ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 11 (474)

УДК 517.968:519.6

Э.Н. САМОЙЛОВА

СПЛАЙНОВЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Введение

В данной статье для уравнения

$$A\varphi \equiv \varphi'(t) + a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{0.1}$$

с начальным условием

$$\varphi(-1) = 0 \tag{0.2}$$

приводятся вычислительные схемы методов сплайн-коллокации и сплайн-подобластей с теоретическим обоснованием этих методов ([1], гл. 14; [2], гл. 1).

1. Вычислительная схема метода сплайн-коллокации

Приведем вычислительную схему метода сплайн-коллокации для задачи (0.1)–(0.2) при $a(t), b(t), f(t) \in C[-1,1]$, где $C[-1,1] \equiv C$ — пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций с обычной нормой.

Введем сетки узлов

$$t_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad k = \overline{0,n}, \quad n \in N, \tag{1.1}$$

$$\overline{t}_{k-1} = \frac{t_{j-1} + t_j}{2} = -1 + \frac{2j-1}{2n}, \quad j = \overline{1,n}, \quad n \in N, \tag{1.2}$$

где N — множество натуральных чисел. Приближенное решение задачи (0.1)–(0.2) будем искать в виде сплайна

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k s_k(t), \quad n \in N, \tag{1.3}$$

где

$$s_k(t) = \begin{cases} 0, & t \le t_{k-1}; \\ \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}, & t_{k-1} \le t \le t_k; \\ \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k}, & t_k \le t \le t_{k+1}; \\ 0, & t \ge t_{k+1}, \end{cases} \tag{1.4}$$

— фундаментальные сплайны первой степени, причем при $k = 0$ и $k = n$ пренебрегаем первыми двумя и соответственно последними двумя звеньями функций $s_0(t)$ и $s_n(t)$. Неизвестные постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ определяем методом коллокаций из условий

$$(A\varphi_n)(\overline{t}_j) = f(\overline{t}_j), \quad j = \overline{1,n}, \quad \varphi_n(-1) = 0. \tag{1.5}$$

Они эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\alpha_0 = 0, \quad \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} + a_j \frac{\alpha_j + \alpha_{j-1}}{2} + b_j \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\alpha_k = f_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.6}$$

где

$$a_j = a(\bar{t}_j), \quad b_j = b(\bar{t}_j), \quad f_j = f(\bar{t}_j), \tag{1.7}$$

$$c_{jk} = \frac{1}{\pi}\begin{cases} (k-j+\frac{3}{2})\ln\left|\frac{2k-2j+3}{2k-2j+1}\right| - (k-j-\frac{1}{2})\ln\left|\frac{2k-2j+1}{2k-2j-1}\right|, & k=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,n};\\ 1-(n-j-\frac{1}{2})\ln\left|\frac{2n-2j+1}{2n-2j-1}\right|, & k=n,\ j=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Покажем способ получения СЛАУ (1.6)–(1.8). В силу (0.2) из (1.3)–(1.4) получаем $\varphi_n(-1) = \varphi_n(t_0) = \alpha_0 = 0$. В силу (1.1)–(1.4) ясно также, что

$$\varphi_n(\bar{t}_j) = \frac{\alpha_j + \alpha_{j-1}}{2}, \quad \varphi_n'(\bar{t}_j) = \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{h}, \quad h = \frac{2}{n}. \tag{1.9}$$

Поэтому из (1.3)–(1.5) последовательно находим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n(\tau)d\tau}{\tau - \bar{t}_j} = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\alpha_k, \tag{1.10}$$

где

$$c_{jk} = \frac{1}{\pi}\int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}}\frac{s_k(\tau)d\tau}{\tau - \bar{t}_j}, \quad k=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,n}, \quad t_{n+1}\equiv t_n. \tag{1.11}$$

В силу (1.4) и (1.11) имеем

$$\pi c_{jk} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}}\frac{s_k(\tau)d\tau}{\tau - \bar{t}_k} = \frac{1}{h}\left[(\bar{t}_j - t_{k-1})\beta_{jk} + (t_{k+1} - \bar{t}_j)\beta_{j,k+1}\right], \tag{1.12}$$

где $k = \overline{1,n-1}$, $j = \overline{1,n}$ и

$$\beta_{jk} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{d\tau}{\tau - \bar{t}_j} = \begin{cases} 0, & j=k;\\ \ln\left|\frac{2k-2j+1}{2k-2j-1}\right|, & j\neq k, \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\pi c_{jk} = \int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{s_n(\tau)d\tau}{\tau - \bar{t}_j} = 1 + \frac{\bar{t}_j - t_{n-1}}{h}\beta_{jn}, \quad j=\overline{1,n}, \tag{1.14}$$

где β_{jn} определены формулой (1.13) с $k = n$.

Из соотношений (1.11)–(1.14) получаем формулы (1.8), отсюда и из (1.5), (1.9)–(1.11) следует СЛАУ (1.6).

