ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 12 (451)

УДК 519.854

А.С. СТРЕКАЛОВСКИЙ, А.А. КУЗНЕЦОВА

О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА В ЗАДАЧЕ ВЫПУКЛОЙ МАКСИМИЗАЦИИ НА ДОПУСТИМОМ МНОЖЕСТВЕ

1. Введение

В последние годы невыпуклые задачи оптимизации обращают на себя все большее внимание, в частности, ввиду широкого поля приложений [1]–[6]. Примером является задача выпуклой максимизации [4]–[9]

$$f(x) \to \max, \quad x \in D, \tag{1}$$

где $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ и $D \subset R^n$ выпуклы. Несмотря на внешнюю простоту, эта задача оказывается сложной как для исследований, так и, главное, для численного решения, поскольку в ней может существовать большое количество локальных максимумов, не являющихся глобальными [1]–[9]. Поэтому для подобных задач считается естественным применение популярных методов ветвей и границ, отсечений, погружений и т. п. В отличие от этих подходов в работах [8]–[11] методы глобального поиска основаны на теории необходимых и достаточных условий глобальной оптимальности.

Естественным выглядит вопрос о глобальной сходимости таких алгоритмов. Теоремы сходимости дают, по-видимому, определенную теоретическую поддержку численным экспериментам ([1], с. 415–420; [3], с. 40–42). Поэтому основной целью данной статьи является доказательство теоремы сходимости алгоритма глобального поиска, предлагаемого ниже, для задачи (1). Для этого используется вводящееся здесь понятие разрешающего набора. Ранее [9] подобная теорема была доказана только для квадратичной задачи. К тому же некоторые требования из [9] удалось значительно ослабить. Для задачи (1) доказана также сходимость метода локального подъема.

2. Метод локального подъема

В дальнейшем будем считать, что в задаче (1) функция $f : R^n \to R$ является выпуклой и дифференцируемой в некоторой (открытой) области Q, содержащей допустимое множество и множество Лебега функции $f(\cdot)$ вида $L(f) = \{x \in R \mid f(x) \leq \sup(f, D)\}$. При этом предполагается, что функция $f(\cdot)$ ограничена сверху на D

$$\sup(f, D) \triangleq f_* < +\infty. \tag{2}$$

Как известно ([3], теорема 1, с. 179), условие

$$\langle \nabla f(z), x - z \rangle \leq 0 \ \ \forall x \in D \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00043).

локального максимума в задаче (1) не является достаточным для глобальности максимума в допустимой точке $z \in D$. Эта точка является стационарной или критической (т. е. удовлетворяющей условию (3)), если она является решением линеаризованной в точке z задачи

$$\langle \nabla f(z), x \rangle \uparrow \max, \quad x \in D.$$

Приведем простейшую вычислительную процедуру, основанную на решении линеаризованной задачи. Пусть дана числовая последовательность $\{\delta_s\}$, $\delta_s > 0$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, и допустимая точка $p^0 \in D$. Последовательность $\{p^s\}$ будем строить по правилу

$$p^{s+1} \in D: \ \langle \nabla f(p^s), p^{s+1} \rangle + \delta_s \geq \sup_{x \in D} \langle \nabla f(p^s), x \rangle. \tag{4}$$

Оказывается, такая простая вычислительная процедура при сделанных предположениях в задаче (1) генерирует последовательность, сходящуюся к стационарной точке в следующем смысле.

Предложение 1. *Пусть функция f выпукла и непрерывно дифференцируема на открытой области Q и ограничена сверху на допустимом множестве D, и пусть $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \delta_s < +\infty$. Тогда последовательность $\{p^s\}$, генерируемая по правилу (4), удовлетворяет условию*

$$\lim_{s \to +\infty} [\sup_{x \in D} \langle \nabla f(p^s), x - p^s \rangle] = 0. \tag{5}$$

В случае ограниченности множества D любая предельная точка z последовательности $\{p^s\}$ удовлетворяет условию оптимальности (3).

