ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

УДК 517.986

Э.Ю. ЛЕРНЕР

ОБ АДЕЛЬНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ГАУССОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Введение. Цель данной заметки — дать "адельное" доказательство адельной формулы для гауссовых интегралов. Эта формула заключается в том, что если элементы матрицы $(B)_{n\times n}$ квадратичной формы рациональны, то произведение по всем простым p гауссовых интегралов по n-мерному p-адическому пространству Q_p^n, умноженное на соответствующий вещественный интеграл, равно единице. Другими словами, гауссов интеграл по пространству аделей равен единице. Доказательство этой формулы в одномерном случае (многомерный случай легко сводится к одномерному) было впервые дано в [1]. Оно опирается на достаточно нетривиальные формулы для интегралов по Q_p и некоторые факты из теории чисел. В п. 3 приводится простое аналитическое, "адельное" доказательство, не использующее предварительных вычислений интегралов по Q_p. Идея предлагаемого доказательства состоит в естественном разбиении всей области интегрирования — кольца аделей — на части. Это разбиение аналогично разбиению пространства R^n на единичные кубики. Используя некоторые простые свойства преобразования Фурье на Q_p, легко получить доказываемый результат.

В п. 4 обсуждается упрощенный вариант арифметического доказательства [1]. Будет показано, что если использовать явные формулы для интегралов по Q_p (по Q_p^n), то адельная формула для гауссовых интегралов эквивалентна аналогичной формуле для символа Гильберта. Дается также явное выражение для многомерных гауссовых интегралов по Q_p^n через инварианты соответствующей квадратичной формы.

2. Структура кольца аделей [2]. Пусть Q — поле рациональных чисел. R — вещественное пополнение Q, Q_p — p-адическое пополнение Q, Z — кольцо целых, Z_p — кольцо целых p-адических чисел: $Z_p=\{a\in Q_p : |a|_p\le 1\}$. Ограниченное прямое произведение аддитивных групп R^+, Q_p^+, $p=2,3,5,\dots$, относительно Z_p^+, $p=2,3,\dots$, называется группой аделей A. Другими словами, A есть множество всех последовательностей $a=(a_\infty,a_2,\dots,a_p,\dots)$, где $a_\infty\in R$, $a_p\in Q_p$, $p=2,3,\dots$, причем $a_p\in Z_p$ для почти всех[1] p. Множество таких последовательностей образует кольцо относительно операций покомпонентного сложения и умножения. Последовательность аделей $a^{(n)}=(a_\infty^{(n)},a_2,\dots,a_p,\dots)$ сходится к аделю $a=(a_\infty,a_2,\dots,a_p,\dots)$, если она сходится к a покомпонентно и существует такое N, что при всех $n\ge N$ $a_p-a_p^{(n)}\in Z_p$.

Группа аделей A, будучи локально компактной, имеет инвариантную меру, которую обозначим через da. Эта мера будет нормирована условием $\int_F da=1$, где F — компактное множество аделей $a=(a_\infty,a_2,\dots,a_p,\dots)$ таких, что $0\le a_\infty\le 1$, $a_p\in Z_p$, $p=2,3,\dots$ Если $\varphi(a)$ — суммируемая на A функция вида $\varphi(a)=\varphi_\infty(a_\infty)\varphi_2(a_2)\dots\varphi_p(a_p)\dots$, то

$$\int\varphi(a)da=\int\varphi_\infty(a_\infty)da_\infty\int\varphi_2(a_2)da_2\dots\int\varphi_p(a_p)da_p\dots,$$

[1] всех, за исключением конечного числа

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00467).

где da_p — меры на Q_p, $p = \infty, 2, 3, \dots$ ($Q_\infty \equiv R$), нормированные условиями

$$\int_0^1 da_\infty = 1, \quad \int_{Z_p} da_p = 1, \quad p \neq \infty.$$

Поле рациональных чисел изоморфно вкладывается в кольцо аделей A. Каждому рациональному числу r соответствует последовательность $(r, r, \dots, r, \dots)$. Такие последовательности являются аделями (т. к. для всех $r \neq 0$ выполнено $|r|_p = 1$ для почти всех p). Их называют главными аделями. Заметим, что $\prod_p |r|_p = 1$ для $r \in Q^*$ ($Q^* = Q \setminus \{0\}$). Здесь произведение берется по всем простым p и $p = \infty$, $|r|_\infty$ — абсолютное значение числа r. Кольцо главных аделей дискретно в A. Фундаментальная область аддитивной группы A относительно подгруппы главных аделей есть F. Таким образом,

$$A = \bigsqcup_{r \in Q} A_r, \tag{1}$$

где $A_r = \{a \in A : a = r + x, \ x \in F\}$, а значок $\sqcup$ означает объединение непересекающихся множеств. Заметим, что для "усеченных" аделей

$$A' = \{(a_2, a_3, a_5, \dots) : a_p \in Q_p, \ \text{ причем } a_p \in Z_p \text{ для почти всех } p\}$$

имеет место следующее представление

$$A' = \bigsqcup_{r \in Q \cap [0,1)} \{a \in A' : a = r + x, \ x \in F'\}, \tag{2}$$

где $F' = \{a \in A' : a_p \in Z_p, \ p = 2, 3, \dots\}$.

