ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 5 (516)

УДК 517.51:517.96:519.64

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ, Л.Б. ЕРМОЛАЕВА

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ПО ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ТОЧКАМ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Введение

В различных разделах математики и ее приложений широко применяется интерполирование непрерывных функций в экстремальных точках

$$x_k = x_{k,n} = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k=\overline{0,n}, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{0.1}$$

многочленов Чебышева I рода

$$T_n(x) = \cos n\arccos x, \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \quad n+1\in\mathbb{N}. \tag{0.2}$$

Интерполирующие многочлены имеют вид (см., напр., [1], [2]) [1]

$$\mathcal{L}_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' (-1)^{k+1} f(x_k)\frac{(1-x^2)U_{n-1}(x)}{x-x_k} \equiv \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x), \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{0.3}$$

где $f(x)$ — данная непрерывная функция, а $U_{n-1}(x)$ — многочлены Чебышева II рода

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin n\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{0.4}$$

В данной работе предпринята попытка систематического исследования аппроксимативных свойств интерполяционного процесса (0.1)–(0.4) и его приложений к решению часто применяемых на практике интегральных и дифференциальных уравнений вида

$$\varphi(x) + \int_{-1}^{1}\frac{h(x,t)\varphi(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = f(x), \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{0.5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|x-t|\varphi(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h(x,t)\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = f(x), \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{0.6}$$

$$\varphi^{(m)}(x) + \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\varphi^{(m-k)}(x) = f(x), \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \quad m\in\mathbb{N}, \tag{0.7}$$

где $f(x)$, $h(x,t)$, $a_k(x)$ — данные непрерывные функции в своих областях определения, а $\varphi(t)$ — искомая функция; при этом в основу метода механических квадратур решения уравнений (0.5) и (0.6) положена подробно исследованная в [3] квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \int_{-1}^{1}\frac{\mathcal{L}_n(f;x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' f\Big(\cos\frac{k\pi}{n}\Big), \quad n\in\mathbb{N}, \quad f\in C[-1,1]. \tag{0.8}$$

[1] Два штриха у знака суммы означают, что ее слагаемые при $k=0$ и $k=n$ следует разделить на коэффициент 2.

Работа состоит из двух частей. В первой ее части (пп. 1–3) исследуются свойства интерполяционного процесса (0.1)–(0.4) в ряде функциональных пространств. Во второй части (пп. 4–6) работы рассматриваются решения уравнений (0.5)–(0.7) методами коллокации и механических квадратур и их теоретико-функциональное обоснование в смысле общей теории приближенных методов функционального анализа [4]–[8].

1. Аппроксимация в пространстве непрерывных функций и равномерные оценки погрешности

Обозначим через $C[-1,1] \equiv C$ пространство всех непрерывных на $[-1,1]$ функций с обычной нормой

$$\|\varphi\|_C = \|\varphi(x)\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le x\le 1} |\varphi(x)|, \quad \varphi \in C[-1,1].$$

Здесь в первую очередь нас интересуют вопросы сходимости интерполяционного процесса (0.1)–(0.4) в пространстве $C[-1,1]$ и равномерные оценки погрешности приближенной формулы

$$f(x) \approx \mathcal{L}_n(f;x), \quad -1 \le x \le 1, \quad f \in C, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Пусть $\mathbb{H}_n$ — множество всех алгебраических многочленов степени не выше n, где $n+1 \in \mathbb{N}$;

$$E_n(\varphi)_C = \rho(\varphi, \mathbb{H}_n)_C = \inf_{\varphi_n \in \mathbb{H}_n} \|\varphi - \varphi_n\|_C$$

— функционал, введенный еще П.Л. Чебышевым (см., напр., [9]–[12]) как наилучшее равномерное приближение функции $\varphi \in C$ всевозможными алгебраическими многочленами степени не выше n;

$$\lambda_n = \max_{-1\le x\le 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n}{}'' \frac{(1-x^2)|U_{n-1}(x)|}{|x-x_k|}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

— константа Лебега интерполяционного процесса (0.3) по узлам (0.1), а $\mathcal{L}_n : C \to C$ — оператор, ставящий в соответствие любой функции $f \in C$ ее многочлен Лагранжа (0.3).

