ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

УДК 517.929

Ю.Ф. ДОЛГИЙ, Е.В. КУКУШКИНА

ОБЩИЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение

Рассматривается линейная неоднородная система функционально-разностных уравнений

$$x(t)=\int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta(t,\vartheta)x(t+\vartheta)+h(t), \tag{1.1}$$

где $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$; $h\in\mathbb{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$; матричная функция $\eta(t,\cdot)$ при каждом фиксированном $t\in\mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-r,0]$, $\eta(t,0)=0$.

Для указанной системы изучается начальная задача Коши в пространстве непрерывных функций. Пусть $t_0\in\mathbb{R}$ — начальный момент и $\varphi\in\mathbb{C}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$ — начальная функция. Функция $x\in\mathbb{C}([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ является решением начальной задачи Коши, если $x(t)=\varphi(t)$ при $t\in[t_0-r,t_0]$, и для нее равенство (1.1) выполняется тождественно на полуоси $(t_0,+\infty)$. Для существования непрерывного решения начальной задачи Коши необходимо, чтобы выполнялось условие согласования

$$\varphi(t_0)=\int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta(t_0,\vartheta)\varphi(t_0+\vartheta)+h(t_0). \tag{1.2}$$

Понятие функционально-разностного уравнения (ФРУ) обобщает понятие разностного уравнения с непрерывным временем так же, как понятие функционально-дифференциального уравнения обобщает понятие дифференциально-разностного уравнения. В работе для линейных нестационарных систем ФРУ установлены условия существования и единственности решений начальной задачи Коши в пространстве непрерывных функций. Получена формула, дающая аналитическое представление общего решения изучаемой системы ФРУ. Рассмотрены методы нахождения указанного представления. Полученные результаты иллюстрируются примерами. Указанный круг вопросов исследовался для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений [1]–[4]. Для линейных систем разностных уравнений с непрерывным временем рассматриваемые проблемы изучались в [5]–[7]. Специальные решения линейных разностных уравнений с непрерывным временем построены в [8]. Для линейных систем разностных уравнений с дискретным временем решения указанных проблем изложены в [9]. Для линейных стационарных систем ФРУ рассматриваемый круг вопросов исследовался в [10].

2. Существование и единственность решения начальной задачи Коши

Пусть функция $x\in\mathbb{C}([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ является решением начальной задачи Коши для начального момента $t_0\in\mathbb{R}$ и начальной функции $\varphi\in\mathbb{C}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$ системы ФРУ (1.1) с функцией $h\in\mathbb{C}([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n)$. Введем следующие обозначения: $\widetilde{x}(t)=x(t)-\varphi(t_0)$, $t\geq t_0$, $\widetilde{\varphi}(s)=\varphi(s)-\varphi(t_0)$, $s\in[t_0-r,t_0]$, $\widetilde{h}(t)=h(t)-h(t_0)$, $t\geq t_0$. Тогда $\widetilde{x}\in\mathbb{C}_{t_0}([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n)=\{\widetilde{x}:\widetilde{x}\in\mathbb{C}([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n),\ \widetilde{x}(t_0)=0\}$, $\widetilde{\varphi}\in\mathbb{C}_{t_0}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)=\{\widetilde{\varphi}:\widetilde{\varphi}\in\mathbb{C}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n),\ \widetilde{\varphi}(t_0)=0\}$, $\widetilde{h}\in\mathbb{C}_{t_0}([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n)=\{\widetilde{h}:\widetilde{h}\in\mathbb{C}([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n),\ \widetilde{h}(t_0)=0\}$.

Утверждение 2.1. *Для заданного начального момента* $t_0 \in \mathbb{R}$, *начальной функции* $\varphi \in \mathbb{C}([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n)$ *и функции* $h \in \mathbb{C}([t_0, +\infty), \mathbb{R}^n)$ *функция* $x \in \mathbb{C}([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ *является решением начальной задачи Коши системы ФРУ* (1.1) *тогда и только тогда, когда функция* $\widetilde{x} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0, +\infty), \mathbb{R}^n)$ *является решением уравнения*

$$\widetilde{x}(t) = (D\widetilde{x})(t) + (H\widetilde{\varphi})(t) + (H_0\varphi(t_0))(t) + \widetilde{h}(t), \quad t \geq t_0. \tag{2.1}$$

Здесь оператор D *определяется формулами*

$$(D\widetilde{x})(t) = \begin{cases} \int\limits_{t_0}^{t} d_s\eta(t, s-t)\widetilde{x}(s), & t_0 \leq t \leq t_0 + r; \\ \int\limits_{t-r}^{t} d_s\eta(t, s-t)\widetilde{x}(s), & t > t_0 + r, \end{cases} \tag{2.2}$$

оператор H *определяется формулами*

$$(H\widetilde{\varphi})(t) = \begin{cases} \int\limits_{t-r}^{t_0} d_s\eta(t, s-t)\widetilde{\varphi}(s) - \int\limits_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta(t_0, s-t_0)\widetilde{\varphi}(s), & t_0 \leq t \leq t_0 + r; \\ -\int\limits_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta(t_0, s-t_0)\widetilde{\varphi}(s), & t > t_0 + r, \end{cases} \tag{2.3}$$

