ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 8 (471)

УДК 517.55

О.В. ЯКОВЛЕВА

ДВУМЕРНЫЕ ГОМОЛОГИИ ДОПОЛНЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ В $\mathbb{C}^2$ И $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$

1. Введение

Пусть V — неприводимая алгебраическая кривая в торе $T^2=(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$ или в аффинном пространстве $\mathbb{C}^2$, заданная нулями полинома Лорана

$$P(z)=\sum_{k\in K\subset\mathbb{Z}^2} C_k z^k$$

(если V рассматривается в $\mathbb{C}^2$, то $P(z)$ не содержит отрицательных степеней переменных z_1, z_2). В работах математиков прошлого столетия, которые традиционно изучали кривые в проективной компактификации $\mathbb{CP}_2$ пространства $\mathbb{C}^2$, было обнаружено, что род гладкой кривой в $\mathbb{CP}_2$ зависит лишь от степени полинома $P(z)$ (формула Плюккера: $\rho=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, где d — степень $P(z)$ по совокупности переменных). В этой ситуации гладкость кривой выражает условие общего положения. В [1], [2] показано, что число $\rho=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ целесообразно интерпретировать как число целых точек внутренности треугольника $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1+x_2\le d\}$, которому естественным образом сопоставляется проективное пространство $\mathbb{CP}_2$. Основная идея [1] состоит в том, что кривая V (или поверхность в T^n или $\mathbb{C}^n$) может не быть кривой общего положения в $\mathbb{CP}_2$, но будет такой кривой в некоторой другой компактификации T^2 или $\mathbb{C}^2$, причем весьма удобными оказались торические компактификации, ассоциированные с многогранником Ньютона Δ полинома P. В условиях общего положения (названных в [1] Δ-невырожденностью) род V выражается через число внутренних точек многогранника Δ.

Цель статьи — выявить некоторые условия общего положения на многочлен P, при которых существует простая и эффективная формула для размерности групп гомологий $H_2(T^2\setminus V)$ и $H_2(\mathbb{C}^2\setminus V)$.

В статье рассматриваются гомологии с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$ или из кольца $\mathbb{Z}$.

Пусть $\mathbb{X}$ — гладкая торическая компактификация T^2 или $\mathbb{C}^2$ [1], [3]. Напомним, что торическое пространство $\mathbb{X}$, ассоциированное с полным веером Σ, можно трактовать как компактификацию $\mathbb{X}=T^2\cup\sum T_j$ тора T^2 при помощи “бесконечно удаленных” кривых T_j, взаимно однозначно соответствующих образующим $v_1,\dots,v_d$ веера Σ. Каждая T_j гомеоморфна сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ (проективной прямой $\mathbb{CP}_1$), а $\sum T_j$ является нормальным пересечением в $\mathbb{X}$ [1]. В случае, когда веер Σ содержит положительный октант, порожденный векторами $v_1=(1,0), v_2=(0,1)$, пространство

$$\mathbb{X}=T^2\cup\sum_{j=1}^{d}T_j=\mathbb{C}^2\cup\sum_{j=3}^{d}T_j$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96266) и Красноярского краевого фонда науки.

трактуется также как торическая компактификация пространства $\mathbb{C}^2$ [1], [4]. Под бесконечно удаленной относительно T^2 частью $\mathbb{X}$ будем понимать совокупность кривых $T_1, \dots, T_d$, а под бесконечно удаленной относительно $\mathbb{C}^2$ частью $\mathbb{X}$ будем понимать совокупность кривых $T_3, \dots, T_d$, полагая T_1 и T_2 координатными осями в $\mathbb{C}^2$.

Определение. Полином Лорана $P(z)$ назовем Σ–невырожденным, если замыкание кривой $V = \{P(z) = 0\}$ в торической компактификации $\mathbb{X}$, ассоциированной с веером Σ, составляет нормальное пересечение с бесконечно удаленной частью $\mathbb{X}$.

Далее для удобства будем использовать следующие обозначения: будем говорить, что полином P является Σ_+-невырожденным, если замыкание кривой V составляет нормальное пересечение с бесконечно удаленной относительно $\mathbb{C}^2$ частью $\mathbb{X}$, и Σ-невырожденным, если замыкание кривой V составляет нормальное пересечение с бесконечно удаленной относительно T^2 частью $\mathbb{X}$.

Обозначим через $\#\Delta^0$ и $\#\partial\Delta$ соответственно число внутренних и число граничных целочисленных точек многоугольника Ньютона Δ полинома Лорана P, а через $\#\partial\Delta_+$ — число целочисленных точек границы $\partial\Delta$, не лежащих в положительном октанте $\mathbb{Z}^2_+$. В сингулярной точке $a \in V$ через μ_a обозначим число Милнора кривой V [5].