Доказательство. Из (4) с учетом выпуклости функции $f(\cdot)$ следует

$$0 \leq \sup_{x \in D} \langle \nabla f(p^s), x - p^s \rangle \leq \langle \nabla f(p^s), p^{s+1} - p^s \rangle + \delta_s \leq f(p^{s+1}) - f(p^s) + \delta_s. \tag{6}$$

Отсюда

$$f(p^s) \leq f(p^{s+1}) + \delta_s.$$

Последнее неравенство вместе с (2) и условием $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \delta_s < +\infty$ гарантирует ([1], лемма 2.3.2), что числовая последовательность $\{f(p^s)\}$ сходится. Поэтому из (6) следует (5). А тогда последнее утверждение предложения становится очевидным.

Замечание 1. Как известно (напр., [1], с. 291–298), процедура из (4) входит в стандартные градиентные методы выпуклой оптимизации для нахождения вспомогательной точки $\overline{x}^k$, с помощью которой затем, скажем, составлением выпуклой комбинации $x(\alpha) = \alpha \overline{x}^k + (1-\alpha) x^k$ поиск следующей точки x^{k+1} сводится к одномерной минимизации функции $\varphi(\alpha) \triangleq f(x(\alpha))$ по параметру α. В методе (4) сложный одномерный поиск исключается, результат оказывается тот же — стационарная точка. В выпуклой задаче стационарная точка уже будет глобальным решением, в то время как в задаче (1) это не так.

Замечание 2. При реальном счете может быть использовано несколько критериев останова метода (4) от очень жесткого

$$\|p^{s+1} - p^s\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|\nabla f(p^s)\|}$$

до более слабых

$$f(p^{s+1}) - f(p^s) \leq \varepsilon/2, \quad \langle \nabla f(p^s), p^{s+1} - p^s \rangle \leq \varepsilon/2,$$

где ε — заданная точность. При этом из (6) легко получить, что при $\delta_s \leq \varepsilon/2$ точка p^s оказывается ε-критической.

3. Стратегия глобального поиска

Для задачи (1) справедливы следующие необходимые и достаточные условия глобальности решения.

Теорема 1 ([8], [9]). *Пусть D выпукло, $z \in D$ и, кроме того,*

$$-\infty \le \inf(f, D) < f(z) < +\infty. \tag{7}$$

Тогда, для того чтобы z было глобальным решением задачи (1), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{gathered} \forall y \in D: \ f(y) = f(z), \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle \le 0 \ \ \forall x \in D. \end{gathered} \tag{8}$$

Замечание 3. Нетрудно видеть, что условие (8) связано с классической теорией экстремума. Полагая $y = z$ в (8), получаем (3). Отметим, что использование в условии (8) только допустимых y было предложено в [7]. С другой стороны, доказательство теоремы 1 [8], [9] демонстрирует так называемое алгоритмическое свойство условия оптимальности (8), т. е. если условие оптимальности нарушено, то можно построить допустимую точку лучшую, чем исследуемая. Нетрудно видеть, что все классические условия оптимальности (в частности (3)) обладают алгоритмическим свойством. Используя это свойство, можно предложить алгоритм глобального поиска в задаче (1).

С помощью функции

$$\varphi(z) = \sup_{x,y} \{ \langle \nabla f(y), x - y \rangle \mid x, y \in D, \ f(y) = f(z) \}$$

условие (8) можно преобразовать [9] к виду $\varphi(z) \le 0$. Иначе говоря, для проверки этого условия необходимо уметь решать задачу

$$\langle \nabla f(y), x - y \rangle \uparrow \sup_{x,y}, \quad x, y \in D, \quad f(y) = f(z). \tag{9}$$

Поскольку задача совместной по x и y максимизации представляется достаточно трудной, предлагается ее разбить на три более простые задачи. Первая — задача максимизации по x

$$\langle \nabla f(y), x \rangle \uparrow \max_x, \quad x \in D, \tag{10}$$

где точка y такая, что $f(y) = f(z)$, будет называться линеаризованной задачей, а вторая — максимизация по v при фиксированном $u \in D$

$$\langle \nabla f(v), u - v \rangle \uparrow \max_v, \quad f(v) = f(z), \tag{11}$$

— задачей уровня. Поэтому совершенно естественными выглядят следующие предположения.