Между этими величинами, играющими фундаментальную роль в теории приближений, существует тесная связь, а именно

$$\lambda_n = \sup_{f\in C, \|f\|_C \le 1} \|\mathcal{L}_n(f;x)\|_C = \|\mathcal{L}_n\|_{C\to C}. \tag{1.3}$$

С помощью результатов [13], [14] и [5], гл. 3, § 5, доказывается

Лемма 1. *Справедливы следующие асимптотическое и порядковое соотношения*:

$$\lambda_n = \|\mathcal{L}_n\|_{C\to C} \sim \frac{2}{\pi} \ln n, \quad n \to \infty; \tag{1.4}$$

$$\frac{2}{\pi} \ln n \le \lambda_n = \|\mathcal{L}_n\|_{C\to C} \le \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4n}{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Поскольку $\mathcal{L}_n^2 = \mathcal{L}_n$, то в любой норме, которая только имеет смысл, справедливы неравенства

$$\|\mathcal{L}_n\| \ge 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

С помощью (1.1)–(1.6) из теоремы Джексона (см., напр., [9]–[12]) выводится

Теорема 1. *Для любой функции $f(x) \in C$ при любых $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\|f(x) - \mathcal{L}_n(f;x)\|_C \le \left(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4n}{\pi}\right) E_n(f)_C. \tag{1.7}$$

Следствие 1. Для любой функции $f \in C$, удовлетворяющей на $[-1,1]$ условию Дини–Липшица, многочлены (0.3) с узлами (0.1) равномерно сходятся к функции $f(x)$ на $[-1,1]$ со скоростью

$$\|f(x) - \mathcal{L}_n(f;x)\|_C = O\{E_n(f)_C \ln n\}. \tag{1.8}$$

Следствие 2. Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f^{(r)}(x) \in \mathrm{Lip}_M\, \alpha$, где $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$, $r+1 \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \le 1$, $M = \mathrm{const} > 0$. Тогда на $[-1,1]$ имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_n(f;x) = f(x), \quad -1 \le x \le 1, \tag{1.9}$$

со скоростью

$$\|f(x) - \mathcal{L}_n(f;x)\|_C \le \left(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{4n}{\pi}\right)\frac{MC_{r,\alpha}}{n^{r+\alpha}} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{1.10}$$

где $C_{r,\alpha}$ — вполне определенная положительная постоянная, зависящая от r и α, но не зависящая от $n \in \mathbb{N}$.

2. Сходимость в пространствах Лебега и среднеквадратические оценки погрешности

Из леммы 1 следует, что полиномиальные операторы $\mathcal{L}_n : C \to C$ неограничены по норме в совокупности. Отсюда и из теоремы Банаха–Штейнхауса (см., напр., [8], гл. 7) с учетом $\mathcal{L}_n^2 = \mathcal{L}_n$ следует, что существует функция $f_0(x) \in C[-1,1]$, для которой предельное соотношение (1.9) в пространстве $C[-1,1]$ не имеет места. В связи с этим (а также в связи с приложениями) возникает вопрос о сходимости многочленов (0.3) в более слабой норме; в этом параграфе дается положительный ответ на этот вопрос.

Обозначим через $L_2(\rho) = L_2(\rho;[-1,1])$ пространство квадратично суммируемых по Лебегу с весом $\rho = \rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ на $[-1,1]$ функций со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (f,g \in L_2(\rho)),$$

$$\|f\|_{L_2(\rho)} = \left\{\int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\right\}^{1/2}, \quad f \in L_2(\rho).$$

В дальнейшем существенную роль играет следующая

Лемма 2. *Для любой функции $f(x) \in C[-1,1]$ справедливо представление*

$$\|\mathcal{L}_n(f;x)\|^2_{L_2(\rho)} = \int_{-1}^{1} \frac{|\mathcal{L}_n(f;x)|^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n}{}'' |f(x_j)|^2 - \frac{\pi}{2n^2}\left|\sum_{j=0}^{n}{}''(-1)^j f(x_j)\right|^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Следствие 1. Для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\|\mathcal{L}_n\|_{C\to L_2(\rho)} = \sup_{\substack{f\in C\\ \|f\|_C \le 1}} \|\mathcal{L}_n(f;x)\|_{L_2(\rho)} = \sqrt{\pi}; \quad \|\mathcal{L}_n\|_{L_2(\rho)\to L_2(\rho)} = \infty. \tag{2.2}$$

Следствие 2. Для любого многочлена $Q(x) \in \mathbb{H}_n$ справедливы неравенства

$$\frac{\pi}{2n}\sum_{j=0}^{n}{}'' |Q(x_j)|^2 \le \|Q(x)\|^2_{L_2(\rho)} \le \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n}{}'' |Q(x_j)|^2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

где узлы определены в (0.1).