Обозначим через $\{a_p\}_p$ дробную часть p-адического числа. Она является обычным рациональным числом и определяется следующим образом: если

$$a_p = \sum_{i=m}^{\infty} c_i p^i, \quad c_i \in \{0, \dots, p-1\},$$

то $\{a_p\}_p = \sum\limits_{i=m}^{-1} c_i p_i$. Пусть $D_p = \{d \in Q_p : \{d\}_p = d\}$. Имеет место разложение

$$Q_p = \bigsqcup_{d \in D_p} \Omega_d, \quad \Omega_d = \{a_p \in Q_p : a_p = d + x, \ x \in Z_p\}.$$

Более того, если S_γ — "p-адическая сфера" радиуса p^γ, $\gamma \in Z : S_\gamma = \{x \in Q_p : |x|_p = p^\gamma\}$, то при $\gamma > 0$ справедливо разложение

$$S_\gamma = \bigsqcup_{d \in D_p, \ |d|_p = p^\gamma} \Omega_d. \tag{3}$$

Пусть $D = \{a \in A' : a_p \in D_p$, причем $a_p = 0$ для почти всех $p\}$. Отображение

$$(a_2, a_3, \dots) \to r = \left(\sum_{p=2,3,\dots} a_p \right) \operatorname{mod} 1$$

является взаимно однозначным отображением из D на рациональные числа из интервала $[0, 1)$. Обратное отображение задается формулой $a_p = \{r\}_p$. Таким образом, разложение (2) можно переписать в виде

$$A' = \bigsqcup_{d \in D} \{a \in A' : a = d + x, \ x \in F'\}. \tag{4}$$

Кольцо аделей является самодуальным кольцом, т. е. любой аддитивный характер на кольце аделей имеет вид $\chi(ax)$, где $a \in A$, и

$$\chi(a) = \chi_\infty(a_\infty) \prod_{p=2,3,\dots} \chi_p(a_p), \quad \chi_\infty(a_\infty) = e^{-2\pi i a_\infty}, \quad \chi_p(a_p) = e^{2\pi i \{a_p\}}.$$

Заметим, что

$$\chi(r) = 1, \quad \text{если} \ \ r \in Q. \tag{5}$$

Также будем использовать инвариантность индикатора Z_p относительно преобразования Фурье в Q_p

$$\int_{Z_p} \chi_p(kx)dx = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ k \in Z_p; \\ 0, & \text{если} \ \ k \notin Z_p. \end{cases} \tag{6}$$

3. “Адельное” доказательство адельной формулы. Пусть $B = (b_{i,j})$ — невырожденная матрица размерности $n \times n$, все элементы которой — рациональные числа. Обозначим через $g_p(B)$, $p = 2, 3, \dots$, “несобственный” гауссов интеграл по Q_p^n

$$g_p(B) = \sqrt{|2^n \det B|_p} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{x \in Q_p^n : |x_i|_p \le N} \chi_p\left(\sum_{i,j=1}^n b_{i,j} x_i x_j\right) dx_1 \dots dx_n.$$

Через $g_\infty(B)$ обозначим аналогичный вещественный интеграл, равный, как известно, $((1-i)/\sqrt{2})^l((1+i)/\sqrt{2})^k$, где l и k — соответственно положительный и отрицательный индексы инерции матрицы[1] B. В [1] был доказан одномерный вариант следующей теоремы.

Теорема 1. *Все интегралы* $g_p(B)$, $p = \infty, 2, 3, \dots$, *существуют, и их произведение* $g_\infty(B) \times \prod\limits_{p=2,3,\dots} g_p(B)$ *равно единице.*

Квадратичную форму $\sum\limits_{i,j=1}^n b_{i,j} x_i x_j$ можно с помощью линейного преобразования $x = Cy$ ($C = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$, $c_{i,j} \in Q$) привести к диагональному виду, и при этом для меры Хаара в Q_p, $p = 2, 3, \dots$, справедлива обычная формула замены переменных $dx_1 \dots dx_n = |\det C|_p dy_1 \dots dy_n$. Поэтому теорему 1 достаточно доказать лишь в одномерном случае. Более того, если $B \equiv b \in Q^*$ имеет вид s/q, $s, q \in Z$, то заменой переменных $x = qy$ доказательство теоремы сводится к случаю $b \in Z$, $b \neq 0$.