(HL): для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $y \in D : f(y) \ge \inf(f, D)$ можно приближенно решить линеаризованную задачу (10), т. е. отыскать элемент $u = u(\varepsilon, y) \in D$, для которого $\langle \nabla f(y), u \rangle \ge \sup\limits_{x \in D} \langle \nabla f(y), x \rangle - \varepsilon$.

(HU): $\forall \varepsilon > 0 \ \forall u \in D \ \forall \zeta \in R : \inf(f, D) \le \zeta \le \sup(f, D)$ можно приближенно решить задачу уровня (11) при $\zeta = f(z)$, т. е. отыскать элемент $\omega \in R^n : f(\omega) = \zeta$ такой, что $\langle \nabla f(\omega), u - \omega \rangle + \varepsilon \ge \sup\limits_v \{ \langle \nabla f(v), u - v \rangle : \ f(v) = \zeta \}$.

Отметим, что для квадратичной функции задача уровня решается аналитически [9].

Нетрудно видеть, что последовательное решение задач (10) и (11) не приводит, вообще говоря, к решению задачи (9) совместной максимизации по x и y. Поэтому возникает третья задача — задача выбора семейства точек y^i, $i = 1, \dots, N$, на поверхности уровня $f(x) = f(z) \triangleq \zeta$, или, как будет говориться в дальнейшем, задача аппроксимации поверхности уровня.

Пусть даны некоторый элемент $z \in D$ и число $\varepsilon > 0$. Обозначим $\zeta \triangleq f(z)$. Рассмотрим аппроксимацию

$$\Re(\zeta) = \{v^1, \dots, v^N \in R^n : \ f(v^i) = \zeta, \ i = 1, \dots N, \ N = N(\zeta)\}. \tag{12}$$

Согласно предположению (HL) $\forall i = 1, \dots, N$ определим $u^i \in D$ так, чтобы

$$\langle \nabla f(v^i), u^i \rangle \geq \sup_{x \in D} \langle \nabla f(v^i), x \rangle - \varepsilon, \tag{13}$$

а затем согласно предположению (HU) $\forall i = 1, \dots, N$ определим элементы $\omega^i \in R^n : f(\omega^i) = f(z)$ из условия

$$\langle \nabla f(\omega^i), u^i - \omega^i \rangle + \varepsilon \geq \sup_v \{\langle \nabla f(v), u^i - v \rangle : \ f(v) = \zeta\}. \tag{14}$$

Определение 1. Набор $\Re(\zeta)$ назовем сильно ε-разрешающим, если из того, что z не является ε-решением задачи (1), т. е.

$$f(z) < \sup(f, D) - \varepsilon, \tag{15}$$

следует выполнение неравенств

$$\text{i)} \ \ \eta(\zeta, \varepsilon) \triangleq \langle \nabla f(\omega^j), u^j - \omega^j \rangle = \max_{1 \leq i \leq N} \langle \nabla f(\omega^i), u^i - \omega^i \rangle > 0; \tag{16}$$

$$\text{ii)} \ \ \eta(\zeta, \varepsilon) \geq \langle \nabla f(y), p - y \rangle - 2\varepsilon, \tag{17}$$

где p — некоторый допустимый элемент ($p \in D$), для которого

$$f(p) \geq f(z) + \theta[\sup(f, D) - f(z)] - \varepsilon, \tag{18}$$

а число θ не зависит от z и ε. При этом $0 < \theta < 1$, и элемент $y \in R^n$ определяется из условий $f(y) = f(z)$,

$$\langle \nabla f(y), p - y \rangle \geq \|\nabla f(y)\| \, \|p - y\| - \varepsilon. \tag{19}$$

Замечание 4. Если найдется p, удовлетворяющее (18), то существование $y : \ f(y) = f(z)$, удовлетворяющего (19), вытекает из предположения (HU) о решении задачи (11), т. к.

$$\langle \nabla f(v), p - v \rangle \leq \|\nabla f(v)\| \, \|p - v\| \ \ \forall v \in Q.$$

Лемма 1. *Пусть существует допустимый элемент* $p \in D : \ f(p) \leq f(z) + 2\varepsilon$, *для которого выполнено* (18). *Тогда из неравенства* (16) *следует* (17).

