$. В силу (13) $K_0 \in L_1[0,\infty)$. Как показано в [1], существует K_0-регулярная функция $Q_1(t) = \sum\limits_{j>p}P_{m_j-1}(t)e^{\lambda_jt}$ такая, что $Q_1(t) - K_0 * Q_1(t) \in L_1[0,\infty)$.

Тогда $Q(t) = Q_0(t) + Q_1(t) + Q_0 * Q_1(t)$ K-регулярна и

$$\varphi(Q) = \varphi(Q_0) + \varphi(Q_1) + \varphi(Q_0) * Q_1 = \varphi(Q_0) + [Q_1 - K_0 * Q_1] \in L_1[0,\infty).$$

В силу леммы 1

$$R(t) = R_0(t) + Q(t) + Q * R_0(t), \tag{14}$$

где $R_0 \in L_1[0,\infty)$.

Из первого равенства леммы 2 следует

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{p}A_j\frac{e^{\lambda_jt}}{(t+1)^{1-\alpha_j}} + \sum_{j>p}P_{m_j-1}(t)e^{\lambda_jt} + V(t),$$

где $V \in L_1[0,\infty)$. Если $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, то

$$t^re^{\lambda_jt} * R_0(t) = \int_0^\infty (t-s)^re^{\lambda_j(t-s)}R_0(s)ds - W(t),$$

где $W(t) = \int\limits_t^\infty (t-s)^r e^{\lambda_j(t-s)} R_0(s)ds \in L_1[0,\infty)$. Поэтому

$$\sum_{j>p} P_{m_j-1}(t)e^{\lambda_j t} * R_0(t) = \sum_{j>p} P_{m_j-1}(t)e^{\lambda_j t} + \widetilde{W}(t), \quad \widetilde{W} \in L_1[0,\infty).$$

Отсюда и из (14) получим представление (8). $\square$

Доказательство теоремы 3. Обозначим $Q(t) = e^{-t}I$. Применяя к обеим частям (10) оператор свертки с ядром Q и используя равенство $Q * R'(t) = R(t) - Q(t) + Q' * R(t)$, получим для R уравнение

$$R(t) = \{AQ + Q * K - Q'\} * R(t) + Q(t). \tag{15}$$

Покажем, что для ядра $K_1(t) = AQ(t) + Q * K(t) - Q'(t)$ выполнены условия теоремы 2. Имеем

$$I - \widehat{K_1}(z) = \frac{1}{z+1}\{zI - A - \widehat{K}(z)\}$$

и, следовательно, $I - \widehat{K_1}(z)$ не обратима лишь в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Далее, для $j = 1, \ldots, p$

$$\int_t^\infty e^{-\lambda_j s} K_1(s)ds = \frac{1}{1+\lambda_j}(I + A)e^{-(1+\lambda_j)t} + \int_t^\infty u(s)ds,$$

где $u(t) = \int\limits_0^t e^{-(1+\lambda_j)(t-s)} e^{-\lambda_j s} K(s)ds$.

Так как $e^{-(1+\lambda_j)t} \in L_1 \cap C_0$, а $e^{-\lambda_j t}K(t) \in L_1[0,\infty)$, то $u \in L_1 \cap C_0$. Кроме того, $u' + (1+\lambda_j)u = e^{-\lambda_j t}K(t)$. Поэтому

$$\int\limits_t^\infty u(s)ds = \frac{1}{1+\lambda_j}\left[\int_t^\infty e^{-\lambda_j s}K(s)ds + u(t)\right],$$

и, следовательно,

$$\int_t^\infty e^{-\lambda_j s} K_1(s)ds = \frac{C_j + V_j(t)}{(t+1)^{\alpha_j}} + u_j(t),$$

где $u_j \in L_1[0,\infty)$. Как отмечено в замечании к теореме 2, этого достаточно для справедливости представления (8) для резольвенты R_1 ядра K_1.

Из (15) следует $R(t) = Q(t) + R_1 * Q(t)$. Отсюда, из (8) и второго и третьего утверждений леммы 2 получим для R представление вида (8). Так как $Q \in L_1 \cap C_0$, то ее свертка с функцией из L_1 лежит в $L_1 \cap C_0$. Поэтому в представлении (8) для функции Коши $W_1, W_2 \in L_1 \cap C_0$. $\square$

Литература

1. Цалюк З.Б. *О допустимости пары (Y, X) и асимптотике резольвенты для систем интегральных уравнений Вольтерра* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 9. – С. 1226–1230.
2. Цалюк З.Б. *Асимптотическая структура резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 50–55.
3. Дербенев В.А., Цалюк З.Б. *Асимптотика резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – Вып. 1. – С. 88–94.
4. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее применения.* – Т. 2. – М.: Мир, 1967. – 752 с.
5. Цалюк З.Б. *Об асимптотике решений уравнения восстановления* // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6. – № 6. – С. 1112–1114.

6. Дербенев В.А., Цалюк З.Б. *К вопросу об асимптотике неустойчивого уравнения восстановления* // Кубанск. ун-т. – Краснодар, 1978. – 8 с. – Деп. в ВИНИТИ 21.09.78, № 3089–78.
7. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1966. – 576 с.

Кубанский государственный университет

Поступила 13.03.2000