2. Предварительные результаты

Пусть $X = W_2^1(-1,1) \equiv W_2^1$ — пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций, удовлетворяющих условию (0.2) и имеющих там первые обобщенные производные, квадратично суммируемые по Лебегу. Норму в X введем соотношением

$$\|x\|_X = \left\{\int_{-1}^{1}|x'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad x \in X.$$

За Y возьмем пространство Лебега $L_2(-1,1) \equiv L_2$ с обычной нормой

$$\|y\|_Y = \left\{\int_{-1}^{1}|y'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad y \in Y.$$

Тогда задачу (0.1)–(0.2) можно записать в виде эквивалентного ей линейного операторного уравнения

$$A\varphi \equiv G\varphi + T\varphi = f \quad (\varphi \in X, \ \ f \in Y), \tag{2.1}$$

где

$$G\varphi = \varphi'(t), \quad T\varphi = a\varphi + B\varphi, \quad B\varphi = bS\varphi, \tag{2.2}$$

причем сингулярный интеграл

$$S(\varphi; t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad t \in (-1, 1), \tag{2.3}$$

понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу (напр., [3], [4]).

Лемма 1. *Для любой функции $\varphi \in X$ справедливо представление*

$$\pi S(\varphi; t) = \varphi(+1)\ln(1-t) - \int_{-1}^{1} \varphi'(\xi)\ln|\xi - t|d\xi, \quad -1 \le t < 1. \tag{2.4}$$

Доказательство. В силу (0.2) для любой функции $\varphi \in X$ имеем

$$\varphi(\tau) = \int_{-1}^{\tau} \varphi'(\xi)d\xi, \, \tau \in [-1, 1]. \tag{2.5}$$

Отсюда с учетом (0.2) и (2.3) последовательно находим

$$\pi S(\varphi; t) = \int_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\tau - t}\int_{-1}^{\tau} \varphi'(\xi)d\xi = \int_{-1}^{1} \varphi'(\xi)d\xi \int_{\xi}^{1} \frac{d\tau}{\tau - t} = \int_{-1}^{1} \varphi'(\xi)\ln\frac{1-t}{|\xi - t|}d\xi =$$
$$= \ln(1-t)\int_{-1}^{1} \varphi'(\xi)d\xi - \int_{-1}^{1} \ln|\xi - t|\varphi'(\xi)d\xi = \ln(1-t)\varphi(+1) - \int_{-1}^{1} \varphi'(\xi)\ln|\xi - t|d\xi, \quad t \in [-1, 1). \ \square$$

Лемма 2. *Пусть функция $b(t) \in \mathrm{Lip}_{K_0}\beta$, $0 < \beta \le 1$, $K_0 = \mathrm{const}$ и $b(+1) = 0$. Тогда оператор $B : X \to Y$, где*

$$B(\varphi; t) = b(t)S(\varphi; t), \quad \varphi \in X, \quad -1 \le t \le 1,$$

является вполне непрерывным как оператор из X в $C[-1, 1]$ и тем более он вполне непрерывен как оператор из X в Y.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{B} = \mathcal{B}(0, 1)$ единичный шар пространства X. Покажем, что функции множества $\{B(\varphi; t) = b(t)S(\varphi; t)\}$, $\varphi \in \mathcal{B}$, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.

1. *Равномерная ограниченность.* В силу леммы 1 для любой функции $\varphi \in X$ имеем

$$\pi b(t)S(\varphi; t) = \varphi(+1)b(t)\ln(1-t) - b(t)\int_{-1}^{1} \ln|\xi - t|\varphi'(\xi)d\xi. \tag{2.6}$$

Ясно, что для любой $\varphi \in \mathcal{B} \subset X$

$$|\varphi(+1)| \le \|\varphi(t)\|_C \le \sqrt{2}\|\varphi\|_X \le \sqrt{2},$$
$$|b(t)| = |b(+1) - b(t)| \le K_0|1-t|^{\beta}, \quad t \in [-1, 1].$$

Поэтому для любого $t \in [-1, 1]$ справедливы неравенства

$$|\varphi(+1)b(t)\ln(1-t)| \le \sqrt{2}K_0|1-t|^{\beta}|\ln(1-t)| \le \sqrt{2}K_0K_1|1-t|^{\beta}|1-t|^{-\varepsilon} \le 2^{\beta}K_0K_1 \equiv K_2, \tag{2.7}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, а K_i — положительные постоянные, не зависящие от $t \in [-1,1]$. С помощью неравенства Буняковского находим

$$\left\| b(t)\int_{-1}^{1} \ln|\xi - t|\varphi'(\xi)d\xi \right\|_C \le \|b(t)\|_C \max_{-1\le t\le 1} \sqrt{\int_{-1}^{1} \ln^2|\xi-t|d\xi}\, \|\varphi'\|_Y \le$$
$$\le \|b\|_C K_3 \|\varphi\|_X \le K_4 < \infty, \quad \varphi \in \mathcal{B}. \quad (2.8)$$

Из соотношений (2.6)–(2.8) для любой $\varphi \in \mathcal{B} \subset X$ следует требуемое неравенство

$$\|B(\varphi;t)\|_C \le \frac{K_2}{\pi} + \frac{K_4}{\pi} = K_5 < \infty.$$

2. *Равностепенная непрерывность.* Положим $b_1(t) = b(t)\ln(1-t)$. Так как функция $b(t) \in \mathrm{Lip}_{K_0}\beta$ и $b(+1) = 0$, то функция $b_1(t) \in \mathrm{Lip}_{\widetilde{K}}(\beta - \varepsilon)$, где $0 < \widetilde{K} = \mathrm{const} < \infty$, а ε — сколь угодно малое положительное число. Поэтому

$$\omega(b_1;\delta) = \omega(b(t)\ln(1-t);\delta) \to 0, \quad \delta \to +0, \tag{2.9}$$