Доказательство. Сначала покажем, что для любой функции $f(x) \in C[-1,1]$ справедливы соотношения

$$\mathcal{L}_n(f;x) = \frac{c^T_{o,n}(f)}{2} + \sum_{m=1}^{n} c^T_{m,n}(f) T_m(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

где

$$c^T_{m,n}(f) = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n}{}'' f(x_j) T_m(x_j), \quad m = \overline{0, n-1}, \tag{2.5a}$$

$$c^T_{m,n}(f) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n}{}'' (-1)^j f(x_j), \qquad m = n. \tag{2.5b}$$

С этой целью положим

$$x = \cos\theta, \quad \theta = \arccos x, \quad x_k = \cos\theta_k, \quad \theta_k = \frac{k\pi}{n}, \quad k = \overline{0,n}, \tag{2.6}$$

где $-1 \le x \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$. Тогда многочлен (0.3) принимает вид

$$\mathcal{L}_n(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n}{}'' (-1)^{k+1} f(x_k) \frac{\sin\theta \sin n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k}. \tag{2.7}$$

Поскольку $l_k(x) \in \mathbb{H}_n$, то справедлива формула

$$\varphi_k(\theta) = \frac{\sin\theta \sin n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} = \frac{\alpha_{k,0}}{2} + \sum_{m=1}^{n} \alpha_{k,m} \cos m\theta, \quad k = \overline{0,n}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \tag{2.8}$$

где

$$\alpha_{k,m} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_k(\theta) \cos m\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta \sin n\theta \cos m\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} d\theta, \quad m = \overline{0,n}. \tag{2.9}$$

Так как при любых $m = 0, 1, \dots, n-1, \dots$

$$2\sin\theta \sin n\theta \cos m\theta = \\ = \frac{\cos(n-1-m)\theta + \cos(n-1+m)\theta - \cos(n+1-m)\theta - \cos(n+1+m)\theta}{2},$$

то в силу (2.9) и известной формулы

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos r\theta d\theta}{\sin\theta - \sin\varphi} = \frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad r+1 \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

находим

$$\alpha_{k,m} = \frac{\sin(n-1-m)\theta_k + \sin(n-1+m)\theta_k - \sin(n+1-m)\theta_k - \sin(n+1+m)\theta_k}{2\sin\theta_k} = \\ = 2(-1)^{k+1} \cos m\theta_k, \quad m = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{0,n}. \tag{2.11a}$$

Кроме того, снова с помощью (2.10) из (2.9) находим

$$\alpha_{k,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta \sin n\theta \cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta \sin 2n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(2n-1)\theta - \cos(2n+1)\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} d\theta = \\ = \frac{\sin(2n-1)\theta_k - \sin(2n+1)\theta_k}{2\sin\theta_k} = (-1)^{k+1} \cos n\theta_k = -1, \quad k = \overline{0,n}. \tag{2.11b}$$

Из соотношений (2.8)–(2.11) получаем

$$\varphi_k(\theta)=\frac{\sin\theta\sin n\theta}{\cos\theta-\cos\theta_k}={\sum_{m=0}^{n}}'' 2(-1)^{k+1}\cos m\theta_k\cos m\theta=2(-1)^{k+1}{\sum_{m=0}^{n}}'' T_m(x_k)T_m(x)=$$
$$=2(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n-1}T_m(x)T_m(x_k)+\frac{1}{2}T_n(x)T_n(x_k)\right],\quad k=\overline{0,n};\quad \sum_{m=1}^{0}\equiv 0.$$

Отсюда и из (0.1), (0.2), (2.6)–(2.11) находим

$$\mathcal{L}_n(f;x)=\frac{1}{n}{\sum_{k=0}^{n}}''(-1)^{k+1}f(x_k)\varphi_k(\theta)=\frac{2}{n}{\sum_{k=0}^{n}}'' f(x_k){\sum_{m=0}^{n}}'' T_m(x)T_m(x_k)=$$
$$=\frac{T_0(x)}{n}{\sum_{k=0}^{n}}'' f(x_k)+\sum_{m=1}^{n-1}T_m(x)\frac{2}{n}{\sum_{k=0}^{n}}'' f(x_k)T_m(x_k)+\frac{T_n(x)}{n}{\sum_{k=0}^{n}}'' f(x_k)T_n(x_k),\quad (2.12)$$

откуда, в свою очередь, следуют соотношения (2.4)–(2.5).