оператор H_0 *определяется формулой*

$$(H_0\varphi(t_0))(t) = (\eta(t_0, -r) - \eta(t, -r))\varphi(t_0), \quad t \geq t_0. \tag{2.4}$$

Доказательство. После преобразования системы уравнений (1.1) и условия согласования (1.2) при $t_0 \leq t \leq t_0 + r$ находим $\widetilde{x}(t) = \widetilde{h}(t) - \int\limits_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta(t_0, s-t_0)\widetilde{\varphi}(s) + (\eta(t_0, -r) - \eta(t, -r))\varphi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} d_s\eta(t, s-t)\widetilde{x}(s) + \int\limits_{t-r}^{t_0} d_s\eta(t, s-t)\widetilde{\varphi}(s)$, при $t > t_0 + r$ $\widetilde{x}(t) = \int\limits_{t-r}^{t} d_\vartheta\eta(t, s-t)\widetilde{x}(s) - \int\limits_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta(t_0, s-t_0)\widetilde{\varphi}(s) + (\eta(t_0, -r) - \eta(t, -r))\varphi(t_0) + \widetilde{h}(t)$. Следовательно, системе (1.1) можно поставить в соответствие уравнение (2.1), где оператор D определяется формулами (2.2), оператор H определяется формулами (2.3), а оператор H_0 — формулой (2.4). □

Для любого $\Delta > 0$ рассмотрим сужение уравнения (2.1) на отрезок $[t_0, t_0 + \Delta]$. Имеем

$$\widetilde{x}(t) = (D_\Delta\widetilde{x})(t) + (H_\Delta\widetilde{\varphi})(t) + (H_{0\Delta}\varphi(t_0))(t) + \widetilde{h}(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \Delta]. \tag{2.5}$$

Для сужения функций $\widetilde{x}$ и $\widetilde{h}$ на отрезок $[t_0, t_0 + \Delta]$ оставляем те же обозначения, полагая $\widetilde{h} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n)$, $\widetilde{x} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n)$.

Продолжим функцию η по второму аргументу на всю числовую ось, полагая $\eta(t, s) = 0$ при $s \geq 0$ и $\eta(t, s) = \eta(t, -r)$ при $s \leq -r$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда значения операторов D_Δ, H_Δ и $H_{0\Delta}$ при любом $\Delta > 0$ можно определить формулами

$$(D_\Delta\widetilde{x})(t) = \int_{t_0}^{t} d_s\eta(t, s-t)\widetilde{x}(s), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta, \tag{2.6}$$

$$(H_\Delta\widetilde{\varphi})(t) = \int_{t-r}^{t_0} d_s\eta(t, s-t)\widetilde{\varphi}(s) - \int_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta(t_0, s-t_0)\widetilde{\varphi}(s), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta,$$

$$(H_{0\Delta}\varphi(t_0))(t) = (\eta(t_0, -r) - \eta(t, -r))\varphi(t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta.$$

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия*

1) *функция* $\operatorname*{var}\limits_{z\in[-r,0]} \eta(t, z)$ *ограничена на любом отрезке числовой оси;*

2) *для любого* $\tau \in \mathbb{R}$ *отображение* $t \to \int\limits_{t-r}^{\tau} \eta(t, s-t)ds$ *непрерывно на любом отрезке числовой оси.*

Тогда $D_\Delta : \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) \to C_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Обозначим $\mathbb{AC}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) = \{\widetilde{x} : \widetilde{x} \in \mathbb{AC}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n),\ \widetilde{x}(t_0) = 0\}$. Преобразуем формулы, определяющие значения оператора D_Δ,

$$(D_\Delta \widetilde{x})(t) = \int_{t_0}^{t} d_s \eta(t, s-t)\widetilde{x}(s) = -\int_{t_0}^{t_0+\Delta} \eta(t, s-t)\widetilde{x}'(s)ds, \quad t_0 \le t \le t_0 + \Delta.$$

Определим значения оператора $\widetilde{D}_\Delta$ следующими формулами:

$$(\widetilde{D}_\Delta y)(t) = -\int_{t_0}^{t_0+r} \eta(t, s-t)y(s)ds, \quad t \in [t_0, t_0+\Delta], \quad y \in \mathbb{L}_1([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n).$$

Для произвольной функции $\widetilde{x} \in \mathbb{AC}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ функция $D_\Delta \widetilde{x} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда функция $\widetilde{D}_\Delta y \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ для функции $y \in \mathbb{L}_1([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$, $y(s) = \widetilde{x}'(s)$, $s \in [t_0, t_0+\Delta]$. Докажем, что оператор $\widetilde{D}_\Delta$ имеет тип $\mathbb{L}_1([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ и является непрерывным.