где $\omega(\psi;\delta)$ — модуль непрерывности функции $\psi \in C[-1,1]$ с шагом $\delta \in (0,2]$. С другой стороны, для любой функции $\varphi \in \mathcal{B} \subset X$ имеем

$$U'(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(\xi)d\xi}{\xi - t}, \quad -1 < t < 1, \quad \|U'\|_Y \le \|\varphi'\|_Y = \|\varphi\|_X \le 1.$$

Отсюда следует, что функция $U(t)$ удовлетворяет условию

$$U(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \varphi'(\xi)\ln|\xi - t|d\xi \in \mathrm{Lip}_1 \frac{1}{2}. \tag{2.10}$$

Теперь в силу (2.6)–(2.10) для любой $\varphi \in \mathcal{B} \subset X$ находим

$$\pi\omega(B\varphi;\delta) \le |\varphi(+1)|\omega(b_1;\delta) + \omega(b;\delta)\|U(t)\|_C + \|b(t)\|_C\omega(U;\delta) \le$$
$$\le \sqrt{2}\omega(b_1;\delta) + \omega(b;\delta)K_3 + \|b\|_C\sqrt{\delta} \le K_6\{\omega(b;\delta) + \omega(b_1;\delta) + \sqrt{\delta}\}.$$

Поэтому

$$\sup_{\varphi\in X,\ \|\varphi\|\le 1} \omega(B\varphi;\delta) = \sup_{\varphi\in\mathcal{B}} \omega(B\varphi;\delta) \le \frac{K_6}{\pi}\gamma(\delta), \tag{2.11}$$

где

$$\gamma(\delta) = \{\omega(b;\delta) + \omega(b_1;\delta) + \sqrt{\delta}\} \to 0, \quad \delta \to +0.$$

Тем самым равностепенная непрерывность множества функций $\{B(\varphi;t)\}$ при $\varphi \in \mathcal{B} \subset X$ доказана.

В силу сказанного выше и критерия компактности (напр., [1], гл. 1 и гл. 9) в пространстве непрерывных функций лемма 2 доказана. $\square$

3. Обоснование метода сплайн-коллокации

Теорема 1. *Пусть* $a(t), f(t) \in C[-1,1]$ *и* $b(t) \in \mathrm{Lip}_{K_0}\beta, b(+1) = 0$. *Если задача* (0.1)–(0.2) *имеет единственное решение* $\varphi^\star \in X$ *при любой правой части* $f \in Y$, *то при всех* $n \in N$, *начиная с некоторого, СЛАУ* (1.4) *имеет единственное решение. Приближенные решения* (1.3) *сходятся при* $n \to \infty$ *к точному решению* $\varphi^\star(t)$ *задачи* (0.1)–(0.2) *в пространстве* X *со скоростью*

$$\|\varphi^\star - \varphi_n\|_X = O\Big\{\omega\Big(f;\frac{1}{n}\Big) + \omega\Big(a;\frac{1}{n}\Big) + \frac{\|a\|_C}{\sqrt{n}} + \omega\Big(b;\frac{1}{n}\Big) + \omega\Big(b_1;\frac{1}{n}\Big)\Big\}. \tag{3.1}$$

Доказательство. В силу леммы 1 для оператора $T : X \to Y$ справедливо представление

$$T(\varphi;t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)\varphi(+1)\ln(1-t)}{\pi} - \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi'(\xi)\ln|\xi - t|d\xi. \tag{3.2}$$

Отсюда видно, что оператор $T : X \to Y$ является вполне непрерывным. В силу (0.2) и (2.5) оператор $G : X \to Y$ является линейной изометрией, а именно,

$$\|G\|_{X\to Y} = \|G^{-1}\|_{Y\to X} = 1. \tag{3.3}$$

Из сказанного выше уравнение (2.1) является приводящимся ([1], гл.13) к уравнению второго рода, а следовательно [1], оператор $A : X \to Y$ непрерывно обратим и

$$\|A^{-1}\|_{Y\to X} \leq \text{const} < \infty. \tag{3.4}$$

Обозначим через X_n множество всех сплайнов первой степени с узлами (1.1), удовлетворяющих условию (0.2). Очевидно, $X_n \subset X$ и $\dim X_n = n < \infty$. Через Y_n обозначим множество всех сплайнов нулевой степени с узлами (1.1). Очевидно, $Y_n \subset Y$ и $\dim Y_n = n < \infty$. Введем оператор P_n, проектирующий пространство Y в подпространство Y_n по формуле

$$P_n(\psi;t) = \sum_{j=1}^{n}\psi(\overline{t}_j)\psi_j(t), \quad t \in [-1,1], \tag{3.5}$$

где $\psi(t) \in C[-1,1]$, а $\psi_j(t)$ – характеристические функции интервалов $[t_{j-1}, t_j]$, точнее,

$$\psi_j(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{j-1}, t_j); \\ 0, & t \notin [t_{j-1}, t_j), \quad j = \overline{1, n-1}, \end{cases} \qquad \psi_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{n-1}, t_n]; \\ 0, & t \notin [t_{n-1}, t_n]. \end{cases} \tag{3.6}$$