Далее, в силу (2.4)–(2.5), (2.12) имеем

$$|\mathcal{L}_n(f;x)|^2=|\mathcal{L}_n(f;x)-c^T_{n,n}(f)T_n(x)|^2+2c^T_{n,n}(f)T_n(x)[\mathcal{L}_n(f;x)-c^T_{n,n}(f)T_n(x)]+$$
$$+|c^T_{n,n}(f)T_n(x)|^2\equiv P_{2n-1}(x)+|c^T_{n,n}(f)T_n(x)|^2,$$

где $P_{2n-1}(x)\in\mathbb{H}_{2n-1}$. Поэтому с учетом точности [3] квадратурной формулы (0.8) находим

$$\int_{-1}^{1}\frac{|\mathcal{L}_n(f;x)|^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{P_{2n-1}(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}+|c^T_{n,n}(f)|^2\int_{-1}^{1}\frac{T_n^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\frac{\pi}{n}{\sum_{j=0}^{n}}'' P_{2n-1}(x_j)+|c^T_{n,n}(f)|^2\frac{\pi}{2}=$$
$$=\frac{\pi}{n}{\sum_{j=0}^{n}}''|\mathcal{L}_n(f;x_j)|^2-\frac{\pi}{n}{\sum_{j=0}^{n}}''|c^T_{n,n}(f)T_n(x_j)|^2+\frac{\pi}{2}|c^T_{n,n}(f)|^2=$$
$$=\frac{\pi}{n}{\sum_{j=0}^{n}}''|f(x_j)|^2-\frac{\pi}{2}|c^T_{n,n}(f)|^2,\quad f\in C,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Отсюда и из (2.5b) следует (2.1).

Приведем еще одно доказательство формулы (2.1). С помощью равенства Парсеваля из (2.4)–(2.5), (2.12) находим[1]

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|\mathcal{L}_n(f;x)|^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{|c^T_{0,n}(f)|^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}|c^T_{m,n}(f)|^2=$$
$$={\sum_{m=0}^{n}}'|c^T_{m,n}(f)|^2={\sum_{m=0}^{n-1}}'\left|\frac{2}{n}{\sum_{j=0}^{n}}'' f(x_j)T_m(x_j)\right|^2+\left|\frac{1}{n}{\sum_{j=0}^{n}}'' f(x_j)T_n(x_j)\right|^2=$$
$$=\frac{4}{n^2}{\sum_{j=0}^{n}}''{\sum_{l=0}^{n}}'' f(x_j)f(x_l){\sum_{m=0}^{n}}''' T_m(x_j)T_m(x_l),\quad (2.13)$$

[1]Штрих у знака суммы означает, что ее первое слагаемое следует разделить на коэффициент 2.

где

$$\sum_{m=0}^{n}{}''' T_m(x_j)T_m(x_l) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} T_m(x_j)T_m(x_l) + \frac{1}{4}T_n(x_j)T_n(x_l) =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} \cos m\theta_j \cos m\theta_l + \frac{1}{4}(-1)^{j+l} = \frac{D_{n-1}(\theta_j - \theta_l) + D_{n-1}(\theta_j + \theta_l)}{2} + \frac{1}{4}(-1)^{j+l}; \quad (2.14)$$

здесь и далее

$$D_m(\alpha) = \frac{\sin(2m+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

— ядро Дирихле порядка m, где $m+1 \in \mathbb{N}$. В силу (2.13)–(2.15) имеем

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\mathcal{L}_n(f;x)|^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{n^2} \sum_{j=0}^{n}{}'' \sum_{l=0}^{n}{}'' f(x_j)f(x_l)\{D_{n-1}(\theta_j - \theta_l) + D_{n-1}(\theta_j + \theta_l) + \frac{1}{2}(-1)^{j+l}\}. \quad (2.16)$$

Из (2.16) и (2.6) с учетом свойств ядра Дирихле (2.15) получаем представление (2.1). □