Для оператора $\widetilde{D}_\Delta$ выполнены условия

A) $\operatorname*{vrai\,sup}_{s,t\in[t_0,t_0+\Delta]} |\eta(t, s-t)| < \infty$;

B) функция $t \to \int\limits_{t_0}^{\tau} \eta(t, s-t)ds$ непрерывна при любом $\tau \in [t_0, t_0+\Delta]$ на отрезке $[t_0, t_0+\Delta]$.

Действительно, по определению вариации $\operatorname*{var}_{z\in[-r,0]} \eta(t,z) \ge |\eta(t,-r) - \eta(t,z)| + |\eta(t,z) - \eta(t,0)| \ge 2|\eta(t,z)| - |\eta(t,-r)|$. Тогда $|\eta(t,z)| \le \frac{1}{2} \operatorname*{var}_{z\in[-r,0]} \eta(t,z) + \frac{1}{2}|\eta(t,-r)|$. Функции $\operatorname*{var}_{z\in[-r,0]} \eta(t,z)$ и $\eta(t,-r)$ ограничены по условию 1) леммы 2.1 на $[t_0, t_0+\Delta]$. Тогда $\sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\Delta], z\in[-r,0]} |\eta(t,z)| < \infty$. Имеем $\operatorname*{vrai\,sup}_{t,s\in[t_0,t_0+\Delta]} |\eta(t, s-t)| \le \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[t_0,t_0+\Delta], z\in[t_0-t, t_0-t+r]} |\eta(t,z)| \le \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[t_0,t_0+\Delta], z\in[-r,0]} |\eta(t,z)| < \infty$. Справедливость условия A) доказана. Для любого $\tau \in \mathbb{R}$ имеем $\int\limits_{t_0}^{\tau} \eta(t,s-t)ds = \int\limits_{t-r}^{\tau} \eta(t,s-t)ds - \int\limits_{t-r}^{t_0} \eta(t,s-t)ds$ при $t \in [t_0, t_0+\Delta]$. Следовательно, в силу условия 2) леммы 2.1 условие B) для оператора $\widetilde{D}_\Delta$ выполняется.

Условия A) и B) гарантируют, что оператор $\widetilde{D}_\Delta$ имеет тип $\mathbb{L}_1([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ и является непрерывным ([11], c.100).

Докажем теперь, что оператор D_Δ имеет тип $\mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$. Для произвольного $t \in [t_0, t_0+\Delta]$ введем оператор $D_{\Delta t} : \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ с помощью формулы $D_{\Delta t}\widetilde{x} = (D_\Delta \widetilde{x})(t)$. Однопараметрическое семейство операторов $D_{\Delta t}$, $t \in [t_0, t_0+\Delta]$, удовлетворяет условиям

C) для любого элемента $\widetilde{x} \in \mathbb{AC}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ функция $D_{\Delta t}\widetilde{x}$ аргумента t непрерывна на $[t_0, t_0+\Delta]$;

D) для любого элемента $\widetilde{x} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ функция $D_{\Delta t}\widetilde{x}$ аргумента t ограничена на $[t_0, t_0+\Delta]$.

Действительно, имеет место равенство $D_{\Delta t}\widetilde{x} = (\widetilde{D}_\Delta y)(t)$ при $t \in [t_0, t_0+\Delta]$, $y(t) = \widetilde{x}'(t)$, $\widetilde{x} \in \mathbb{AC}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$. Справедливость условия C) следует из непрерывности функции $(\widetilde{D}_\Delta y)(t)$ на отрезке $[t_0, t_0+\Delta]$. Справедливость условия D) следует из неравенств $\sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\Delta]} |D_{\Delta t}\widetilde{x}| \le \sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\Delta]} \operatorname*{var}_{z\in[-r,0]} \eta(t,z) \max\limits_{s\in[t_0,t_0+\Delta]} |\widetilde{x}(s)|$.

Условия C) и D) гарантируют, что оператор D_Δ имеет тип $\mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ согласно теореме 6 из ([12], c. 73). □

Следствие 2.1. При выполнении условий леммы 2.1 оператор D_Δ имеет тип $\mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ и непрерывен.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия*

1) *функция* $\operatorname*{var}\limits_{z\in[-r,0]}\eta(t,z)$ *ограничена на любом отрезке числовой оси;*

2) *отображение* $t\to\eta(t,-r)$ *непрерывно на числовой оси;*

3) *для любого* $\tau\in\mathbb{R}$ *отображение* $t\to\int\limits_{t-r}^{\tau}\eta(t,s-t)ds$ *непрерывно на любом отрезке числовой оси.*