Известно, что P_n – линейный проекционный оператор, причем (напр., [5]) для любой функции $\psi \in C[-1,1]$ справедливо неравенство

$$|\psi(t) - P_n\psi(t)| \leq \omega\left(\psi; \frac{1}{n}\right), \quad t \in [-1,1]. \tag{3.7}$$

Легко видеть, что СЛАУ (1.4) можно записать в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$A_n\varphi_n \equiv P_nA\varphi_n = P_nG\varphi_n + P_nT\varphi_n = P_nf \quad (\varphi_n \in X_n, \ \ P_nf \in Y_n). \tag{3.8}$$

Поскольку $\varphi_n \in X_n$, $G\varphi_n = \varphi_n' \in Y_n$, а $P_n^2 = P_n$, то $P_nG\varphi_n = G\varphi_n$. Поэтому уравнение (3.8) принимает вид

$$A_n\varphi_n \equiv G\varphi_n + P_n(a\varphi_n) + P_n(bS\varphi_n) = P_nf \quad (\varphi_n \in X_n, \ \ P_nf \in Y_n). \tag{3.9}$$

Для любого $\varphi_n \in X_n$ из формул (2.1)–(2.3) и (3.8), (3.9) последовательно находим

$$\|A\varphi_n - A_n\varphi_n\|_Y = \|A\varphi_n - P_nA\varphi_n\|_Y = \|T\varphi_n - P_nT\varphi_n\|_Y \leq$$
$$\leq \|a\varphi_n - P_n(a\varphi_n)\|_Y + \|bS\varphi_n - P_n(bS\varphi_n)\|_Y. \tag{3.10}$$

Оценим сверху каждое из слагаемых в правой части формулы (3.10). Так как $a\varphi_n \in C$ для любой функции $\varphi_n \in X_n$, то в силу (3.7) получаем

$$\|a\varphi_n - P_n(a\varphi_n)\|_Y \leq \sqrt{2}\sup_{-1\leq t\leq 1}|a(t)\varphi_n(t) - P_n(a(t)\varphi_n(t))| \leq \sqrt{2}\omega\left(a\varphi_n; \frac{1}{n}\right) \leq$$
$$\leq \sqrt{2}\left\{\|a\|_C\omega\left(\varphi_n; \frac{1}{n}\right) + \omega\left(a; \frac{1}{n}\right)\|\varphi_n\|_C\right\}, \quad \varphi_n \in X_n. \tag{3.11}$$

Известно, что для любой функции $\varphi \in X$ справедливы соотношения

$$\|\varphi(t)\|_C = \left\| \int_{-1}^{t} \varphi'(\xi) d\xi \right\|_C \le \int_{-1}^{1} |\varphi'(\xi)| d\xi \le \sqrt{2} \|\varphi'\|_Y = \sqrt{2} \|\varphi\|_X,$$

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| = \left| \int_{t'}^{t''} \varphi'(t) dt \right| \le \sqrt{|t' - t''|}\, \|\varphi'\|_Y = \sqrt{|t' - t''|}\, \|\varphi\|_X, \quad t', t'' \in [-1, 1].$$

Поэтому для любого $\varphi_n \in X_n$ имеем

$$\|\varphi_n\|_C \le \sqrt{2} \|\varphi_n\|_X, \tag{3.12}$$

$$\omega(\varphi_n; \delta) \le \delta^{\frac{1}{2}} \|\varphi_n\|_X, \quad \delta \in (0, 2]. \tag{3.13}$$

Из соотношений (3.11)–(3.13) следует, что для любого $\varphi_n \in X_n$

$$\|a\varphi_n - P_n(a\varphi_n)\|_Y \le 2 \left\{ \frac{\|a\|_C}{\sqrt{n}} + \omega\left(a; \frac{1}{n}\right) \right\} \|\varphi_n\|_X \equiv \beta_n \|\varphi_n\|_X, \tag{3.14}$$

где $\beta_n = 2\left\{ \frac{\|a\|_C}{\sqrt{n}} + \omega\left(a; \frac{1}{n}\right) \right\} \to 0$, $n \to \infty$.

Для второго слагаемого в правой части (3. 10) последовательно находим

$$\|bS\varphi_n - P_n(bS\varphi_n)\|_Y \le \sqrt{2} \sup_{-1 \le t \le 1} |(bS\varphi_n)(t) - P_n(bS\varphi_n; t)| =$$

$$= \sqrt{2} \|\varphi_n\|_X \sup_{-1 \le t \le 1} |bS\sigma_n - P_n(bS\sigma_n)| \le \sqrt{2} \|\varphi_n\|_X \sup_{\sigma_n \in X_n,\ \|\sigma_n\| = 1} \ \sup_{-1 \le t \le 1} |bS\sigma_n - P_n(bS\sigma_n)| \le$$

$$\le \sqrt{2} \|\varphi_n\|_X \sup_{\varphi \in X,\ \|\varphi\| = 1} \ \sup_{-1 \le t \le 1} |bS\varphi - P_n(bS\varphi)|, \tag{3.15}$$

