ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 7 (506)

УДК 517.982

Л.Г. САЛЕХОВ, Л.Л. САЛЕХОВА

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТОЧНОЙ АЛГЕБРЕ D'_+

В сверточной алгебре D'_+ ([1], с. 139) обобщенных функций на $\Re$ с носителями в $\Re_+ = [0; +\infty]$ рассматриваются некоторые классы уравнений, разрешаемых в явном виде. Строятся элементарные (фундаментальные) решения уравнений, принадлежащие алгебре D'_+, которые определяют существование и единственность решений в этой алгебре. Указанные классы содержат как обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, так и обыкновенные дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций D'_+, а также относящиеся к ним задачи Коши; интегральные уравнения Вольтерра специального вида I-го и II-го рода, интегродифференциальные уравнения как целого, так и дробного порядков и, конечно, известные уравнения Абеля I-го и II-го рода и их обобщения.

Предполагается, что все классы уравнений содержат в своей структуре операторы

$$\{f_\lambda^{(\alpha)}(t) * \quad \forall \alpha \in \Re, \quad \forall \lambda \in C\}, \tag{1}$$

где

$$f_\lambda^{(\alpha)}(t) = \begin{cases} \frac{Y(t)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}, & \alpha > 0; \\ (\frac{d}{dt} + \lambda)^m f_\lambda^{(\alpha+m)}(t), & \alpha \le 0, \quad m - \min N \mid \alpha + m > 0, \end{cases}$$

$Y(t)$ — функция Хевисайда, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $(\frac{d}{dt} + \lambda)^m$ — m-я итерация оператора $(\frac{d}{dt} + \lambda)$; $\frac{d}{dt}$ — производная в смысле обобщенных функций.

Известно, что при $\lambda = 0$ ([1], с. 143) операторы свертки $\{f_0^{(\alpha)}(t) * \quad \forall \alpha \in \Re\}$ называют операторами Римана–Лиувилля, которые при $\alpha > 0$ являются операторами дробного интегрирования, а при $\alpha < 0$ — операторами дробного дифференцирования. Эти операторы образуют сверточную группу с нейтральным элементом по свертке в виде δ-функции Дирака.

Несложные вычисления показывают, что множество $\{f_\lambda^{(\alpha)}(t)\ \forall \alpha \in \Re\}$ при фиксированном λ, снабженное операцией свертки, также образует сверточную группу, причем $f_\lambda^{(0)}(t) = \delta \quad \forall \lambda \in C$, поэтому естественным было бы операторы (1) назвать λ-*операторами Римана–Лиувилля*, если $\alpha \in \Re \setminus Z$.

В сверточной алгебре D'_+ рассматриваются следующие классы уравнений:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k f_\lambda^{(\frac{k}{n})}(t) * X = T, \tag{2}$$

где a — const $\in C \setminus \{0\} \quad \forall \lambda \in C$;

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} f_\lambda^{(\alpha-k)}(t) * X = T, \tag{3}$$

где a_k — const $\in C \quad \forall \lambda \in C$, $\forall \alpha \in \Re$, $a_0 = 1$;

$$\{\delta - a f_\lambda^{(\alpha)}(t)\} * X = T, \tag{4}$$

где a — const $\in C \setminus \{0\}$ $\forall\lambda \in C$, $\alpha = \frac{m}{n}$, m и n взаимно простые, $m \in Z \setminus \{0\}$, $n \in N$;

$$\{f_\lambda^{(\alpha)}(t) + af_\lambda^{(\beta)}(t)\} * X = T, \tag{5}$$

a — const $\in C \setminus \{0\}$ $\forall\lambda \in C$, $\alpha, \beta \in \Re \mid (\alpha - \beta) \in Z$;

$$\{P(t)f_\lambda^{(1-\alpha)}(t)\} * X = T \ \ \forall\lambda \in C, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{6}$$

$P(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}t^k$, a_k — const $\in C$, причем $a_n = 1$.

Всюду T — заданная обобщенная функция из D'_+, X — искомая обобщенная функция из D'_+.

К классу уравнений (4) относится уравнение, рассмотренное в [2] при $0 < \alpha = \frac{m}{n} < 1$, $\lambda = 0$ в пространстве обычных функций из D'_+, а к классу уравнений (6) относится уравнение, рассмотренное в [3] при $\lambda = 0$ в пространстве обычных функций из D'_+.

В сверточной алгебре S'_+ обобщенных функций на $\Re$ медленного роста с носителями в $\Re_+$ указанные классы уравнений (2)–(6) при $\lambda = 0$ могут быть исследованы методом преобразования Фурье из [4]. Тогда решения этих уравнений выражаются через обратные преобразования Фурье, которые не всегда удается выписать в удобном виде.

В данной статье применяется теория уравнений сверток в сверточных алгебрах. Если элементарным решением уравнения $A * X = T$ в некоторой сверточной алгебре $\mathcal{A}$ является $E \in \mathcal{A}$, то оно единственно в $\mathcal{A}$ и единственное решение данного уравнения в $\mathcal{A}$ определяется формулой $X = E * T$.