Докажем следствие 1. Из (2.1) для любой функции $f(x) \in C$ находим

$$\|\mathcal{L}_n(f;x)\|_{L_2(\rho)} \le \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}{}'' |f(x_j)|^2\right\}^{1/2} \le \sqrt{\pi}\sqrt{\max_{0\le j\le n}|f(x_j)|^2} \le \sqrt{\pi}\|f(x)\|_C,$$

откуда следует оценка

$$\|\mathcal{L}_n\|_{C\to L_2(\rho)} \le \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

С другой стороны, для $f(x) \equiv 1$ в силу (2.1) находим

$$\|\mathcal{L}_n\|_{C\to L_2(\rho)} = \sup_{\substack{f\in C\\ \|f\|_C\le 1}} \|\mathcal{L}_n(f;x)\|_{L_2(\rho)} \ge \|\mathcal{L}_n(1;x)\|_{L_2(\rho)} = \|1\|_{L_2(\rho)} = \sqrt{\pi}. \quad (2.18)$$

Из неравенств (2.17) и (2.18) следует первое из соотношений (2.2). Второе из соотношений (2.2) доказывается по аналогии с формулой (5.6) ([5], гл. 3).

Докажем следствие 2. Заметим, что для любого многочлена $Q(x) \in \mathbb{H}_n$ справедливо тождество $\mathcal{L}_n(Q;x) \equiv Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Поэтому из формулы (2.1) следует представление

$$\int_{-1}^{1} \frac{|Q(x)|^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n}{}'' |Q(x_j)|^2 - \frac{\pi}{2n^2}\left|\sum_{j=0}^{n}{}''(-1)^j Q(x_j)\right|^2. \quad (2.19)$$

В силу (2.19) верхняя из оценок (2.3) очевидна, а для получения нижней из оценок из (2.3) достаточно воспользоваться (2.19) и неравенством

$$\frac{\pi}{2n^2}\left|\sum_{j=0}^{n}{}''(-1)^j Q(x_j)\right|^2 \le \frac{\pi}{2n}\sum_{j=0}^{n}{}'' |Q(x_j)|^2.$$

Тем самым лемма 2 и ее следствия доказаны. В связи с этим заметим, что первая из формул (2.2) ранее была получена другим (более сложным) способом в ([15], с. 53–55). □

Теорема 2. *Для любой функции $f(x) \in C[-1,1]$ в пространстве $L_2(\rho)$ справедливо предельное соотношение $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_n(f;x) = f(x)$, причем погрешность приближенной формулы $f(x) \approx \mathcal{L}_n(f;x)$ при любых $n \in \mathbb{N}$ может быть оценена неравенством*

$$\|f(x) - \mathcal{L}_n(f;x)\|_{L_2(\rho)} \le 2\sqrt{\pi}E_n(f)_C, \quad f \in C. \quad (2.20)$$

Следствие. Пусть существует производная $\frac{d^r f(\cos\theta)}{d\theta^r} \equiv \psi^{(r)}(\theta)$ и $|\psi^{(r)}(\theta)| \le M_r = \text{const}$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|f(x) - \mathcal{L}_n(f;x)\|_{L_2(\rho)} \le \frac{\pi\sqrt{\pi}M_r}{(n+1)^r}, \quad r \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Обозначим через $\sigma_n(x) \in \mathbb{H}_n$ многочлен наилучшего равномерного приближения функции $f(x) \in C[-1,1]$. Так как $\mathcal{L}_n(\sigma_n;x) \equiv \sigma_n(x)$, то в силу следствия 1 леммы 2 находим оценку (2.20):

$$\|f(x) - \mathcal{L}_n(f;x)\|_{L_2(\rho)} \le \|f(x) - \sigma_n(x)\|_{L_2(\rho)} + \|\mathcal{L}_n(f - \sigma_n)\|_{L_2(\rho)} \le$$
$$\le \|f - \sigma_n\|_C \|1\|_{L_2(\rho)} + \|\mathcal{L}_n\|_{C\to L_2(\rho)} \|f - \sigma_n\|_C = E_n(f)_C\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi}E_n(f)_C = 2\sqrt{\pi}E_n(f)_C.$$

Поскольку $E_n(f) \to 0$, $n \to \infty$, монотонно убывая для любой функции $f \in C$, то из (2.20) следует утверждение теоремы.