где $\sigma_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$, $\varphi_n \in X_n$, $\varphi_n \not\equiv 0$. Теперь с помощью леммы 2 и формул (3.15), (2.11) находим

$$\|bS\varphi_n - P_n(bS\varphi_n)\|_Y \le \sqrt{2} \|\varphi_n\|_X \sup_{\varphi \in X,\ \|\varphi\| = 1} \omega\left(B\varphi; \frac{1}{n}\right) \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2} K_6}{\pi} \|\varphi_n\|_X \beta\left(\frac{1}{n}\right) = \|\varphi_n\|_X \theta\left(\frac{1}{n}\right), \quad \varphi_n \in X_n, \tag{3.16}$$

где

$$\theta_n = \theta\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{2} K_6}{\pi} \left\{ \omega\left(b; \frac{1}{n}\right) + \omega\left(b_1; \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, в силу (3.10), (3.14) и (3.16) имеем

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \le \beta_n + \theta_n \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.17}$$

где величины β_n и θ_n определены в (3.14) и (3.16) соответственно. Кроме того, для правых частей уравнений (2.1) и (3.9) в силу неравенства (3.7) имеем

$$\delta_n \equiv \|f - P_n f\|_Y \le \sqrt{2} \sup_{-1 \le t \le 1} |f(t) - P_n f(t)| \le \sqrt{2}\, \omega\left(f; \frac{1}{n}\right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.18}$$

Итак, в силу соотношений (3.4), (3.17) и (3.18) для уравнений (2.1) и (3.9) выполнены все условия леммы 2.1 из ([2], гл. 1). Поэтому

а) для всех $n \in N$ таких, что $q_n \equiv \varepsilon_n \|A^{-1}\|_{Y \to X} < \frac{1}{2}$, операторы $A_n : X_n \to Y_n$ линейно обратимы, а обратные операторы ограничены по норме в совокупности, точнее

$$\|A_n^{-1}\| \le 2 \|A^{-1}\| < \infty, \quad n \ge n_0; \tag{3.19}$$

б) приближенные решения $\varphi_n = A_n^{-1} P_n f$, определенные по формуле (1.3), сходятся к точному решению $\varphi^\star = A^{-1} f$ задачи (0.1)–(0.2) в пространстве X со скоростью

$$\|\varphi^\star - \varphi_n\|_X = O(\varepsilon_n + \delta_n).$$

Отсюда и из (3.18), (3.17), (3.16), (3.14) с учетом свойств функций $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ находим

$$\|\varphi^\star - \varphi_n\|_X = O\Big\{\omega\Big(a; \frac{1}{n}\Big) + \omega\Big(b; \frac{1}{n}\Big) + \omega\Big(b_1; \frac{1}{n}\Big) + \omega\Big(f; \frac{1}{n}\Big) + \frac{\|a\|_C}{\sqrt{n}}\Big\} \to 0, \quad n \to \infty. \quad \square \tag{3.20}$$

Теорему 1 дополняет

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *погрешность приближенного решения может быть оценена неравенством*

$$\|\varphi^\star - \varphi_n\|_X = O\Big\{\omega\Big(\varphi^{\star\prime}; \frac{1}{n}\Big)\Big\}. \tag{3.21}$$

Если же коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ *и* $f(t)$ *уравнения* (0.1) *таковы, что*

$$\varphi^{\star\prime}(t) \equiv f(t) - a(t)\varphi^\star(t) - b(t)S(\varphi^\star; t) \in \mathrm{Lip}\,\alpha, \quad 0 < \alpha \le 1, \tag{3.22}$$

то метод (0.1)–(0.2), (1.1)–(1.4) *сходится со скоростью*

$$\|\varphi^{\star\prime}(t) - \varphi_n\|_X = O\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big). \tag{3.23}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу лемм 1 и 2 функция $\varphi^{\star\prime}(t) = f(t) - T(\varphi^\star; t) \in C[-1, 1]$, и поэтому оценка (3. 21) имеет смысл. Теорема 1, в частности, соотношения (3.3), (3.4), (3.19), а также следствие 1 леммы 2.2 из ([2], гл. 1) позволяют оценить погрешность приближенного решения по формуле

$$\begin{aligned}\|\varphi^\star - \varphi_n\|_X = \|(E - A_n^{-1} P_n T) G^{-1}(G\varphi^\star - P_n G\varphi^\star)\|_X \le \\ \le \|E - A_n^{-1} P_n T\|_{X \to X} \|G\varphi^\star - P_n G\varphi^\star\|_Y \le \\ \le (1 + 2\|A^{-1}\|_{Y \to X} \|P_n T\|_{X \to Y}) \|G\varphi^\star - P_n G\varphi^\star\|_Y.\end{aligned} \tag{3.24}$$

В ходе доказательства теоремы 1 показано, что

$$\|T - P_n T\|_{X_n \to Y} \le \|T - P_n T\|_{X \to Y} \le \beta_n + \theta_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.25}$$

Поскольку сходящаяся последовательность операторов $P_n T : X \to Y$ ограничена, то из (3.24) и (3.25) находим $\|\varphi^\star - \varphi_n\|_X = O\{\|G\varphi^\star - P_n G\ \varphi^\star\|_Y\}$.