Доказательство. $\forall v : \ f(v) = f(z)$ имеем

$$\langle \nabla f(v), p - v \rangle \leq f(p) - f(v) = f(p) - f(z) \leq 2\varepsilon.$$

Кроме того, из (16) следует

$$\langle \nabla f(v), p - v \rangle - 2\varepsilon \leq 0 < \eta(\zeta, \varepsilon),$$

т. е. (17) тоже имеет место, что и требовалось.

Определение 2. Пусть заданы числа $\varepsilon > 0$ и ζ. Рассмотрим аппроксимацию

$$W(\zeta) = \{v^1, \dots, v^N \in R^n : f(v^i) = \zeta, \ i = 1, \dots, N, \ N = N(\zeta)\}.$$

Построим точки $u^i \in D$ и $w^i : \ f(w^i) = \zeta$ в соответствии с формулами (13) и (14). Будем называть набор $W(\zeta)$ слабо (или просто) ε-разрешающим, если из неравенства (15) следует только (16).

Предложение 2. *Если* $\forall \varepsilon > 0$ *и* $\forall \lambda \in R, \ \ \inf(f, D) \leq \lambda < \sup(f, D)$, *существует процедура построения слабо ε-разрешающего набора* $W(\lambda, \varepsilon)$, *то*

$$\forall z \in D, \ \ \sup(f, D) - \varepsilon > f(z) \geq \inf(f, D),$$

можно построить и сильно ε-разрешающий набор $\Re(\zeta)$, *где* $\zeta = f(z)$.

Доказательство. Пусть $z \in D$, $f(z) \geq \inf(f, D)$, $\varepsilon > 0$. Предположим, что z не является ε-решением задачи (1), т. е. справедливо (15). Положим

$$\lambda \triangleq f(z) + \theta[\sup(f, D) - f(z)], \tag{20}$$

где число θ таково, что $0 < \theta < 1$. Очевидно,

$$\inf(f, D) \leq f(z) < \lambda < \sup(f, D).$$

Выберем число $\delta > 0$ по формуле

$$\delta \triangleq \frac{1-\theta}{2}[\sup(f, D) - f(z)]. \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что в силу (20) и (21) на уровне λ не существует δ-решений задачи (1), т. е. $\lambda < \sup(f, D) - \delta$. Поэтому по предположению можно построить слабо δ-разрешающий набор $W_1 = W(\lambda)$. Тогда из определения 2 следует, что найдутся $u^j \in D$, $w^j : \ f(w^j) = \lambda$, при которых

$$\eta(\lambda, \delta) \triangleq \langle \nabla f(w^j), u^j - w^j \rangle > 0.$$

Отсюда с учетом выпуклости $f(\cdot)$ следует

$$f(u^j) > f(w^j) = \lambda \triangleq f(z) + \theta[\sup(f, D) - f(z)] > f(z) + \theta[\sup(f, D) - f(z)] - \varepsilon = \lambda - \varepsilon. \tag{22}$$

В частности, $f(u^j) > f(z)$. Положим $p \triangleq u^j \in D$. И вновь по предположению можно построить слабо ε-разрешающий набор $W_2 = W(\zeta)$. Рассмотрим множество

$$\Re_0 = W_2 \cup \{y\},$$

где y таково, что $f(y) = f(z)$ и при данных p и y справедливо (19). Тогда из (22) сразу же следует справедливость для $p = u^j$ неравенства (18) из определения 1. С другой стороны, из предположения (HL) следует существование элемента $u \in D$ такого, что

$$\langle \nabla f(y), u \rangle \geq \sup_{x \in D} \langle \nabla f(y), x \rangle - \varepsilon.$$