Тогда $H_\Delta:\mathbb{C}_{t_0}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$ *и* $H_{0\Delta}:R^n\to\mathbb{C}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Справедливость утверждения леммы для оператора $H_{0\Delta}$ следует из условия 2). Для доказательства утверждения леммы об операторе H_Δ достаточно показать, что оператор $(\widetilde{H}_\Delta\widetilde{\varphi})(t)=\int\limits_{t-r}^{t_0}d_s\eta(t,s-t)\widetilde{\varphi}(s)=\int\limits_{t_0-r}^{t_0}d_s\eta(t,s-t)\widetilde{\varphi}(s)$, $t_0\le t\le t_0+\Delta$, удовлетворяет условию $\widetilde{H}_\Delta:\mathbb{C}_{t_0}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$. Доказательство последнего утверждения проводится по схеме, используемой при доказательстве леммы 2.1. Для произвольной функции $\widetilde{\varphi}\in\mathbb{AC}_{t_0}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$, где $\mathbb{AC}_{t_0}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)=\{\widetilde{\varphi}:\widetilde{\varphi}\in\mathbb{AC}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n),\ \widetilde{\varphi}(t_0)=0\}$, имеем $(\widetilde{H}_\Delta\widetilde{\varphi})(t)=-\eta(t,-r)\widetilde{\varphi}(t_0-r)-\int\limits_{t_0-r}^{t_0}\eta(t,s-t)\widetilde{\varphi}'(s)ds$, $t_0\le t\le t_0+\Delta$. Учитывая условия 2) и 3) леммы, устанавливаем, что $\widetilde{H}_\Delta:\mathbb{AC}_{t_0}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$. Можно показать, что для однопараметрического семейства операторов $\widetilde{H}_{\Delta t}:\mathbb{C}_{t_0}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$, $t\in[t_0,t_0+\Delta]$, определяемых формулами $H_{\Delta t}\widetilde{\varphi}=(H_\Delta\widetilde{\varphi})(t)$, $t\in[t_0,t_0+\Delta]$, $\widetilde{\varphi}\in\mathbb{C}_{t_0}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$, выполняются условия теоремы 6 из ([12], с. 73). □

Следствие 2.2. При выполнении условий леммы 2.2 операторы $H_\Delta:\mathbb{C}_{t_0}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$ и $H_{0\Delta}:R^n\to\mathbb{C}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$ непрерывны.

Теорема 2.1. *Пусть* $h\in\mathbb{C}([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n)$, $\varphi\in\mathbb{C}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$, *выполнено условие согласования* (1.2) *и*

1) *функция* $\operatorname*{var}\limits_{z\in[-r,0]}\eta(t,z)$ *ограничена на любом отрезке числовой оси;*

2) *отображение* $t\to\eta(t,-r)$ *непрерывно на числовой оси;*

3) *для любого* $\tau\in\mathbb{R}$ *отображение* $t\to\int\limits_{t-r}^{\tau}\eta(t,s-t)ds$ *непрерывно на любом отрезке числовой оси;*

4) $\operatorname*{var}\limits_{z\in[-\Delta,0]}\eta(t,z)\to0$ *при* $\Delta\to0$ *равномерно по* t *на любом отрезке числовой оси.*

Тогда начальная задача Коши для уравнения (1.1) *имеет единственное непрерывное решение.*

Доказательство. Из утверждения 2.1. следует, что на отрезке $[t_0,t_0+\Delta]$ решение начальной задачи Коши для системы ФРУ (1.1) с заданной начальной функцией φ удовлетворяет уравнению (2.1), которое преобразуется к виду

$$\widetilde{x}(t)=(D_\Delta\widetilde{x})(t)+\widehat{h}(t),\quad t\ge t_0,\tag{2.7}$$

где оператор D_Δ определяется формулой (2.6), $\widehat{h}(t)=(H_\Delta\widetilde{\varphi})(t)+(H_0\varphi(t_0))(t)+\widetilde{h}(t)$. Решение уравнения (2.7) будем искать в пространстве $\mathbb{C}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$. Из следствия 2.1 и условия 4) теоремы 2.1 следует, что число $\Delta=\Delta_1$ можно выбрать таким образом, чтобы $\|D_\Delta\|\le\sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\Delta]}\operatorname*{var}\limits_{z\in[-\Delta,0]}\eta(t,z)<1$. Тогда при $\Delta=\Delta_1$ существует ограниченный оператор $(I-D_{\Delta_1})^{-1}$, и решение уравнения (2.7) задается формулой $\widetilde{x}(t)=(I-D_{\Delta_1})^{-1}(\widehat{h})(t)$, $t\in[t_0,t_0+\Delta_1]$, где I — тождественный оператор. Оно позволяет определить решение начальной задачи Коши для уравнения (1.1) на отрезке $[t_0,t_0+\Delta_1]$: $x(t)=(I-D_{\Delta_1})^{-1}(\widehat{h})(t)+\varphi(t_0)$.