Отсюда и из неравенства (3.7) получим

$$\|\varphi^\star - \varphi_n\|_X = O\Big\{\sup_{-1 \le t \le 1} |G\varphi^\star - P_n G\varphi^\star|\Big\} = O\Big\{\omega\Big(\varphi^{\star'}; \frac{1}{n}\Big)\Big\},$$

т. е. оценка (3.21) доказана. Оценка (3.23) следует из формул (3.21), (3.22) и (3.7). $\square$

Из теоремы 2 и известных теорем вложения функций от одной переменной (напр., [6], детали см. в [7,] [2]) легко выводится

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *метод* (0.1)–(0.2), (1.1)–(1.4) *сходится равномерно и в пространстве Гёльдера* H_ε $(0 < \varepsilon \le \frac{1}{2})$ *со скоростями соответственно*

$$\|\varphi^\star - \varphi_n\|_C = O\Big\{\omega\Big(\varphi^{\star\prime}; \frac{1}{n}\Big)\Big\}, \quad \|\varphi^\star - \varphi_n\|_{H_\varepsilon} = O\Big\{\omega\Big(\varphi^{\star\prime}; \frac{1}{n}\Big)\Big\},$$

а при выполнении условия (3.22) *метод сходится со скоростью, определяемой неравенствами* $\|\varphi^\star - \varphi_n\|_C \le \|\varphi^\star - \varphi_n\|_{H_\varepsilon} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

4. Метод сплайн-подобластей

В предыдущих параграфах мы исследовали метод сплайн-коллокации решения задачи Коши (0.1)–(0.2). Теперь рассмотрим теоретическое обоснование метода сплайн-подобластей решения задачи (0.1)–(0.2).

Приближенное решение снова ищем в виде сплайна (1.3) с узлами (1.1), а неизвестные постоянные определяем методом подобластей из условий

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} A(\varphi_n;t)dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t)dt, \quad j=\overline{1,n}, \;\; \varphi_n(-1)=0. \tag{4.1}$$

В силу (0.1)–(0.2), (1.1)–(1.4) эти условия эквивалентны следующей СЛАУ:

$$\sum_{k=1}^{n} d_{jk}\alpha_k = f_j, \quad j=\overline{1,n}, \;\; \alpha_0=0, \tag{4.2}$$

где $d_{jk} = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} A(s_k;t)dt$, $f_j = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} f(t)dt$.

При обосновании схемы (0.1)–(0.2), (1.1), (1.3), (4.1)–(4.2) существенную роль играют две леммы.

Лемма 3. *Пусть $a(t)$ и $b(t) \in C[-1,1]$. Тогда оператор $T : X \to Y$,*

$$T(\varphi;t) \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)S(\varphi;t), \quad -1<t<1,$$

вполне непрерывен как оператор из пространства $X = W_2^1(-1,1)$ в пространство $Y = L_2(-1,1)$.

Доказательство. Поскольку

$$\|\ln(1-t)\|_Y \le M_1 = \text{const} < \infty, \tag{4.3}$$

$$\max_{-1\le t\le 1} \int_{-1}^{1} |\ln|\xi - t||d\xi \le M_2 = \text{const} < \infty, \tag{4.4}$$

$$|\varphi(+1)| \le \|\varphi\|_C \le \sqrt{2}\|\varphi\|_X, \tag{4.5}$$

то для любой функции $\varphi \in \mathcal{B} \subset X$ последовательно находим

$$|T(\varphi;t)| \le \|a\|_C|\varphi(t)| + \frac{\|b\|_C}{\pi}\Big\{|\varphi(+1)|\,|\ln(1-t)| + \|\varphi\|_C \int_{-1}^{1} |\ln|\xi-t||d\xi\Big\} \le$$

$$\le \|\varphi\|_C\Big\{\|a\|_C + \frac{\|b\|_C}{\pi}\Big[|\ln(1-t)| + \int_{-1}^{1}|\ln|\xi-t||d\xi\Big]\Big\} \le$$

$$\le \sqrt{2}\,\|\varphi\|_X\Big\{\|a\|_C + \frac{\|b\|_C}{\pi}[|\ln(1-t)| + M_2]\Big\},$$

$$\|T\varphi\|_Y \le \sqrt{2}\Big\{\sqrt{2}\|a\|_C + \frac{\|b\|_C}{\pi}[M_1 + \sqrt{2}M_2]\Big\} \equiv M_3 = \text{const} < \infty.$$

С другой стороны, при доказательстве леммы 2 было показано, что оператор $\widetilde{T} : X \to Y$, где

$$\widetilde{T}(\varphi;t) = a(t)\varphi(t) - \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1} \varphi'(\xi)\ln|\xi-t|d\xi, \quad -1\le t\le 1,$$

является вполне непрерывным как оператор из пространства X в пространство C, а следовательно, из пространства X в пространство Y. В силу представления (3.1) для доказательства леммы остается показать, что оператор $\overline{T} = T - \widetilde{T} : X \to Y$, где

$$\overline{T}(\varphi;t) = \frac{\varphi(+1)}{\pi}\ln(1-t), \quad -1\le t<1, \;\; \varphi\in X,$$

является вполне непрерывным. Это утверждение легко выводится из критерия компактности (напр., [1], гл. 9, п. 1) в пространстве $L_2(-1,1)$ и неравенств (4.3)–(4.5).