Отсюда вытекает

$$\langle \nabla f(y), u - y \rangle \geq \langle \nabla f(y), p - y \rangle - \varepsilon. \tag{23}$$

Далее, по предположению (HU) можно построить $w \in R^n : \ f(w) = f(z)$, для которого

$$\langle \nabla f(w), u - w \rangle + \varepsilon \geq \sup_v \{ \langle \nabla f(v), u - v \rangle : \ f(v) = f(z) \} \geq \langle \nabla f(y), u - y \rangle.$$

Отсюда с помощью (23) имеем

$$\langle \nabla f(w), u - w \rangle \geq \langle \nabla f(y), p - y \rangle - 2\varepsilon.$$

А тогда для аппроксимации $\Re_0 = W_2 \cup \{y\}$ получаем

$$\eta(\zeta, \varepsilon) \geq \langle \nabla f(w), u - w \rangle \geq \langle \nabla f(y), p - y \rangle - 2\varepsilon.$$

Итак, неравенство (17) из определения 1 оказывается выполненным. А неравенство (16) справедливо по построению $W_2 = W(\zeta)$. Поэтому $\Re_0$ является сильно разрешающим набором.

4. $\Re$-стратегия и ее сходимость

Пусть заданы элемент $x_0 \in D$ и числовая последовательность $\{\varepsilon_k\} : \varepsilon_k > 0,\ k = 0, 1, 2, \dots,$ $\varepsilon_k \downarrow 0$ $(k \to \infty)$. Предположим, что найдется константа $\varkappa > 0$, для которой

$$\|\nabla f(v)\| \geq \varkappa > 0 \ \ \forall v : \ f(v) \geq f(x^0). \tag{24}$$

Кроме того, рассмотрим предположение

(HR): $\forall \varepsilon > 0$ и для любой ε-стационарной точки $z \in D$, не являющейся ε-решением задачи (1), можно построить слабо разрешающий набор $W(f(z))$.

Согласно предложению 2 предположение (HR) гарантирует возможность построения сильно разрешающего набора для любой допустимой точки, не являющейся ε-глобальным решением. Легко видеть, что для любой нестационарной допустимой точки x множество $W(f(x)) = \{x\}$ является слабо разрешающим набором благодаря выпуклости $f(\cdot)$. Действительно, в этом случае найдется $u = u(x) \in D$, для которого

$$0 < \langle \nabla f(x), u - x \rangle \leq \sup_v \langle \nabla f(v), u - v \rangle,$$

что, как нетрудно видеть, согласуется с определением 2.

Для решения задачи (1) предлагается следующий алгоритм.

Шаг 0. Полагаем $k := 0$. Пусть задана некоторая допустимая точка x^0.

Шаг 1. Исходя из точки x^k, методом локального подъема пункта 2 получаем ε_k-стационарную точку z^k, $f(z^k) \triangleq \zeta_k$, т. е. точку, удовлетворяющую условию

$$\sup_{x \in D} \langle \nabla f(z^k), x - z^k \rangle \leq \varepsilon_k.$$

Шаг 2. Строим сильно ε_k-разрешающий набор

$$\Re_k = \Re(\zeta_k) = \{v^1, \dots, v^N \mid f(v^i) = \zeta_k,\ i = 1, \dots, N,\ N = N(k)\}.$$

Шаг 3. Для $i = 1, \dots, N$ находим точки $u^i \in D$ по правилу (13).

Шаг 4. Для $i = 1, \dots, N$ определяем точки $w^i : \ f(w^i) = \zeta_k$ по правилу (14), где $\zeta = \zeta_k$.

Шаг 5. Формируем величину $\eta_k = \eta(\zeta_k, \varepsilon_k) = \langle \nabla f(w^j), u^j - w^j \rangle \triangleq \max_i \langle \nabla f(w^i), u^i - w^i \rangle$.

Шаг 6. Если $\eta_k > 0$, то полагаем $x^{k+1} := u^j$, $k := k + 1$ и возвращаемся на шаг 1.

Шаг 7. Если $\eta_k \leq 0$, то полагаем $x^{k+1} := z^k$, $k := k + 1$ и возвращаемся на шаг 1.