Теорема. *Пусть $V = \{P(z) = 0\}$ — неприводимая кривая в торе T^2. Если полином P является Σ-невырожденным, то*

$$\dim H_2(T^2 \setminus V) = 2\#\Delta^0 + \#\partial\Delta - \sum_{a \in \operatorname{sing} V} \mu_a. \tag{1}$$

Пусть $V = \{P(z) = 0\}$ — неприводимая кривая в $\mathbb{C}^2$. Если полином P является Σ_+-невырожденным, то

$$\dim H_2(\mathbb{C}^2 \setminus V) = 2\#\Delta^0 + \#\partial\Delta_+ - \sum_{a \in \operatorname{sing} V} \mu_a. \tag{2}$$

Приведем два предложения о Σ-невырожденности полинома P, которые потребуются далее для доказательства теоремы о гомологиях. Первое из них есть тривиальное следствие из теоремы о разрешении особенностей ([2], с. 227) для неприводимой гиперповерхности в T^n. Результат предложения 2, недавно полученный Е. Матеровым, обобщает условие трансверсальности пересечения гиперповерхности в $\mathbb{CP}_n$ с бесконечно удаленной гиперплоскостью $\mathbb{CP}_n \setminus \mathbb{C}^n$ [6].

Предложение 1. *Полином P, определяющий гиперповерхность $V = \{z \in T^n : P(z) = 0\}$, является Σ-невырожденным, если выполняются следующие условия:*

(i) *веер Σ есть примитивное подразбиение веера, двойственного многограннику Ньютона $\Delta = \Delta(P)$;*
(ii) *для каждой срезки $P_i := \sum\limits_{k \in \partial\Delta_i} C_k z^k$, где $\partial\Delta_i$ — грань Δ, система уравнений $P_i = \frac{\partial P_i}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial P_i}{\partial z_n} = 0$ не имеет нулей в торе T^n.*

Пусть $P(z) = P(z_1, \dots, z_n) = \sum C_k z^k$ — полином, определяющий гиперповерхность V в $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{X}$ — гладкая торическая компактификация $\mathbb{C}^n$, ассоциированная с веером Σ, и $v_n, \dots, v_d$ — образующие Σ, соответствующие бесконечно удаленным гиперповерхностям в $\mathbb{X}$. *Срезкой P вдоль совокупности направлений $v_{i_1}, \dots, v_{i_s}$* назовем полином $P_I(z) := \sum\limits_{k \in \Delta_I} C_k z^k$, где через Δ_I, $I = \{i_1, \dots, i_s\} \subset \{n, \dots, d\}$, обозначено множество целочисленных точек $k \in \Delta$, для которых $\langle k, v_{i_j} \rangle = \min\limits_{x \in \Delta} \langle x, v_{i_j} \rangle$ для любого вектора v_{i_j}, $j = 1, \dots, s$. Если $\Delta_I = \emptyset$, то $P_I(z) \equiv 0$. Набор образующих веера Σ будем называть *примитивным*, если сам этот набор не образует конуса, а любое его собственное подмножество образует конус в Σ.

Предложение 2. *Полином P, определяющий гиперповерхность $V = \{z \in \mathbb{C}^n : P(z) = 0\}$, является Σ_+-невырожденным тогда и только тогда, когда для любого мультииндекса I, для которого векторы $v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}$ образуют конус в Σ, имеет место включение*

$$\left\{\frac{\partial P_I}{\partial z_1} = \cdots = \frac{\partial P_I}{\partial z_n} = 0\right\} \subset \bigcup_J \{z_{j_1} = \cdots = z_{j_p} = 0\}, \tag{3}$$

где объединение ведется по всем таким индексам $J = \{j_1, \ldots, j_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$, для которых векторы $v_{j_1}, \ldots, v_{j_p}$ дополняются векторами с индексами из I до примитивных наборов.

2. Замечания и примеры

Замечание 1. Выполнения условия (3) недостаточно для того, чтобы полином P был Σ-невырожденным, поскольку оно не обеспечивает трансверсальности пересечения V с координатными плоскостями. Для Σ-невырожденности P необходимо потребовать дополнительно, по крайней мере, чтобы многогранник Δ содержал начало координат и имел размерность $\dim \Delta = n$ [1].