Алгоритм решения. Очевидно, что все рассматриваемые классы уравнений можно записать в виде уравнения сверток $A * X = T$, где A и T — известные обобщенные функции из D'_+. Для отыскания элементарного решения E уравнения $A * E = \delta$, принадлежащего алгебре D'_+, домножаем сверточно обе части данного уравнения на сверточный сомножитель Q из D'_+, подходящим образом подобранный для каждого из рассматриваемых классов уравнений. Множитель подбирается так, что $Q * A = P(\frac{d}{dt})\delta$, где $P(\frac{d}{dt})$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Получим уравнение сверток $P(\frac{d}{dt})E = Q$ в D'_+, у которого существует и притом единственное элементарное решение E_1 , принадлежащее алгебре D'_+, имеющее конструкцию $E_1 = Y(t)e(t)$, где $e(t)$ — классическое решение задачи Коши

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)e = 0, \quad e(0) = e'(0) = \cdots = e^{(n-2)}(0) = 0, \quad e^{(n-1)}(0) = 1.$$

Следовательно, существует единственное элементарное решение $E \in D'_+$, определяемое формулой $E = E_1 * Q$.

Конструкции решений. Применим указанный алгоритм решения к уравнениям класса (2). Домножая сверточно обе части уравнения (2) на элемент $(\delta - af_\lambda^{(\frac{1}{n})}) \in D'_+$, где $T = \delta$, $X = E$, получим

$$\{\delta - a^n f_\lambda^{(1)}(t)\} * E = \delta - af_\lambda^{(\frac{1}{n})}(t).$$

Умножая сверточно обе части полученного равенства на $(\frac{d}{dt} + \lambda)\delta$, имеем

$$\left\{\frac{d}{dt} + (\lambda - a^n)\right\}E = \{\delta - af_\lambda^{(\frac{1}{n})}(t)\} * \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)\delta.$$

Элементарное решение оператора $\{\frac{d}{dt} + (\lambda - a^n)\}$, принадлежащее D'_+, имеет вид $E_1(t) = Y(t)\exp\{-(\lambda - a^n)t\}$, следовательно, элементарное решение уравнения (2) определяется формулой

$$E = E_1 * \{\delta - af_\lambda^{(\frac{1}{n})}(t)\} * \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)\delta = \{\delta + Y(t)a^n e^{-(\lambda - a^n)t}\} * \{\delta - af_\lambda^{(\frac{1}{n})}(t)\} \in D'_+.$$

Приведем конструкции элементарных решений, принадлежащих D'_+, для остальных классов уравнений. Для уравнений класса (3) элементарные решения имеют вид $E = E_1 * f_\lambda^{(-\alpha)}(t)$, где E_1 — элементарное решение оператора $P\big(\frac{d}{dt}\big) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}\big(\frac{d}{dt}+\lambda\big)^k$, принадлежащее алгебре D'_+. Для уравнений класса (4), если m целое отрицательное, то $E = E_1 * \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}} f_\lambda^{(\frac{mk}{n})}(t)$, где E_1 — элементарное решение оператора $P\big(\frac{d}{dt}\big) = 1 - a\big(\frac{d}{dt}+\lambda a\big)^{-mn}$, принадлежащее D'_+. Если же m целое положительное, то

$$E = E_1 * f_\lambda^{(-nm)}(t) * \sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}} f_\lambda^{(\frac{mk}{n})}(t),$$

где E_1 — элементарное решение оператора $P\big(\frac{d}{dt}\big) = \big(\frac{d}{dt}+\lambda\big)^{mn} - a$, принадлежащее D'_+. Для уравнений класса (5) при $\alpha - \beta = -n$, где $n \in N$, имеем

$$E = E_1 * f_\lambda^{(-\beta)}(t),$$

где E_1 — элементарное решение оператора $P\big(\frac{d}{dt}\big) = \big(\frac{d}{dt}+\lambda\big)^{n} + a$, принадлежащее D'_+. Для уравнений класса (6)

$$E = E_1 * f_\lambda^{-(n+1-\alpha)}(t),$$

где E_1 — элементарное решение оператора $P\big(\frac{d}{dt}\big) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{\Gamma(k+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\big(\frac{d}{dt}+\lambda\big)^{n-k}$, принадлежащее алгебре D'_+. Таким образом, построены элементарные решения пяти обширных классов уравнений, что дает возможность выписать решения данных уравнений в виде свертки $X = E * T$.

Литература

1. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1981. – 432 с.
2. Brakhage H., Nickel K., Rieder P. *Auflosung der Abelsche Integralgleichung 2. Art* // Z. angew. Math. und Phys. – 1965. – Bd. 16. - № 2. – S. 295–298.
3. Сакалюк К.Д. *Обобщенное уравнение Абеля* // ДАН СССР. – 1960. – Т. 131. – № 4. – С. 748–751.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техн., 1987. – 493 с.

Казанский государственный университет

Казанский государственный педагогический университет

Поступила
26.03.2002