Построим решение уравнения (1.1) на отрезке $[t_0+\Delta_1,t_0+\Delta]$ $(\Delta>\Delta_1)$. Уравнение (2.1) на отрезке $[t_0+\Delta_1,t_0+\Delta]$ запишем в виде

$$\widehat{x}_1(t)=\widehat{D}^1_\Delta(\widehat{x}_1)(t)+\widehat{h}_1(t),\quad t\in[t_0+\Delta_1,t_0+\Delta],\tag{2.8}$$

где $\widehat{x}_1(t) = \widetilde{x}(t) - \widetilde{x}(t_0 + \Delta_1)$, $t \in [t_0 + \Delta_1, t_0 + \Delta]$; оператор $\widehat{D}^1_\Delta : \mathbb{C}([t_0 + \Delta_1, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}([t_0 + \Delta_1, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n)$ определяется формулой $\widehat{D}^1_\Delta(\widehat{x}_1)(t) = \int\limits_{\Delta_1 - t + t_0}^{0} d_\vartheta \eta(t, \vartheta)\widehat{x}_1(t + \vartheta)$, $t \in [t_0 + \Delta_1, t_0 + \Delta]$, а функция $\widehat{h}_1$ задается формулами $\widehat{h}_1(t) = \widehat{h}(t) + \int\limits_{-r}^{\Delta_1 - t + t_0} d_\vartheta \eta(t, \vartheta) x_{\varphi_1}(t + \vartheta) - (I_n + \eta(t, -r))\widetilde{x}(t_0 + \Delta_1)$, $x_{\varphi_1}(t + \vartheta) = \widetilde{x}(t + \vartheta) - \widetilde{x}(t_0 + \Delta_1)$, $\vartheta \in [-r, \Delta_1 - t]$, $t \in [t_0 + \Delta_1, t_0 + \Delta]$. Для уравнения (2.8) повторяем рассуждения, используемые при изучении уравнения (2.7). В силу условия 4) теоремы 2.1 находим $\Delta = \Delta_2$, для которого $\|\widehat{D}^1_\Delta\| \le \sup\limits_{t \in [t_0 + \Delta_1, t_0 + \Delta_2]} \operatorname*{var}\limits_{z \in [\Delta_1 - \Delta_2, 0]} \eta(t, z) < 1$. Уравнение (2.8) при $\Delta = \Delta_2$ однозначно разрешимо. Его решение задается формулой $\widehat{x}_1(t) = (I - \widehat{D}^1_{\Delta_2})^{-1}(\widehat{h}_1)(t)$, $t \in [t_0 + \Delta_1, t_0 + \Delta_2]$. Решение уравнения (1.1) на отрезке $[t_0 + \Delta_1, t_0 + \Delta_2]$ имеет вид

$$x(t) = (I - \widehat{D}^1_{\Delta_2})^{-1}(\widehat{h}_1)(t) + (I - D_{\Delta_1})^{-1}(\widehat{h})(t_0 + \Delta_1) + \varphi(t_0).$$

Продолжая приведенные рассуждения, докажем существование единственного решения уравнения (1.1) на произвольном отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ и построим его. $\square$

Из доказательства теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.3. При выполнении условий теоремы 2.1 для любого $\Delta > 0$ существует линейный непрерывный вольтерровый по Тихонову оператор $(I - D_\Delta)^{-1} : \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n)$.

3. Представления решений нестационарных функционально-разностных уравнений

При выполнении условий теоремы 2.1 решение уравнения (2.5) определяется формулой

$$\widetilde{x}(t) = x^\Delta_{\widetilde{\varphi}}(t) + x^\Delta_{\widetilde{h}}(t) + x^\Delta_0(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \Delta],$$

где $x^\Delta_{\widetilde{\varphi}} = (I - D_\Delta)^{-1} H_\Delta \widetilde{\varphi}$, $x^\Delta_{\widetilde{h}} = (I - D_\Delta)^{-1}\widetilde{h}$, $x^\Delta_0 = (I - D_\Delta)^{-1} H_{0\Delta}\varphi(t_0)$. Здесь функция $x^\Delta_{\widetilde{h}}$ является непрерывным решением системы (1.1) на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ с начальной функцией $\varphi = 0$ и непрерывной неоднородностью $h = \widetilde{h}$, удовлетворяющей условию $\widetilde{h}(t_0) = 0$, т.е. $\widetilde{h} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n)$; функция $\widetilde{x}^\Delta_{\widetilde{\varphi}}$ является непрерывным решением системы (1.1) на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ с непрерывной начальной функцией $\varphi = \widetilde{\varphi}$, удовлетворяющей условию $\widetilde{\varphi}(t_0) = 0$, т.е. $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n)$, и неоднородностью $h(t) = h(t_0) = -\int\limits_{t_0 - r}^{t_0} d_\vartheta \eta(t_0, \vartheta - t_0)\widetilde{\varphi}(\vartheta)$, $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$; функция x^Δ_0 является непрерывным решением системы (1.1) на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ с начальной функцией $\varphi(\vartheta) = \varphi(t_0)$, $\vartheta \in [t_0 - r, t_0]$, и неоднородностью $h(t) = h(t_0) = (I_n + \eta(t_0, -r))\varphi(t_0)$, $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$.