Введем оператор проектирования $\overline{P}_n : Y \to Y_n$ по формуле

$$\overline{P}_n(f;t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\psi_j(t)}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\xi)d\xi, \quad f \in L_2(-1,1).$$

Известна (напр., [5]; [7], гл. 4)

Лемма 4. *Справедливы утверждения*:

а) $\overline{P}_n^2 = \overline{P}_n = \overline{P}_n^\star$, *где* $\overline{P}_n^\star$ *— сопряженный к* $\overline{P}_n$ *оператор*;

б) $\|\overline{P}_n\|_{Y\to Y} = 1$, $n \in N$;

в) $\overline{P}_n \to E$ *при* $n \to \infty$ *сильно в пространстве* Y *со скоростью*

$$\|f - \overline{P}_n f\|_Y \le \sqrt{2}\omega\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_2,$$

где $\omega(f;\delta)_2$ *— модуль непрерывности функции* $f \in L_2(-1,1)$ *в пространстве* $Y = L_2(-1,1)$.

Для вычислительной схемы (0.1)–(0.2), (1.1), (1.3), (4.1)–(4.2) справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*:

а) *функции* $a(t), b(t) \in C[-1,1]$, $f(t) \in L_2[-1,1]$;

б) *задача* (0.1)–(0.2) *имеет единственное решение* $\varphi^\star \in X$ *при любой правой части* $f \in Y$.

Тогда при всех $n \in N$, *начиная с некоторого, СЛАУ* (4.2) *имеет единственное решение* $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$. *Приближенные решения* (1.3) *сходятся к точному решению* $\varphi^\star$ *в пространстве* X *со скоростью*

$$\|\varphi^\star - \varphi_n\|_X = O\Big\{\omega\Big(\varphi^{\star'};\frac{1}{n}\Big)_2\Big\}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Легко показать, что СЛАУ (4.2) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n\varphi_n \equiv \overline{P}_n A\varphi_n = \overline{P}_n f \quad (\varphi_n \in X_n, \;\; \overline{P}_n f \in Y_n).$$

Поскольку $\overline{P}_n^2 = \overline{P}_n$, а $G\varphi_n = \varphi_n' \in Y_n$, то $\overline{P}_n G\varphi_n = G\varphi_n$. Поэтому это уравнение запишется в следующем виде:

$$A_n\varphi_n \equiv G\varphi_n + \overline{P}_n T\varphi_n = \overline{P}_n f \quad (\varphi_n \in X_n, \;\; \overline{P}_n f \in Y_n). \tag{4.7}$$

Из уравнений (2.1) и (4.7) для любого $\varphi_n \in X_n$ находим

$$\|A\varphi_n - A_n\varphi_n\|_Y = \|T\varphi_n - \overline{P}_n T\varphi_n\|_Y \le \|\varphi_n\|_X \sup_{\varphi_n\in X_n,\; \|\varphi_n\|=1} \|T\varphi_n - \overline{P}_n T\varphi_n\|_Y \le$$
$$\le \|\varphi_n\|_X \sup_{\varphi\in X,\; \|\varphi\|=1} \|T\varphi - \overline{P}_n T\varphi\|_Y \equiv \sigma_n \|\varphi_n\|_X.$$

Так как в силу леммы 3 $T\mathcal{B}$ — компактное множество в пространстве Y, а сильно сходящаяся последовательность линейных операторов на компактном множестве сходится равномерно, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, $\sigma_n = \sup\limits_{\varphi\in X,\; \|\varphi\|=1} \|T\varphi - \overline{P}_n T\varphi\|_Y$. Поэтому

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n\to Y} \le \sigma_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.8}$$

Кроме того, в силу леммы 4 для правых частей уравнений (2.1) и (4.7) справедливы соотношения

$$\delta_n \equiv \|f - \overline{P}_n f\|_Y \le \sqrt{2}\omega\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_2 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.9}$$

Таким образом, учитывая (4.8), (4.9) и условие б) теоремы для уравнений (2.1) и (4.2) выполнены все условия леммы 2.1 из ([2], гл. 1). Отсюда и из леммы 4 следует требуемое утверждение.

Из теоремы 4 легко выводится

Теорема 5. *Пусть функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ таковы, что*

$$\frac{d\varphi^\star(t)}{dt} \in \operatorname{Lip}\alpha \quad (0<\alpha\le 1) \quad \text{в} \quad L_2(-1,1). \tag{4.10}$$

Тогда метод (0.1)–(0.2), (1.1), (1.3), (4.2) *сходится в пространстве X со скоростью*

$$\|\varphi^\star-\varphi_n^\star\|_X = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad 0<\alpha\le 1.$$

По аналогии с теоремой 3, но с помощью теоремы 5, доказывается

Теорема 6. *В условиях теоремы* 4 *метод сплайн-подобластей* (0.1)–(0.2), (1.1), (1.3), (4.2) *сходится в пространствах $C[-1,1]$ и $H_\beta[-1,1]$ $(0<\beta\le\frac{1}{2})$, причем при условии* (4.10) *справедливы соотношения*

$$\|\varphi^\star-\varphi_n\|_C \le \|\varphi^\star-\varphi_n\|_{H_\beta} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad 0<\alpha\le 1.$$

5. Некоторые замечания и дополнения

1. Теоремы 4–6 можно усилить, если использовать следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $a(t)\in L_2(-1,1)$ и $b_1(t)\equiv b(t)\ln(1-t)\in L_2(-1,1)$.*
Тогда оператор $T: X\to Y$, где

$$(T\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)S(\varphi;t), \quad -1<t<1,$$

является вполне непрерывным.