Замечание 5. Шаги 1, 2, 3, 4 $\Re$-алгоритма являются обоснованными ввиду предложения 1 и предположений (HR) (HL) и (HU) соответственно.

Замечание 6. Из описания шага 1 видно, что последовательность, генерируемая $\Re$-алгоритмом, является последовательностью ε_k-стационарных точек.

Замечание 7. При практической реализации алгоритма останов производится, если $\eta_k \leq 0$ и $\varepsilon_k \leq \delta$, где δ — заданная точность. В этом случае из определения сильно разрешающего набора следует

$$f(z^k) \geq \sup(f, D) - \varepsilon_k \geq \sup(f, D) - \delta,$$

так что z^k является δ-решением.

Замечание 8. Нетрудно видеть, что вышеописанный метод не является алгоритмом в общепринятом смысле, поскольку, например, не уточнено, каким алгоритмом решать линеаризованную задачу или задачу уровня. Не указано также, как строить (сильно или слабо) разрешающий набор. Да и на первом шаге пользователь может выбрать другой метод локального подъема, если он считает его более подходящим в том или ином случае. Отметим только, что эти методы должны работать очень быстро, поскольку они применяются по несколько раз на каждой итерации.

Поэтому разумно назвать представленный выше метод глобального поиска принципиальным алгоритмом [2] или стратегией глобального поиска [10]. Поскольку понятие разрешающего набора является определяющим для успешного поиска глобального максимума в задаче (1), то будем называть вышеописанный метод для краткости $\Re$-стратегией.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* (2), (24), (HR), (HL) *и* (HU). *Тогда последовательность* $\{z^k\}$, *генерируемая* $\Re$-*стратегией, является максимизирующей в задаче* (1).

Доказательство. а) Пусть $\eta_k \le 0\ \forall k \ge m \ge 0$. Тогда из определения разрешающего набора $f(z^k) \ge \sup(f, D) - \varepsilon_k$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(z^k) = \sup(f, D)$.

б) Пусть теперь $\eta_k > 0\ \forall k = 0, 1, 2, \ldots$ По построению z^{k+1} является ε_{k+1}-стационарной точкой, полученной локальным подъемом раздела 2, исходя из $x^{k+1} := u^{j_k}$, где

$$\eta_k \triangleq \eta(f(z^k), \varepsilon_k) = \langle \nabla f(w^{j_k}), u^{j_k} - w^{j_k} \rangle = \max_{1\le i\le N} \langle \nabla f(w^i), u^i - w^i \rangle > 0.$$

Поэтому в силу выпуклости $f(\cdot)$ имеем

$$0 < \eta_k \le f(u^{j_k}) - f(w^{j_k}) \le f(z^{k+1}) - f(z^k). \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что при этом $f(z^k) < f(x^{k+1}) \le f(z^{k+1})$.

Таким образом, числовая последовательность $\{f(z^k)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, является монотонно возрастающей. И поскольку согласно (2) $f(\cdot)$ ограничена сверху на D, то существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} f(z^k) = \overline{f}$. При этом из (25) следует, что

$$\eta_k \downarrow 0 \ \ (k \to +\infty). \tag{26}$$

Предположим, тем не менее, что $\{z^k\}$ не является максимизирующей, т. е. найдется число $\gamma > 0$, при котором

$$\zeta_k \triangleq f(z^k) \le \overline{f} < \sup(f, D) - \gamma. \tag{27}$$

Поскольку в каждой точке z^k можно построить слабо разрешающий набор, а потому согласно предложению 2 и сильно разрешающий набор, то будем иметь

$$\eta_k = \eta(z^k, \varepsilon_k) \ge \langle \nabla f(y^k), p^k - y^k \rangle - 2\varepsilon_k, \tag{28}$$