Используя формулу представления линейного непрерывного оператора в пространстве непрерывных функций ([12], с. 556) и конечномерность области определения оператора $H_{0\Delta}$, запишем

$$\begin{aligned} x^\Delta_{\widetilde{\varphi}}(t) &= \int_{t_0 - r}^{t_0} dT(t, s, t_0, \Delta)\widetilde{\varphi}(s), && t \in [t_0, t_0 + \Delta], \\ x^\Delta_{\widetilde{h}}(t) &= \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} dS(t, s, t_0, \Delta)\widetilde{h}(s), && t \in [t_0, t_0 + \Delta], \\ x^\Delta_0(t) &= V(t, t_0, \Delta)\varphi(t_0), && t \in [t_0, t_0 + \Delta]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $T(t, t_0 - r, t_0, \Delta) = 0$, $S(t, t_0 + \Delta, t_0, \Delta) = 0$ при $t_0 \le t \le t_0 + \Delta$; $\sup\limits_{t \in [t_0, t_0 + \Delta]} \operatorname*{var}\limits_{t_0 - r \le s \le t_0} T(t, s, t_0, \Delta) < \infty$, $\sup\limits_{t \in [t_0, t_0 + \Delta]} \operatorname*{var}\limits_{t_0 \le s \le t_0 + \Delta} S(t, s, t_0, \Delta) < \infty$; при любых $0 \le r' < r$, $0 < \Delta' \le \Delta$ функции $\int\limits_{t_0 - r}^{t_0 - r'} T(t, s, t_0, \Delta) ds$,

$\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta'} S(t,s,t_0,\Delta)ds$, $V(t,t_0,\Delta)$ непрерывны по t на отрезке $[t_0, t_0+\Delta]$. Так как $x^{\Delta}_{\widetilde{\varphi}}$, $x^{\Delta}_{\widetilde{h}}$, $x^{\Delta}_0 \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$ при любых $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{h} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$ и $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$, то $T(t_0,s,t_0,\Delta) = 0$ при $s \in [t_0-r,t_0]$, $S(t_0,s,t_0,\Delta) = 0$ при $s \in [t_0,t_0+\Delta]$ и $V(t_0,t_0,\Delta) = 0$.

Из вольтерровости оператора $(I - D_\Delta)^{-1}$ и формулы (3.1) следует

$$x^{\Delta}_{\widetilde{h}}(t) = \int_{t_0}^{t} dS(t,s,t_0,\Delta)\widetilde{h}(s), \quad t \in [t_0,t_0+\Delta]. \tag{3.2}$$

При использовании формулы (3.2) считаем $S(t,s,t_0,\Delta) = 0$ при $s \in [t,t_0+\Delta]$.

Можно показать, что функции T, S и V не зависят от Δ и S не зависит от t_0.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда непрерывное решение начальной задачи Коши допускает представление*

$$x(t) = \int_{t_0-r}^{t_0} dT(t,s,t_0)\widetilde{\varphi}(s) + \int_{t_0}^{t} dS(t,s)\widetilde{h}(s) + (V(t,t_0)+I_n)\varphi(t_0), \quad t \geq t_0,$$

где $\widetilde{\varphi}(s) = \varphi(s) - \varphi(t_0)$, $s \in [t_0-r,t_0]$; $\widetilde{h}(t) = h(t) - h(t_0)$, $t \geq t_0$; $T(t,t_0-r,t_0) = 0$ *при* $t \geq t_0$; $T(t_0,s,t_0) = 0$ *при* $s \in [t_0-r,t_0]$; $S(t,s) = 0$ *при* $t \leq s$; *при любом* $\tau > t_0$ *выполняются неравенства* $\sup\limits_{t\in[t_0,\tau)} \operatorname*{var}\limits_{t_0-r\leq s\leq t_0} T(t,s,t_0) < \infty$, $\sup\limits_{t\in[t_0,\tau]} \operatorname*{var}\limits_{t_0\leq s\leq t} S(t,s) < \infty$, *при любом* $\tau > t_0$ *и любом* $0 \leq r' < r$ *функции* $\int\limits_{t_0}^{\tau} S(t,s)ds$ *и* $\int\limits_{t_0-r}^{t_0-r'} T(t,s,t_0)ds$ *непрерывны по* t *на полуинтервале* $[t_0,\infty)$.

4. Уравнение для функции S

Представление решения $x_{\widetilde{h}}$ системы (1.1) связано с нахождением функции S.

Теорема 4.1. *При выполнении условий теоремы* 2.1 *функция* S *является решением уравнения*

$$S(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(t,\vartheta)\int_{t}^{\tau} S(t+\vartheta,s)ds - I_n, \quad t > \tau, \tag{4.1}$$

с начальным условием $S(t,\tau) = 0$ *при* $t \leq \tau$.

Доказательство. Рассмотрим решения уравнения (1.1) с нулевыми начальными функциями и неоднородностями $\widetilde{h} \in \mathbb{C}^2([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{h}(t_0) = \widetilde{h}'(t_0) = 0$. Имеем $x_{\widetilde{h}}(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t}^{\tau} S(t,s)ds\widetilde{h}''(\tau)d\tau$, $t > t_0$, $\widetilde{h}(t) = \int\limits_{t_0}^{t}(t-\tau)\widetilde{h}''(\tau)d\tau$, $t > t_0$. Тогда $x_{\widetilde{h}}(t+\vartheta) = \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t}^{\tau} S(t+\vartheta,s)ds\widetilde{h}''(\tau)d\tau$, $\vartheta \in [-r,0]$, $t > t_0$.