Замечание 2. Для $n = 2$ и веера Σ, имеющего более трех образующих, включение (3) примет вид

$$\left\{\frac{\partial P_I}{\partial z_1} = \frac{\partial P_I}{\partial z_2} = 0\right\} \subset \begin{cases} \{z_1 = 0\}, & I = \{3\}; \\ \{z_2 = 0\}, & I = \{d\}; \\ \{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Единственная гладкая торическая компактификация пространства $\mathbb{C}^2$, ассоциированная с веером, имеющим три образующих, — это проективное пространство $\mathbb{CP}_2$. В этом случае единственная срезка $P_I(z)$ есть главная часть (однородная составляющая старшей степени) для полинома P. Согласно предложению 2 неприводимый полином P является Σ_+-невырожденным, если его главная часть P_I невырождена (т. е. если градиент $\nabla(P_I)$ обращается в нуль только в точке $z = 0$).

Пример 1. Неприводимый полином $P(z) = (z_1^p + z_2)^q + z_1 + 1$, $q > 1$, не является Σ-невырожденным ни для какого веера Σ. Это означает, что не существует торической компактификации $\mathbb{X}$, в которой замыкание кривой $V = \{z \in T^2 : P(z) = 0\}$ составляло бы трансверсальное пересечение с бесконечно удаленной частью $\mathbb{X}$.

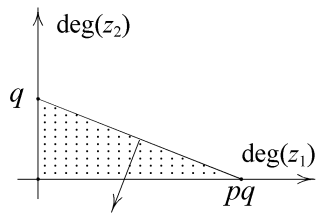

Рис. 1.

Действительно, чтобы выполнялись условия Σ-невырожденности, веер Σ должен содержать вектор v_i нормали к не лежащей на координатных осях стороне многоугольника Ньютона $\Delta = \Delta(P)$ (рис. 1). Срезка $P_i(z)$ в направлении вектора v_i имеет вид $P_i(z) = (z_1^p + z_2)^q$, и ее градиент

$$\nabla P_i(z) = \left(\frac{\partial P_i}{\partial z_1}, \frac{\partial P_i}{\partial z_2}\right) = \left(pqz_1^{p-1}(z_1^p + z_2)^{q-1}, q(z_1^p + z_2)^{q-1}\right)$$

имеет нули в торе, а именно, на кривой $z_2 = -z_1^p$.

Пример 2. Рассмотрим неприводимый полином $P(z) = z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + 1$ с многоугольником Ньютона Δ, изображенном на рисунке 2. Веер Σ_Δ, двойственный Δ, имеет образующие $v_1' = (-1,2)$, $v_2' = (2,-1)$, $v_3' = (-1,-1)$ и, очевидно, не является примитивным. Обозначим через Σ примитивное подразбиение веера Σ_Δ.

Полином $P(z)$ не является Σ-невырожденным. Действительно, простейшее примитивное подразбиение Σ веера Σ_Δ имеет девять образующих, среди которых есть векторы $v_1 = (1,0)$ и $v_2 = (0,1)$. Очевидно, условие Хованского невырожденности P (предложение 1) нарушается для срезок $P_{v_1} = P_{v_2} \equiv 1$, градиенты которых $\nabla P_{v_1} = \nabla P_{v_2} \equiv 0$.

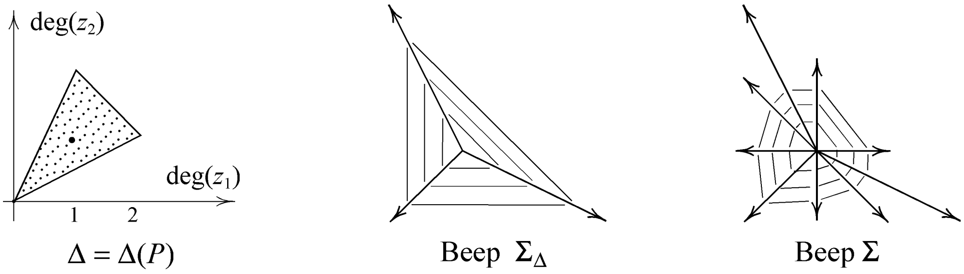

Рис. 2.

Покажем, что полином $P(z) = z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + 1$ является Σ-невырожденным для веера Σ с образующими $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (-1,-1)$, ассоциированного с проективным пространством $\mathbb{CP}_2$. Действительно, замыкание кривой $V = \{z \in T^2 : P(z) = 0\}$ в $\mathbb{CP}_2$ не пересекает координатных прямых $\{z_1 = 0\}$ и $\{z_2 = 0\}$, а бесконечно удаленную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{CP}_2 \setminus \mathbb{C}^2$ пересекает трансверсально. Для доказательства последнего согласно замечанию 2 достаточно рассмотреть срезку $P_3 = z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2$ полинома P в направлении вектора $v_3 = (-1,-1)$. Ее градиент $\nabla(P_3) = (z_2(2z_1 + z_2), z_1(2z_2 + z_1))$ обращается в нуль только при $z_1 = z_2 = 0$.