Доказательство. Для любой функции $\varphi\in X$ имеем

$$\|a\varphi\|_Y \le \|\varphi\|_C\|a\|_{L_2} \le \sqrt{2}\|\varphi\|_X\|a\|_{L_2}. \tag{5.1}$$

Для любой $\varphi\in X$ и любых t, $t+h\in[-1,1]$, $h>0$, последовательно находим

$$\begin{aligned}
|a(t+h)\varphi(t+h)-a(t)\varphi(t)| &\le |a(t+h)-a(t)|\,|\varphi(t+h)| + |a(t)|\,|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \le \\
&\le \|\varphi\|_C|a(t+h)-a(t)| + |a(t)|\left|\int_t^{t+h}\varphi'(\tau)d\tau\right| \le \\
&\le \sqrt{2}\|\varphi\|_X|a(t+h)-a(t)| + |a(t)|\sqrt{h}\|\varphi'\|_{L_2} \le \|\varphi\|_X\{\sqrt{2}\,|a(t+h)-a(t)| + \sqrt{h}\,|a(t)|\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|a(t+h)\varphi(t+h)-a(t)\varphi(t)\|_{L_2(-1,1-h)} &\le \|\varphi\|_X\{\sqrt{2}\omega(a;h)_2 + \sqrt{h}\|a\|_{L_2}\} \le \\
&\le \sqrt{2}\|\varphi\|_X\{\omega(a;h)_2 + \sqrt{h}\|a\|_{L_2}\}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\omega(a\varphi;\delta)_2 \le \sqrt{2}\|\varphi\|_X\{\omega(a;\delta)_2 + \sqrt{\delta}\|a\|_{L_2}\}, \quad 0<\delta\le 1. \tag{5.2}$$

Из неравенств (5.1) и (5.2) следует, что оператор $T_1: X\to Y$, где $(T_1\varphi)(t)=a(t)\varphi(t)$, является вполне непрерывным.

Для оператора $T_2: X\to Y$, где $T_2(\varphi;t)=b(t)\varphi(+1)\ln(1-t)$, $-1\le t<1$, при любой $\varphi\in X$ имеем

$$\|T_2\varphi\|_Y = |\varphi(+1)|\,\|b_1(t)\|_{L_2} \le \sqrt{2}\|\varphi\|_X\|b_1\|_Y; \quad \omega(T_2\varphi;\delta)_2 = |\varphi(+1)|\omega(b_1;\delta)_2 \le \sqrt{2}\|\varphi\|_X\omega(b_1;\delta)_2,$$

где $\omega(b_1;\delta)_2\to 0$ при $\delta\to+0$ в силу того, что $b_1\in L_2(-1,1)$.

Для оператора $T_3 : X \to Y$, где

$$T_3(\varphi;t) = \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi'(\xi)\ln|\xi - t|d\xi \equiv b(t)H(\varphi;t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{5.3}$$

при любой функции $\varphi \in X$ находим $\|T_3\varphi\|_Y = \|bH\varphi\|_Y \le \|b\|_{L_2}\|H\varphi\|_C$, где

$$\|H\varphi\|_C = \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi'(\xi)\ln|\xi - t|d\xi\right\|_C \le \frac{1}{\pi}\|\varphi'\|_{L_2}\max_{-1\le t\le 1}\sqrt{\int_{-1}^{1}\ln^2|\xi - t|d\xi} = K_3\|\varphi\|_X. \tag{5.4}$$

С другой стороны, при доказательстве леммы 2 было показано, что оператор H является вполне непрерывным как оператор из пространства X в пространство $C[-1,1]$. Из условия леммы 5 следует, что $b(t) \in L_2$. Поэтому в силу (5.3) и (5.4) оператор $T_3 : X \to Y$ является вполне непрерывным.

Поскольку $T = T_1 + T_2 + T_3 : X \to Y$ в силу леммы 1, а каждый из операторов $T_j : X \to Y$ $(i = 1,2,3)$ вполне непрерывен, то лемма 5 доказана.

2. Результаты, полученные выше, могут быть перенесены также на интегродифференциальное уравнение

$$\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau)\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t)$$

при начальном условии (0.2). Здесь $h(t,\tau)$ — известная функция такая, что порождаемый ядром

$$h_1(t,\xi) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{\xi}^{1}\frac{h(t,\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad -1 \le \xi \le 1,$$

интегральный оператор

$$U(\psi;t) = \int_{-1}^{1}h_1(t,\xi)\psi(\xi)d\xi, \quad -1 \le t \le 1,$$

является вполне непрерывным в пространстве $L_2(-1,1)$ (для метода сплайн-подобластей) и вполне непрерывным как оператор из $L_2(-1,1)$ в пространство $C[-1,1]$ (для метода сплайн-коллокации).

Литература

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 742 с.
2. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд–во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
3. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 512 с.
4. Michlin S.G., Prossdorf S. *Singuläre Integraloperatoren.* – Berlin: Akademic-Verlag, 1980. – 514 s.
5. Корнейчук Н. П. *Сплайны в теории приближения.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
6. Андриенко В.А. *Теоремы вложения для функций одного переменного* // Итоги науки. Сер. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1971. – С. 203–262.
7. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.

Казанский государственный энергетический институт

Поступила 10.04.2000