Так как интеграл $\int\limits_{t}^{\tau} S(t+\vartheta,s)ds$, $\vartheta \in [-r,0]$, $\tau \in [t_0,t]$, $t > t_0$, непрерывно зависит от ϑ на отрезке $[-r,0]$, то после его подстановки в систему (1.1) при $t > t_0$ получим

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t}^{\tau} S(t,s)ds\widetilde{h}''(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t}\int_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(t,\vartheta)\int_{t}^{\tau} S(t+\vartheta,s)ds\widetilde{h}''(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t}(t-\tau)\widetilde{h}''(\tau)d\tau.$$

Последнее должно выполняться для любой функции $\widetilde{h}'' \in \mathbb{C}([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n)$. Это условие выполняется, если

$$\int_{t}^{\tau} S(t,s)ds = \int_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(t,\vartheta)\int_{t}^{\tau} S(t+\vartheta,s)ds + (t-\tau)I_n, \quad \tau \in [t_0,t], \quad t > t_0.$$

Правая часть полученного равенства является абсолютно непрерывной функцией аргумента τ на отрезке $[t_0, t]$ при фиксированном t. Следовательно, интеграл $\int\limits_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta) \int\limits_{t}^{\tau} S(t+\vartheta, s)ds$ задает абсолютно непрерывную функцию аргумента τ на отрезке $[t_0, t]$. Продифференцировав это равенство по τ, получим искомое уравнение. $\square$

Пример 4.1. Дано однородное скалярное уравнение (1.1) с функцией $\eta(t,\vartheta) = t\vartheta$, $\vartheta \in [-1, 0]$, $t \in \mathbb{R}$, и $r = 1$.

Уравнение (4.1) имеет вид $S(t,\tau) = t \int\limits_{-1}^{0} S(t+\vartheta,\tau)d\vartheta - 1$, $t > \tau$. При $\tau \le t \le \tau + 1$ получаем уравнение $S(t,\tau) = t \int\limits_{t-1}^{t} S(y,\tau)dy - 1 = t \int\limits_{\tau}^{t} S(y,\tau)dy - 1$. Функция $\alpha(t,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} S(y,\tau)dy$, $\tau \le t \le \tau+1$, является решением дифференциального уравнения $\alpha'_t(t,\tau) = t\alpha(t,\tau) - 1$ с начальным условием $\alpha(\tau+0,\tau) = 0$. Находим $\alpha(t,\tau) = -\int\limits_{\tau}^{t} e^{\frac{1}{2}(t^2-y^2)}dy$. Тогда $S(t,\tau) = -1 - t\int\limits_{\tau}^{t} e^{\frac{1}{2}(t^2-y^2)}dy$.

5. Формулы, определяющие функции T и V

Можно показать, что при выполнении условий теоремы 2.1 функция V определяется формулой

$$V(t,t_0) = -S(t,t_0)\eta(t_0,-r) - \int_{t_0}^{t} dS(t,s)\eta(s,-r), \quad t > t_0.$$

Для нахождения функции T можно воспользоваться теоремой.

Теорема 5.1. *Функция T определяется формулой*

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+r} dS(t,\xi)\int_{-r}^{s-\xi}[\eta(\xi,\vartheta) - \eta(\xi,-r)]d\vartheta, \quad t > t_0, \quad s \in [t_0 - r, t_0]. \tag{5.1}$$

Доказательство. Рассмотрим решение $x_{\widetilde{\varphi}}$ с начальной функцией $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}^2([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n)$. Это решение при $t > t_0$ совпадает с решением $x_{\widetilde{h}}$, где $\widetilde{h}$ определяется формулами

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} \int\limits_{-r}^{t_0-t} d_\vartheta\eta(t,\vartheta)\widetilde{\varphi}(t+\vartheta) - \int\limits_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(t_0,\vartheta)\widetilde{\varphi}(t_0+\vartheta), & t \in [t_0, t_0+r]; \\ -\int\limits_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(t_0,\vartheta)\widetilde{\varphi}(t_0+\vartheta), & t > t_0 + r. \end{cases} \tag{5.2}$$