Основная идея “адельного” доказательства заключается в следующем утверждении.

Лемма. *Пусть* $b \in Z$, $b \neq 0$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{r \in Q} \int_{A_r} \chi(bx^2)dx$ *абсолютно сходится и равен единице.*

В силу равенств (1) и $\prod\limits_p |2^n b|_p = 1$ этот результат можно интерпретировать как тот факт, что гауссов “интеграл по A” равен единице.

Доказательство леммы. В силу равенства (5) имеем

$$\int_{A_r} \chi(bx^2)dx = \int_F \chi(br^2 + 2brx + bx^2)dx = \int_F \chi(2brx + bx^2)dx.$$

Положим $2br = r'$. Искомый ряд можно переписать в виде

$$\sum_{r' \in Q} \int_0^1 \chi_\infty(bx^2 + r'x)dx \prod_{p=2,3,\dots} \int_{Z_p} \chi_p(bx^2 + r'x)dx.$$

[1] Здесь и далее в п. 4 инварианты квадратичной формы $\sum\limits_{i,j} b_{i,j} x_i x_j$ рассматриваются как функционалы от матрицы B.

Так как $b \in Z_p$, с учетом (6) имеем

$$\prod_{p=2,3,\dots} \int_{Z_p} \chi_p(bx^2 + r'x)dx = \prod_{p=2,3,\dots} \int_{Z_p} \chi_p(r'x)dx = \begin{cases} 1, & \text{если } \ r' \in Z; \\ 0, & \text{если } \ r' \in Q \setminus Z. \end{cases}$$

Таким образом, искомый ряд совпадает с

$$\sum_{r' \in Z} \int_0^1 \chi_\infty(bx^2 + r'x)dx$$

— суммой коэффициентов Фурье функции $e^{-2\pi i b x^2}$. $\square$

Доказательство теоремы (одномерный случай, $b \in Z$, $b \neq 0$). Докажем сначала, что для интегралов $G_p(b) = |2b|_p^{-1/2} g_p(b)$ выполнено

$$G_p(b) = \int\limits_{x \in Q_p : |x|_p \leq |2b|_p^{-1}} \chi_p(bx^2)dx. \tag{7}$$

В частности, при $p > |b|_\infty$

$$G_p(b) = \int_{x \in Z_p} \chi_p(bx^2)dx = \int_{x \in Z_p} dx = 1. \tag{8}$$

Отсюда следует существование интегралов $g_p(b)$ для всех простых p и их произведения

$$g(b) = \prod_{p=2,3,\dots} g_p(b) = |2b|_\infty^{-1/2} \prod_{p=2,3,\dots} G_p(b).$$

В силу (3) для доказательства (7) достаточно доказать, что

$$\int_{x \in \Omega_d} \chi_p(bx^2)dx = 0, \quad \text{если} \quad d \in D_p, \ \ |d| > |2b|_p^{-1}. \tag{9}$$

Это равенство следует из (6):

$$\int_{x \in \Omega_d} \chi_p(bx^2)dx = \chi_p(bd^2) \int_{x \in Z_p} \chi_p(2bdx)dx = 0.$$

Представим теперь произведение $g(b)$ в виде суммы интегралов по элементарным областям. В силу (7)–(9) имеем

$$g(b) = |2b|_\infty^{-1/2} \sum_{d \in D} \int_{a \in A' : a = d + x, \ x \in F'} \prod_{p=2,3,\dots} \chi_p(bx^2)da.$$

Ввиду эквивалентности разложений (2) и (4) последнее равенство можно переписать как

$$g(b) = |2b|_\infty^{-1/2} \sum_{r \in Q \cap [0,1)} \int_{a \in A' : a = r + x, \ x \in F'} \prod_{p=2,3,\dots} \chi_p(bx^2)da.$$

Несобственный интеграл $g_\infty(b)$ можно представить в виде ряда

$$g_\infty(b) = \sqrt{|2b|_\infty} \sum_{k \in Z} \int\limits_{r+k}^{r+k+1} \chi_\infty(bx^2)dx,$$

где r — любое рациональное число из интервала $[0, 1)$. Получаем

$$g(b) g_\infty(b) = \sum_{r \in Q} \int_{A_r} \chi(bx^2)dx.$$

Таким образом, утверждение теоремы сводится к утверждению леммы. $\square$

4. Арифметика гауссовых интегралов. Пусть $c \in Z$. Символ Лежандра (c/p) определяется следующим образом:

$$\left(\frac{c}{p}\right) = \begin{cases} -1, & \text{если уравнение } x^2 = c \bmod p \text{ не имеет решения } x \in Z; \\ 0, & \text{если } c = 0 \bmod p; \\ 1, & \text{если уравнение } x^2 = a \bmod p \text{ имеет ненулевое решение } x \in Z. \end{cases}$$