Для доказательства следствия заметим, что $E_n(f)_C = E_n^T(\psi)$, где $E_n^T(\psi)$ — наилучшее равномерное приближение индуцированной функции $\psi(\theta) = f(\cos\theta)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n. Поэтому в силу известного результата [10]–[12] в рассматриваемом случае имеем

$$E_n(f)_C = E_n^T(\psi) \le \frac{\pi}{2}\frac{M_r}{(n+1)^r}, \quad r \in \mathbb{N},$$

отсюда и из (2.20) следует оценка (2.21). □

3. Оптимальная аппроксимация в пространствах Соболева

Пусть $W_2^1(\rho, \rho^{-1}; [-1,1]) \equiv W_2^1$ — пространство абсолютно непрерывных на $[-1,1]$ функций, первые производные которых принадлежат пространству $L_2(\rho^{-1}) = L_2(\sqrt{1-x^2}; [-1,1])$. Норму в пространстве W_2^1 введем формулой

$$\|f\|_{W_2^1} = \{\|f(x)\|^2_{L_2(\rho)} + \|f'(x)\|^2_{L_2(\rho^{-1})}\}^{1/2}, \quad f \in W_2^1,$$

где

$$\|f'\|_{L_2(\rho^{-1})} = \left\{ \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}|f'(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

В этом параграфе доказывается, что в пространстве Соболева W_2^1 интерполяционные многочлены (0.3) с узлами (0.1) приближают с такой же скоростью, что и многочлены наилучшего приближения. Это — основной результат данного параграфа; он существенным образом опирается на лемму 2 и на следующие леммы.

Лемма 3. *Для любой функции $f(x) \in W_2^1$ коэффициенты Фурье–Лагранжа $c^T_{k,n}(f)$, $k = \overline{0,n}$, и коэффициенты Фурье $c^T_k(f)$, $k = \overline{0,\infty}$, по многочленам Чебышева* I *рода* (0.2) *связаны соотношениями*

$$c^T_{k,n}(f) = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n}{}'' f(x_j)T_k(x_j) = c^T_k(f) + \sum_{|m|=1}^{\infty} c^T_{k+2nm}(f) \tag{3.1}$$

при любых $k = 0, 1, \dots, n-1$, а при $k = n$

$$c^T_{n,n}(f) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}{}'' (-1)^j f(x_j) = c^T_n(f) + \sum_{m=1}^{\infty} c^T_{(2m+1)n}(f), \tag{3.2}$$

где

$$c^T_r(f) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_r(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad c^T_{-r}(f) = c^T_r(f), \quad r+1 \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Любая функция $f(x) \in W^1_2$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Поэтому (см., напр., [11], гл. X, § 1) она разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по многочленам Чебышева I рода

$$f(x) = \frac{c_0^T(f)}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} c_r^T(f) T_r(x) = {\sum_{r=0}^{\infty}}' c_r^T(f) T_r(x), \quad -1 \le x \le 1. \tag{3.4}$$

Тогда в силу леммы 2 при любых $k = \overline{0, n-1}$ находим

$$c_{k,n}^T(f) = \frac{2}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' f(x_j) T_k(x_j) =$$
$$= {\sum_{r=0}^{n}}' c_r^T(f) \frac{2}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' T_r(x_j) T_k(x_j) + \sum_{r=n+1}^{\infty} c_r^T(f) \frac{2}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' T_r(x_j) T_k(x_j) \equiv \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2. \tag{3.5}$$

Поскольку в первой сумме $T_r(x) T_k(x) \in \mathbb{H}_{2n-1}$, то в силу теоремы 1 из [3] и свойств многочленов Чебышева I рода имеем

$$\sum\nolimits_1 \equiv {\sum_{r=0}^{n}}' c_r^T(f) \frac{2}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' T_r(x_j) T_k(x_j) = {\sum_{r=0}^{n}}' c_r^T(f) \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_r(x) T_k(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} c_k^T(f) \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_k^2(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = c_k^T(f) \text{ при } k = \overline{1, n-1}, \\ \dfrac{c_0^T(f)}{2} \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = c_0^T(f) \text{ при } k = 0 \end{array} \right\} = c_k^T(f) \tag{3.6}$$

при любых $k = 0, 1, \dots, n-1$ ($n \in \mathbb{N}$). Так как во второй сумме $T_r(x) T_k(x) \in \mathbb{H}_{r+k}$, то, используя второе утверждение теоремы 1 [3] и формулу (3.3), находим

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{r=n+1}^{\infty} c_r^T(f) \frac{2}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' T_r(x_j) T_k(x_j) = \sum_{r=n+1}^{\infty} c_r^T(f) \frac{1}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' \{T_{r-k}(x_j) + T_{r+k}(x_j)\} =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} c_{k+2nm}^T(f) \frac{1}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' T_{2nm}(x_j) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2nm-k}^T(f) \frac{1}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' T_{2nm}(x_j) = \sum_{|m|=1}^{\infty} c_{k+2nm}^T(f). \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.5)–(3.7) следует представление (3.1).