После преобразования (5.2) находим $\widetilde{h}(t) = \int\limits_{-r}^{t_0-t}[\eta(t,-r) - \eta(t,\vartheta)]\widetilde{\varphi}'(t_0)d\vartheta + \int\limits_{t-r}^{t_0}\int\limits_{-r}^{s-t}[\eta(t,-r) - \eta(t,\vartheta)]d\vartheta\widetilde{\varphi}''(s)ds - \int\limits_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(t_0,\vartheta)\widetilde{\varphi}(t_0+\vartheta)$, $t \in [t_0, t_0+r]$, $\widetilde{h}(t) = -\int\limits_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(t_0,\vartheta)\widetilde{\varphi}(t_0+\vartheta)$, $t > t_0 + r$. Преобразуем выражение для решения $x_{\widetilde{h}}$

$$x_{\widetilde{h}}(t) = \int_{t_0}^{t_0+r} dS(t,\xi)\widetilde{h}(\xi) = \int_{t_0}^{t_0+r} dS(t,\xi)\int_{-r}^{t_0-\xi}[\eta(\xi,-r) - \eta(\xi,\vartheta)]d\vartheta\widetilde{\varphi}'(t_0) -$$
$$- \int_{t_0-r}^{t_0}\int_{t_0}^{s+r} dS(t,\xi)\int_{-r}^{s-\xi}[\eta(\xi,-r) - \eta(\xi,\vartheta)]d\vartheta\widetilde{\varphi}''(s)ds.$$

Теперь преобразуем выражение для решения $x_{\widetilde{\varphi}}$

$$x_{\widetilde{\varphi}}(t) = -\int_{t_0-r}^{t_0} T(t,\tau,t_0)d\tau\widetilde{\varphi}'(t_0) + \int_{t_0-r}^{t_0}\int_{t_0-r}^{s} T(t,\tau,t_0)d\tau\widetilde{\varphi}''(s)ds.$$

Запишем условия совпадения решений $x_{\widetilde{h}}$ и $x_{\widetilde{\varphi}}$ для произвольных функций $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}^2([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n)$, $t > t_0$, $s \in [t_0 - r, t_0]$,

$$\int_{t_0}^{t_0+r} dS(t,\xi) \int_{-r}^{t_0-\xi} [\eta(\xi,-r) - \eta(\xi,\vartheta)]d\vartheta = -\int_{t_0-r}^{t_0} T(t,\tau,t_0)d\tau,$$
$$-\int_{t_0}^{s+r} dS(t,\xi) \int_{-r}^{s-\xi} [\eta(\xi,-r) - \eta(\xi,\vartheta)]d\vartheta = \int_{t_0-r}^{s} T(t,\tau,t_0)d\tau.$$

При выполнении второго условия первое выполняется. Дифференцируемость по s левой части второго условия следует из дифференцируемости правой части этого условия. Дифференцируя второе равенство по s и производя замену переменной, получаем искомую формулу (5.1). □

Пример 5.1. Дано однородное скалярное уравнение (1.1) с функцией $\eta(t,\vartheta) = t\vartheta$, $r = 1$.

Формула (5.1) имеет вид $T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds} \int\limits_{t_0}^{s+1} dS(t,\xi) \frac{\xi}{2}(s - \xi + 1)^2$, $t > t_0$, $s \in [t_0 - 1, t_0]$. Пусть $t \in (t_0, t_0 + 1]$. Если $t_0 - 1 \le s \le t - 1$, то из примера 4.1 следует $S(t,\xi) = -1 - t \int\limits_{\xi}^{t} e^{\frac{1}{2}(t^2-y^2)}dy$ при $\xi \in [t_0, s+1]$. Следовательно, $T(t,s,t_0) = t \int\limits_{t_0}^{s+1} e^{\frac{1}{2}(t^2-\xi^2)}\xi(s-\xi+1)d\xi$, $t \in (t_0, t_0+1]$, $s \in [t_0-1, t-1]$. Если $t - 1 < s \le t_0$, то из примера 4.1 следует $S(t,\xi) = -1 - t \int\limits_{\xi}^{t} e^{\frac{1}{2}(t^2-y^2)}dy$ при $\xi \in [t_0, t]$ и $S(t,\xi) = 0$ при $\xi \in [t, s+1]$. Следовательно, $T(t,s,t_0) = t \int\limits_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{2}(t^2-\xi^2)}\xi(s - \xi + 1)d\xi + t(s - t + 1)$, $t \in (t_0, t_0 + 1]$, $s \in [t_0 - 1, t - 1]$.

Литература

1. Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* – М.: Наука, 1972. – 352 с.
2. Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.
3. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
4. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения.* – М.: Институт компьютерных исследов., 2002. – 384 с.
5. Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
6. Долгий Ю.Ф., Леонтьева Т.В. *Устойчивость разностных систем с непрерывным временем.* – Уральск. ун-т. – Екатеринбург, 1984. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 06.07.84, № 4765-84.
7. Близоруков М.Г. *К вопросу о построении решений линейных разностных систем с непрерывным временем* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 1. – С. 127–128.
8. Миролюбов А.А., Солдатов М.А. *Линейные неоднородные разностные уравнения.* – М.: Наука, 1986. – 128 с.
9. Халанай А., Векслер Д. *Качественная теория импульсных систем.* – М.: Мир, 1971. – 309 с.
10. Долгий Ю.Ф., Кукушкина Е.В. *Представления решений стационарных функционально-разностных уравнений* // Изв. Уральск. ун-та. – 2002. – № 22. – Вып. 4. – С. 62–80.
11. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. *Интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 448 с.
12. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.

Уральский государственный университет

Поступила
26.02.2003