Вычислим для данного примера размерности групп гомологий $H_2(\mathbb{C}^2 \setminus V)$ и $H_2(\mathbb{T}^2 \setminus V)$. Нетрудно убедиться, что кривая V гладкая и, значит, последнее слагаемое в формулах (1) и (2) равно нулю. Числа $\#\Delta^0$, $\#\partial\Delta$ и $\#\partial\Delta_+$ равны соответственно 1, 3 и 2. По формулам (1) и (2) находим, что $\dim H_2(\mathbb{C}^2 \setminus V) = 4$, $\dim H_2(\mathbb{T}^2 \setminus V) = 5$.

Замечание 3. Теорема обобщает результат работы [6], который состоит в том, что *если многочлен P степени q неприводим и Σ_+-невырожден для веера Σ, ассоциированного с 2-мерным проективным пространством $\mathbb{CP}_2$, то*

$$\dim H_2(\mathbb{C}^2 \setminus V) = (q-1)^2 - \sum_{a \in \operatorname{sing} V} \mu_a.$$

Последняя формула получается из (2), поскольку при условии Σ-невырожденности P многоугольник $\Delta = \Delta(P)$ имеет вид обычного симплекса либо симплекса, “подрезанного” с одной или с двух сторон (рис. 3).

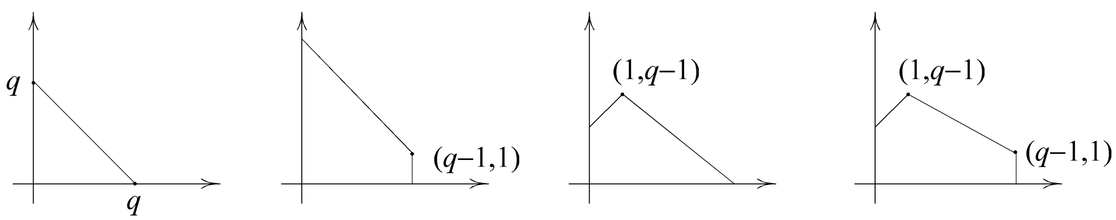

Рис. 3.

В любом случае $2\#\Delta^0 + \#\partial\Delta_+ = (q-1)^2$.

3. Доказательство теоремы

Пусть $\mathbb{X}$ — гладкая торическая компактификация T^2 или $\mathbb{C}^2$.

Лемма 1. *Если дополнение $\mathbb{X} \setminus S$ к связной алгебраической кривой $S \subset \mathbb{X}$ является многообразием Штейна, то*

$$\dim H_2(\mathbb{X} \setminus S) = \sum_{j=1}^{m} 2\rho_j + \sum_{i=1}^{l} (q_i - 1) + (p - m + 1), \tag{4}$$

где m — число неприводимых компонент кривой S, ρ_j — геометрический род j-й неприводимой компоненты S, q_i — число элементов S, пересекающихся в i-й точке самопересечения, число p вычисляется по формуле $p = d - 2 - \operatorname{rang} \|(S_j \cdot T_i)\|$, где $\|(S_j \cdot T_i)\|$ — матрица, составленная из кратностей пересечения j-й неприводимой компоненты кривой S с i-й образующей T_i группы $H_2(\mathbb{X})$.

Доказательство. Обозначим через $\operatorname{sing} S = \{a_1, \ldots, a_l\}$ множество особых точек кривой S. Дополнение $\widehat{S} = S \setminus \operatorname{sing} S$ является подмногообразием размерности 1 в многообразии $\widehat{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \setminus \operatorname{sing} S$, поэтому для пары $\widehat{\mathbb{X}}$, $\widehat{S}$ справедлива точная последовательность Лере

$$\cdots \to H_3(\widehat{\mathbb{X}} \setminus \widehat{S}) \xrightarrow{i_*} H_3(\widehat{\mathbb{X}}) \xrightarrow{\omega_*} H_1(\widehat{S}) \xrightarrow{\delta_*} H_2(\widehat{\mathbb{X}} \setminus \widehat{S}) \xrightarrow{i_*} H_2(\widehat{\mathbb{X}}) \xrightarrow{\omega_*} H_0(\widehat{S}) \to \cdots$$

Напомним, что δ_* — кограничный гомоморфизм Лере, ω_* индуцирован трансверсальным пересечением цепей в $\widehat{\mathbb{X}}$ с подмногообразием $\widehat{S}$, а i_* — гомоморфизм, индуцированный вложением [7]. Указанная последовательность содержит интересующую нас группу $H_2(\mathbb{X} \setminus S)$, поскольку $\widehat{\mathbb{X}} \setminus \widehat{S} = \mathbb{X} \setminus S$.

Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to (H_1(\widehat{S})/\omega_*(H_3(\widehat{\mathbb{X}}))) \xrightarrow{\delta_*} H_2(\mathbb{X} \setminus S) \xrightarrow{i_*} \ker \omega_* \to 0.$$

Из штейновости дополнения $\mathbb{X} \setminus S$ следует, что группа $H_3(\widehat{\mathbb{X}} \setminus \widehat{S})$ тривиальна ([8], с. 221). Тогда $\omega_* : H_3(\widehat{\mathbb{X}}) \to H_1(\widehat{S})$ – мономорфизм и, значит, размерность группы $H_2(\mathbb{X} \setminus S)$ равна $\dim H_1(\widehat{S}) - \dim H_3(\widehat{\mathbb{X}}) + p$ (где p — размерность ядра гомоморфизма ω_*) и равна правой части формулы (4). Действительно, $\mathbb{X}$ является компактным многообразием вещественной размерности 4. Любое гладкое комплексное торическое многообразие допускает клеточное разбиение, не содержащее клеток нечетной размерности, поэтому нечетномерные гомологии самого многообразия тривиальны. Следовательно, в дополнении $\widehat{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \setminus \operatorname{sing} S$ трехмерную группу гомологий порождают сферы малого радиуса вокруг точек $a_i \in \operatorname{sing} S$. Среди этих сфер имеется лишь одна гомологическая зависимость: их сумма тривиальна. Таким образом, $\dim H_3(\widehat{\mathbb{X}}) = l - 1$. Подмногообразие $\widehat{S}$ гомеоморфно объединению $Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$, полученному из топологической суммы римановых поверхностей алгебраических функций, определенных уравнениями $P_j(z_1, z_2) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, где m — число неприводимых компонент полинома P, удалением $\sum q_i$ точек. Число гомологически независимых циклов на каждой компоненте Q_j равно $2\rho_j + \sum\limits_{i=1}^{l_j} q_{ij} - 1$, где l_j — количество точек, удаленных с j-й римановой поверхности. Отсюда

$$\dim H_1(\widehat{S}) = \sum_{j=1}^{m} \left(2\rho_j + \sum_{i=1}^{l_j} q_{ij} - 1 \right) = \sum_{j=1}^{m} 2\rho_j + \sum_{i=1}^{l} q_i - m.$$

Суммирование полученных для размерностей выражений дает правую часть формулы (4).

Покажем, что размерность p ядра гомоморфизма $\omega_* : H_2(\widehat{\mathbb{X}}) \to H_0(\widehat{S})$ вычисляется по формуле $p = d - \operatorname{rang} \|(S_i \cdot T_j)\|$. Группа $H_0(\widehat{S})$ изоморфна $\mathbb{Z}^m$, где m — число неприводимых компонент S. Согласно формуле для размерности четномерной группы $H_{2k}(\mathbb{X})$, приведенной в ([3], с. 92), в двумерном случае $\dim H_2(\mathbb{X}) = d - 2$. Образующими в $H_2(\mathbb{X})$ служат классы гомологий

$[T_j]$, $j=1,\dots,d-2$, бесконечно удаленных алгебраических кривых T_j. Группы $H_2(\mathbb{X})$ и $H_2(\widehat{\mathbb{X}})$ изоморфны, поскольку удаление конечного числа точек из $\mathbb{X}$ не меняет его двумерную группу гомологий и, значит, $H_2(\widehat{\mathbb{X}}) \simeq \mathbb{Z}^{d-2}$. Очевидно, ядро гомоморфизма ω_* имеет ту же размерность, что и ядро линейного преобразования $L : \mathbb{Z}^{d-2} \longrightarrow \mathbb{Z}^m$. Гомоморфизм L достаточно определить на образующих $e_j = (0,\dots,\underset{j}{1},\dots,0)$ группы $\mathbb{Z}^{d-2}$. Положим $L(e_j) = ((S_1 \cdot T_j),\dots,(S_m \cdot T_j))$, $j=1,\dots,d-2$. Тогда размерность ядра L равна $d - \operatorname{rang}\|(S_i \cdot T_j)\|$. $\square$

Пусть $\overline{V}$ — замыкание неприводимой кривой V в $\mathbb{X}$, $\sum T_j$ — бесконечно удаленная относительно T^2 или $\mathbb{C}^2$ часть $\mathbb{X}$. Рассмотрим дополнение $\mathbb{X}\setminus S$ к кривой вида $S = \overline{V} \cup \sum T_j$. Заметим, что если кривая V задана в торе T^2, то дополнение $\mathbb{X}\setminus S = \mathbb{X}\setminus \Big(\overline{V} \cup \sum\limits_{j=1}^{d} T_j\Big) = T^2 \setminus V$. Аналогично, если $V \subset \mathbb{C}^2$, то $\mathbb{X}\setminus S = \mathbb{X}\setminus \Big(\overline{V} \cup \sum\limits_{j=3}^{d} T_j\Big) = \mathbb{C}^2 \setminus V$.