где p^k таково, что $f(p^k) \ge f(z^k) + \theta[\sup(f, D) - \zeta_k] - \varepsilon_k$. Из последнего неравенства и (27) вытекает

$$f(p^k) \ge f(z^k) + \theta\gamma - \varepsilon_k, \tag{29}$$

откуда в свою очередь следует

$$\liminf_{k\to\infty} f(p^k) \ge \overline{f} + \theta\gamma. \tag{30}$$

С другой стороны, поскольку $\theta\gamma - \varepsilon_k > 0$ при достаточно больших k, то из (29) выводим $f(p^k) > f(z^k) \triangleq \zeta_k\ \forall k \ge k_0$. Выберем теперь y_k, $f(y^k) = \zeta_k$, таким образом, чтобы $\langle \nabla f(y^k), p^k - y^k \rangle \ge \|\nabla f(y^k)\|\, \|p^k - y^k\| - \varepsilon_k$. С учетом последнего неравенства из (28) следует $\eta_k + 2\varepsilon_k \ge \|\nabla f(y^k)\|\, \|p^k - y^k\| - \varepsilon_k$. Отсюда получаем в силу предположения (24) $\eta_k + 3\varepsilon_k \ge \varkappa \|p^k - y^k\|$. Поэтому с помощью (26) заключаем, что $\|p^k - y^k\| \downarrow 0$ $(k \to \infty)$. А тогда в силу непрерывности $f(\cdot)$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} f(p^k) = \lim_{k\to\infty} f(y^k) = \lim_{k\to\infty} \zeta_k = \overline{f}.$$

Однако последние равенства несовместны с (30), поскольку $\theta > 0, \gamma > 0$. Итак, предположение о том, что последовательность $\{z^k\}$ не является максимизирующей, привело нас к абсурду. Следовательно, $\{z^k\}$ оказывается максимизирующей.

в) Очевидно, в общем случае последовательность $\{\eta_k\}$ разбивается на две подпоследовательности $\{\eta_{k_s}\}$ и $\{\eta_{k_t}\}$ посредством условий $\eta_{k_s} \le 0$ и $\eta_{k_t} > 0$ так, что $k_s \cup k_t = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Соответственно и последовательность $\{z^k\}$ распадается на две подпоследовательности $\{z^{k_s}\}$ и

$\{z^{k_t}\}$. При этом $\{z^{k_s}\}$, для которой $\eta_{k_s} \leq 0$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, будет максимизирующей по части а), а подпоследовательность $\{z^{k_t}\}$ будет максимизирующей по части б) доказательства. Поэтому и вся последовательность $\{z^k\}$ будет максимизирующей в задаче (1).

Литература

1. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1988. – 552 с.
2. Полак Э. *Численные методы оптимизации. Единый подход.* – М.:Мир, 1974. – 374 с.
3. Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию.* – М.: Наука, 1983. – 384 с.
4. Туй Х. *Вогнутое программирование при линейных ограничениях* // ДАН СССР. – 1964. – Т. 159. – № 9. – С. 32–35.
5. Horst R., Tuy H. *Global optimization* (*deterministic approaches*). – 2-nd edition. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – 698 p.
6. Horst R., Pardalos P.M., Thoai N.V. *Introduction to global optimization.* – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. – 246 p.
7. Hiriart-Urruty J.-B., Ledyaev Y.A. *Note on the characterization of the global maxima of a* (*tangentially*) *convex function over a convex set* // J. of Convex Anal. – 1996. – V. 3. – № 1. – P. 55–61.
8. Стрекаловский А.С. *К проблеме глобального экстремума в невыпуклых задачах оптимизации* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 8. – С. 74–80.
9. Стрекаловский А.С. *О поиске глобального максимума выпуклого функционала на допустимом множестве* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1993. – Т. 33. – № 3. – С. 349–364.
10. Strekalovsky A.S., Tsevendorj I. *Testing the R-strategy for a reverse convex problem* // J. of Global Optimization. – 1998. – № 13. – P. 61–74.
11. Кузнецова А.А., Стрекаловский А.С., Цэвээндорж И. *Об одном подходе к решению целочисленных задач оптимизации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39. – № 1. – С. 9–16.

Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской Академии Наук

Поступили
первый вариант 21.04.1998
окончательный вариант 15.06.1999