Пусть p-адическое число $b \in Q_p^*$ представимо в виде[1]

$$b = \sum_{i=m}^{\infty} c_i p^i, \quad c_i \in \{0, \dots, p-1\}, \quad c_m \neq 0.$$

Для одномерного гауссова интеграла в Q_p имеет место формула $g_p(b) = \lambda_p(b)$ ([1], [3]), где

$$\lambda_p(b) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ четное;} \\ (c_m/p), & \text{если } m \text{ нечетное, } p \equiv 1 \bmod 4; \\ (c_m/p)i, & \text{если } m \text{ нечетное, } p \equiv 3 \bmod 4, \end{cases}$$

при $p \neq 2$, и

$$\lambda_2(b) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + (-1)^{c_{m+1}} i), & \text{если } m \text{ четное;} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i) i^{c_{m+1}} (-1)^{c_{m+2}}, & \text{если } m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Напомним, что $g_\infty(b) = \lambda_\infty(b)$, где $\lambda_\infty(b) = (1 - \operatorname{sign}(b) i)/\sqrt{2}$. Для всех $p = \infty, 2, 3, \dots$

$$\lambda_p(bc^2) = \lambda_p(b), \tag{10}$$

$$\lambda_p(b)\lambda_p(-b) = 1. \tag{11}$$

Функция $\lambda_p(b)$ связана с символом Гильберта. По определению символ Гильберта $(b, b')_p$, $p = \infty, 2, 3, \dots$, $b, b' \in Q_p^*$, равен 1 или -1 в зависимости от того, представляет форма $bx^2 + b'y^2 - z^2$ число 0 в поле Q_p или нет. Легко проверить справедливость соотношения (см. [1]):

$$\lambda_p(b)\lambda_p(b') = (b, b')_p \lambda_p(bb'), \quad b, b' \in Q_p^*. \tag{12}$$

Соотношение (12) вместе с формулой произведения (законом взаимности) для символа Гильберта [4]

$$(b, b')_\infty \prod_{p=2,3,\dots} (b, b')_p = 1, \quad b, b' \in Q^* \tag{13}$$

позволяют дать простое арифметическое доказательство формулы

$$\lambda_\infty(b) \prod_{p=2,3,\dots} \lambda_p(b) = 1, \quad b \in Q^*. \tag{14}$$

Действительно, в силу (10), (11) достаточно рассмотреть случай, когда b — натуральное число, представимое в виде произведения $\prod\limits_{i=1}^{n} p_i$ различных простых чисел p_i. Многократно используя (12), получаем

$$\lambda_p(b) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_p(p_i) \prod_{i<j} (p_i, p_j)_p. \tag{15}$$

Таким образом, тождество (13) позволяет свести доказательство формулы (14) к случаю, когда b — простое число. Тогда тождество (14) следует из определения функции λ_p.

[1]Здесь $Q_p^* = Q_p \setminus \{0\}$. Этим же символом будем обозначать мультипликативную группу поля Q_p.

Обсудим, наконец, выражение для гауссовых интегралов $g_p(B)$, $p = 2, 3, \dots$, через инварианты квадратичной формы. Такими инвариантами являются $\operatorname{disc} B$ — дискриминант матрицы B ($\det B$, определенный с точностью до умножения на квадрат ненулевого элемента из Q_p) и инвариант Хассе —

$$\varepsilon(B) = \prod_{i<j} (c_i, c_j)_p,$$

где $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2$ — диагональная квадратичная форма, эквивалентная форме $\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j} x_i x_j$ [4]. В силу (10) можно считать, что функция λ_p определена на факторгруппе Q_p^*/Q_p^{*2}.

Теорема 2. *Имеет место формула* $g_p(B) = \varepsilon(B)\lambda_p(\operatorname{disc} B)$.

Доказательство. Имеем

$$g_p(B) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_p(c_i) = \lambda_p(c_1 \times \dots \times c_n) \prod_{i<j} (c_i, c_j)_p.$$

Последнее равенство доказывается аналогично равенству (15). Таким образом, $g_p(B) = \lambda_p(\det B)\varepsilon(B)$. $\square$

Литература

1. Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. *p-адический анализ и математическая физика.* – М.: Наука, 1994. – 352 с.
2. Гельфанд И.М., Граев М.И., Пятецкий-Шапиро И.И. *Теория представлений и автоморфные функции.* – М.: Наука, 1966. – 512 с.
3. Alacoque C., Ruelle Ph., Thiran E., Verstegen D., Weyers J. *Quantum amplitudes on p-adic fields* // Phys. Lett. – 1988. – V. 211B. – P. 59–62.
4. Серр Ж.П. *Курс арифметики.* – М.: Мир, 1972. – 184 с.

Казанский государственный университет

Поступила
12.08.1996