В обоих случаях $\mathbb{X}\setminus S$ — многообразие Штейна, поэтому для $\dim H_2(\mathbb{X}\setminus S)$ справедлива формула (4). Указанная формула может быть преобразована к виду

$$\dim H_2(\mathbb{X}\setminus S) = 2\rho + \sum_{a\in \operatorname{sing} V}(r_a - 1) + \sum_{j=1}^{k}(\overline{V}\cdot T_j) + \Big(\sum_{i,j}(T_i\cdot T_j) - k\Big), \tag{5}$$

где ρ — геометрический род кривой V, r_a — число локально неприводимых компонент кривой V в точке $a \in \operatorname{sing} V$, $k = d$, если $V \subset T^2$, и $k = d-2$, если $V \subset \mathbb{C}^2$.

Действительно, поскольку все T_j имеют род 0, в сумме $\sum 2\rho_j$ ненулевым будет только слагаемое 2ρ. Заметим, что суммирование в $\sum(q_i - 1)$ ведется по сингулярным точкам кривой V в торе T^2 (или аффинном пространстве $\mathbb{C}^2$), точкам пересечения a_j кривой $\overline{V}$ с кривыми T_j и, наконец, по точкам пересечения T_j (в каждой из которых пересекаются ровно две кривые). Имеем равенство

$$\sum(q_i - 1) = \sum_{a\in \operatorname{sing} V}(r_a - 1) + \sum_{a_j \in \{\overline{V}\cap T_j\}}(q_{a_j} - 1) + \sum_{i,j}(T_i\cdot T_j),$$

в котором второе слагаемое в силу Σ-невырожденности P равно $\sum(\overline{V}\cdot T_j)$. Покажем, что $p - m + 1 = -k$. Так как V неприводима, то $m = k+1$. Известно, что в $\mathbb{X}$ всегда можно выбрать базис $\{\widetilde{T}_i\}$, $i = 1,\dots,d-2$, группы $H_2(\mathbb{X})$ так, что $(T_j \cdot \widetilde{T}_i) = \delta_{ji}$ [9], следовательно, $\operatorname{rang}\|(S_j\cdot \widetilde{T}_i)\| = d-2$ и $p = 0$.

Подстановка полученных соотношений в (4) дает формулу (5).

Лемма 2. *Пусть $V = \{P(z) = 0\}$, полином P неприводим и Σ-невырожден. Если ρ — геометрический род кривой V, r_a — число локально неприводимых компонент V в точке $a \in \operatorname{sing} V$, μ_a — число Милнора в точке $a \in \operatorname{sing} V$, то*

$$2\rho + \sum(r_a - 1) = 2\#\Delta^0 - \sum \mu_a. \tag{6}$$

Доказательство. Геометрический род ρ кривой V связан с арифметическим родом π по формуле $\rho = \pi - \sum\limits_a \delta_a$, где δ_a — это размерность фактора $\pi_*\mathcal{O}_a/\mathcal{O}_a$, $\pi : \widetilde{V}_a \to V_a$ — нормализация ростка V_a кривой V в точке a, $\mathcal{O}_a$ — кольцо ростков голоморфных функций в точке a ([10], гл. IV, пп. 5, 7).

Арифметический род π совпадает с геометрическим родом нормализации кривой $\overline{V}$ и согласно ([1], § 2) при условии неприводимости и Σ-невырожденности P равен $\#\Delta^0$. Согласно формуле Милнора ([5], с. 91)

$$\sum_a \delta_a = \frac{1}{2}\sum_a(\mu_a + r_a - 1).$$

Формула (6) получается в результате подстановки $\sum_a \delta_a = \pi - \rho = \#\Delta^0 - \rho$ в указанную формулу Милнора. $\square$

Лемма 3. *Пусть $\overline{V}$ — замыкание кривой $V = \{P(z) = 0\}$ в гладкой торической компактификации $\mathbb{X}$, ассоциированной с веером Σ. Если P неприводим и Σ-невырожден или Σ_+-невырожден, то $(\overline{V} \cdot T_j) = 0$ либо $(\overline{V} \cdot T_j) = \#\Delta_j^0 + 1$, где $\#\Delta_j^0$ — число внутренних целочисленных точек на грани $\Delta_j := \{k = (k_1, k_2) \in \Delta : \langle k, v_j \rangle = \min\limits_{x \in \Delta} \langle x, v_j \rangle\}$.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathbb{X} = T^2 \cup \sum T_j$, v_j — образующая веера Σ, соответствующая бесконечно удаленной кривой T_j, $j = 1, \ldots, d$. Рассмотрим 2-мерный конус σ из Σ, натянутый на векторы v_j, v'. В локальной карте $\mathcal{U}_\sigma$ переменных $w = (w_1, w_2)$ полином, определяющий кривую $\overline{V}$, имеет вид

$$P(w) = \sum C_k w^{\langle v, k \rangle - \alpha} = \sum C_k w_1^{\langle v_j, k \rangle - \alpha_1} w_2^{\langle v', k \rangle - \alpha_2},$$