При $k = n$ в силу леммы 2 и формулы (3.4) находим

$$c_{n,n}^T(f) = \frac{1}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' f(x_j) T_n(x_j) = {\sum_{r=0}^{n-1}}' c_r^T(f) \frac{1}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' T_r(x_j) T_n(x_j) + c_n^T(f) \frac{1}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' T_n^2(x_j) +$$
$$+ \sum_{r=n+1}^{\infty} c_r^T(f) \frac{1}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' T_r(x_j) T_n(x_j) = {\sum_{r=0}^{n-1}}' c_r^T(f) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_r(x) T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_n^T(f) +$$
$$+ \sum_{r=n+1}^{\infty} c_r^T(f) \frac{1}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' \frac{T_{r-n}(x_j) + T_{r+n}(x_j)}{2} = c_n^T(f) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} c_{n+2nm}^T(f) \frac{1}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' T_{2nm}(x_j) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} c_{-n+2nm}^T(f) \frac{1}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' T_{2nm}(x_j) = c_n^T(f) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{(2m+1)n}^T(f). \tag{3.8}$$

Из соотношений (3.8) следует представление (3.2). □

Лемма 4. *Для любой функции* $f(x) \in W_2^1$ *справедливы оценки*

$$E_{n-1}(f')_{L_2(\rho^{-1})} \leq \left\| \frac{d}{dx}\{f(x) - \mathcal{L}_n(f;x)\} \right\|_{L_2(\rho^{-1})} \leq \frac{\pi}{2} E_{n-1}(f')_{L_2(\rho^{-1})}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

где

$$E_{n-1}(f')_{L_2(\rho^{-1})} = \inf_{f_n \in \mathbb{H}_{n-1}} \|f' - f_n\|_{L_2(\rho^{-1})} = \inf_{f_n \in \mathbb{H}_{n-1}} \left\{ \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} |f'(x) - f_n(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

— наилучшее среднеквадратическое с весом $\rho^{-1} = \sqrt{1-x^2}$ *приближение производной* $f'(x)$ *всевозможными алгебраическими многочленами степени не выше* $n-1$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{L}_n(f;x) \in \mathbb{H}_n$, то нижняя часть неравенств (3.9) очевидна. Докажем верхнюю часть этих неравенств. С этой целью с помощью лемм 2 и 3 запишем представления

$$f(x) - \mathcal{L}_n(f;x) = {\sum_{k=0}^{n}}' [c_k^T(f) - c_{k,n}^T(f)] T_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^T(f) T_k(x), \tag{3.10}$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - \mathcal{L}_n(f;x)\} = \sum_{k=1}^{n} k\{c_k^T(f) - c_{k,n}^T(f)\} U_{k-1}(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} k c_k^T(f) U_{k-1}(x), \tag{3.11}$$

где

$$c_k^T(f) - c_{k,n}^T(f) = \sum_{|m|=1}^{\infty} c_{k+2nm}^T(f) \tag{3.12}$$

при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, а

$$c_n^T(f) - c_{n,n}^T(f) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{(2m+1)n}^T(f) \tag{3.13}$$

при $k = n$. С помощью равенства Парсеваля в пространстве $L_2(\rho^{-1})$ и свойств многочленов Чебышева II рода из соотношений (3.10)–(3.13) находим

$$\left\| \frac{d}{dx}\{f(x) - \mathcal{L}_n(f;x)\} \right\|_{L_2(\rho^{-1})}^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 |c_k^T(f) - c_{k,n}^T(f)|^2 + \frac{\pi n^2}{2} |c_n^T(f) - c_{n,n}^T(f)|^2 +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 |c_k^T(f)|^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \left| \sum_{|m|=1}^{\infty} c_{k+2nm}^T(f) \right|^2 + \frac{\pi n^2}{2} \left| \sum_{m=1}^{\infty} c_{(2m+1)n}^T(f) \right|^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 |c_k^T(f)|^2. \tag{3.14}$$