где α_1, α_2 — значения опорной функции $H_\Delta(v) := \min\limits_{x \in \Delta} \langle x, v \rangle$ соответственно на векторах v_j и v'. Таким образом, при переходе к $\mathcal{U}_\sigma$ степени мономов z^k преобразуются по правилу: точка с координатами (k_1, k_2) переходит в точку с координатами $(\langle k, v_j \rangle - \alpha_1, \langle k, v' \rangle - \alpha_2)$. В $\mathcal{U}_\sigma$ кривая T_j задается уравнением $w_1 = 0$ ([4], сс. 705, 707). Поскольку P по условию Σ-невырожден, то индекс пересечения $(\overline{V} \cdot T_j)$ равен числу корней $P(0, w_2)$, т. е. $\deg_{w_2}(P(0, w_2))$.

Если Δ_j — сторона Δ, то число корней $P(0, w_2)$ равно $\langle k, v' \rangle - \alpha_2$, что на единицу больше количества внутренних точек на стороне Δ_j. Действительно, точка с координатами $(0, \langle k, v' \rangle - \alpha_2)$ — это вершина многоугольника $\Delta(P(w))$, лежащая на оси $\deg w_2$. Прообразом отрезка с концами в точках $(0, 0)$ и $(0, \langle k, v' \rangle - \alpha_2)$ является отрезок с концами в точках k' и k'' таких, что $\langle k', v_j \rangle = \langle k'', v_j \rangle = -\alpha_1$, т. е. сторона многоугольника Δ, имеющая нормаль v_j.

Пусть теперь Δ_j — вершина Δ. Покажем, что $(\overline{V} \cdot T_j) = 0$. Действительно, в силу Σ-невырожденности P (предложение 1) вектор v' является вектором внутренней нормали к стороне $\Delta_{v'}$ с концом в Δ_j либо имеет место $\Delta_{v'} = \Delta_j$. В обоих случаях одновременный минимум скалярных произведений $\langle v_j, k \rangle$ и $\langle v', k \rangle$, $k \in \Delta$, достигается в точке Δ_j с координатами (k_1, k_2). При переходе к локальной карте $\mathcal{U}_\sigma$ моном степени (k_1, k_2) переходит в моном степени $(0, 0)$, а степень любого другого монома в $P(w)$ по переменной w_1 будет строго больше нуля. Следовательно, $P(0, w_2)$ не имеет корней в $\mathcal{U}_\sigma$ и $(\overline{V} \cdot T_j) = 0$.

2. Рассмотрим замыкание кривой $V = \{z \in \mathbb{C}^2 : P(z) = 0\}$ в торической компактификации $\mathbb{X}$ пространства $\mathbb{C}^2$. Предположим, что $P(z)$ является Σ_+-невырожденным для веера Σ, ассоциированного с $\mathbb{X}$. Из Σ_+-невырожденности P в силу предложения 2 следует, что для любых векторов v_i, v_{i+1}, $i = 3, \ldots, d-1$, срезка $P_{i,i+1} \not\equiv 0$ и, значит, одновременный минимум скалярных произведений $\langle v_i, x \rangle$ и $\langle v_{i+1}, x \rangle$, $x \in \Delta$, достигается на некоторой вершине многоугольника Δ. Воспроизводя для произвольного вектора $v_j \in \{v_4, \ldots, v_{d-1}\}$ рассуждения п. 1 доказательства, получаем, что для $j = 4, \ldots, d-1$ индекс пересечения $(\overline{V} \cdot T_j) = 0$, если Δ_j — вершина Δ, и $(\overline{V} \cdot T_j) = \#\Delta_j^0 + 1$, если Δ_j — сторона Δ. Нетрудно убедиться, что аналогичное справедливо и для векторов v_3, v_d в случаях, когда они являются нормалями к сторонам Δ либо когда Δ_3, Δ_d — вершины Δ, лежащие на координатных осях.

Пусть Δ_3, Δ_d — вершины Δ, не лежащие на координатных осях. Покажем, что $(\overline{V} \cdot T_3) = (\overline{V} \cdot T_d) = 1$. Поскольку P — Σ_+-невырожденный полином, то согласно предложению 2 для срезки $P_d = C_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ в направлении вектора v_d должно выполняться включение

$$\left\{ \frac{\partial P_I}{\partial z_1} = \frac{\partial P_I}{\partial z_2} = 0 \right\} \subset \{z_2 = 0\}.$$

Градиент ∇P_d имеет вид $\left(k_1 C_k z_1^{k_1 - 1} z_2^{k_2}, k_2 C_k z_1^{k_1} z_2^{k_2 - 1}\right)$, откуда следует, что $k_1 = 1$, и, значит, вершина Δ_d имеет координаты $(1, k_2)$. Рассмотрим локальную карту $\mathcal{U}_\sigma$, соответствующую конусу σ с образующими $v_1 = (1, 0)$ и v_d. Моном степени (k_1, k_2) от переменных z при переходе к переменным w будет иметь степень $(k_1, \langle k, v_d \rangle - \alpha_2)$, причем $\langle k, v_d \rangle - \alpha_2 > 0$ для всех k, за исключением точки $k=(1,k_2)$, которая перейдет в точку с координатами $(1,0)$. Индекс пересечения $(\overline{V}\cdot T_d)$ равен $\deg_{w_1} P(w_1,0)=\#\Delta_d^0+1=1$. Аналогично $(\overline{V}\cdot T_3)=\#\Delta_3^0+1$.

В заключение заметим, что грани Δ с координатами вершин $(0,0)$, $(1,k_2)$ и $(1,0)$, $(1,k_2)$ не содержат внутренних целых точек, поэтому можно считать, что $(\overline{V}\cdot T_3)$ и $(\overline{V}\cdot T_d)$ — числа, на единицу большие количества целых точек на указанных сторонах Δ. $\square$

Пусть $\mathbb{X}$ — компактификация тора T^2. Вычислим $\sum(\overline{V}\cdot T_j)$, $j=1,\dots,d$. Заметим, что для каждой стороны Δ_i многоугольника Δ найдется двойственный вектор v_{j_i} из множества образующих веера Σ. Обозначим через q количество сторон в многоугольнике Δ. Тогда согласно лемме 3

$$\sum_{j=1}^{d}(\overline{V}\cdot T_j)=\sum_{i=1}^{q}(\overline{V}\cdot T_{j_i})=\sum_{i=1}^{q}\#\Delta_i^0+q=\#\partial\Delta. \tag{7}$$

Пусть $\mathbb{X}$ — компактификация $\mathbb{C}^2$. Как видно из доказательства леммы 3, сумма $\sum(\overline{V}\cdot T_j)$, $j=3,\dots,d$, складывается из количеств целочисленных точек на q сторонах Δ, не лежащих на координатных осях, следовательно,

$$\sum_{j=3}^{d}(\overline{V}\cdot T_j)=\sum_{i=1}^{q}(\#\Delta_i^0+1)=\#\partial\Delta_{+}+1. \tag{8}$$

Формулы (1), (2) получаются при подстановке в (5) соотношений (7), (8) и равенства (6) из леммы 2 с учетом того, что последнее слагаемое в формуле (5) равно -1 в случае $k=d-2$ и 0, если $k=d$.

Литература

1. Хованский А. Г. *Многогранники Ньютона и род полных пересечений* // Функц. анализ и его прилож. – 1978. – Т. 12. – Вып. 1. – С. 51–61.
2. Хованский А. Г. *Многогранники Ньютона (разрешение особенностей)* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 22. – С. 207–239.
3. Fulton W. *Introduction to toric varieties* // Ann. of Math. Studies: Princeton Univ. Press, 1993. – V. 131. – 180 p.
4. Яковлева О.В. *О штейновости дополнения алгебраической гиперповерхности в торическом многообразии* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 3. – С. 703–713.
5. Милнор Дж. *Особые точки комплексных гиперповерхностей.* – М.: Мир, 1971. – 128 с.
6. Алякринский А.А., Цих А.К. *О когомологиях рациональных дифференциальных форм степени n в пространстве $\mathbb{C}^n$* // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43. – № 4. – С. 522 – 531.
7. Лере Ж. *Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии.* – М.: Ин. лит., 1961. – 140 с.
8. Грауэрт Г., Реммерт Р. *Теория пространств Штейна.* – М.: Наука, 1989. – 335 с.
9. Южаков А.П., Южаков О.И. *Двойственные базы гомологий в торическом многообразии* // Межвуз. сб. Комплексный анализ и математическая физика. – Красноярск, 1998. – С. 257–264.
10. Серр Ж. П. *Алгебраические группы и поля классов.* – М.: Мир, 1968. – 136 с.

Красноярский государственный университет

Поступила 15.06.1999