Для любой абсолютно непрерывной функции $f(x)$ справедлива формула

$$c_k^T(f) = \frac{c_{k-1}^U(f')}{k} = \frac{2}{\pi k} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-t^2} f'(t) U_{k-1}(t) dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Из формул (3.14)–(3.15) с помощью неравенства Коши получаем

$$\left\| \frac{d}{dx}\{f(x) - \mathcal{L}_n(f;x)\} \right\|_{L_2(\rho^{-1})}^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \sum_{|m|=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+2nm)^2} \sum_{|m|=1}^{\infty} |c_{k+2nm-1}^U(f')|^2 \right\} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |c_{(2m+1)n-1}^U(f')|^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_{k-1}^U(f')|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \sum_{|m|=1}^{\infty} \left| \frac{k}{k+2nm} \right|^2 \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{|m|=1}^{\infty} |c_{k+2nm-1}^U(f')|^2 +$$

$$+\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)\frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}|c^U_{(2m+1)n-1}(f')|^2+E^2_{n-1}(f')_{L_2(\rho^{-1})}, \tag{3.16}$$

где $c^U_{-k}(f')=-c^U_{k-2}(f')$ для любых $k=0,\pm1,\ldots$ Используя формулы (4.13) и (4.14) ([7], гл. 1) и свойства наилучших приближений в пространстве $L_2(\rho^{-1})$, из неравенств (3.16) находим верхнюю из оценок (3.9) при любых $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Из лемм 2–4 после несложных вычислений выводится

Теорема 3. *Для любой функции $f(x)\in W^1_2$ в пространстве W^1_2 справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{L}_n(f;x)=f(x)$. При этом погрешность приближенной формулы $f(x)\approx\mathcal{L}_n(f;x)$ может быть оценена неравенствами*

$$E_n(f)_{W^1_2}\leqslant\|f(x)-\mathcal{L}_n(f;x)\|_{W^1_2}\leqslant AE_n(f)_{W^1_2},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{3.17}$$

где A — вполне определенная положительная постоянная, не зависящая от $n\in\mathbb{N}$, а

$$E_n(f)_{W^1_2}=\inf_{f_n\in\mathbb{H}_n}\|f-f_n\|_{W^1_2},\quad f\in W^1_2,\quad n\in\mathbb{N},$$

— наилучшее приближение функции $f(x)\in W^1_2$ всевозможными алгебраическими многочленами степени не выше $n\in\mathbb{N}$ в пространстве W^1_2.

Следует отметить, что в пространстве W^1_2 иногда используются эквивалентные введенной выше нормы

$$\|f\|_{W^1_2}=\|f(x)\|_{L_2(\rho)}+\|f'(x)\|_{L_2(\rho^{-1})}\equiv\|f\|_{(1)}, \tag{3.18}$$

$$\|f\|_{W^1_2}=\|f(x)\|_C+\|f'(x)\|_{L_2(\rho^{-1})}\equiv\|f\|_{(2)}, \tag{3.19}$$

$$\|f\|_{W^1_2}=\left\{|c^T_0(f)|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|kc^T_k(f)|^2\right\}^{1/2}\equiv\|f\|_{(3)}. \tag{3.20}$$

В этом случае из приведенных выше результатов следует, что утверждение теоремы 3 (за исключением конкретного значения постоянной A в формуле (3.17)) сохранится. Проиллюстрируем сказанное в случае нормы (3.20), для норм (3.18) и (3.19) исследование проводится аналогично.

Теорема 3′. *Для любой функции $f\in W^1_2$ при любых $n\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$E_n(f)_{W^1_2}\leqslant\|f(x)-\mathcal{L}_n(f;x)\|_{(3)}\leqslant(1+\varepsilon_n)\,E_n(f)_{W^1_2}, \tag{3.17′}$$

где $0<\varepsilon_n\to0$, $n\to\infty$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что в рассматриваемом случае для наилучшего приближения $E_n(f)_{W^1_2}\equiv E_n(f)_{(3)}$ с учетом $c_k(f_n)=0$ при $k>n$ для любых $f_n\in\mathbb{H}_n$ находим

$$E_n(f)_{(3)}=\inf_{f_n\in\mathbb{H}_n}\|f-f_n\|_{(3)}=\inf_{f_n\in\mathbb{H}_n}\left\{|c^T_0(f-f_n)|^2+\sum_{k=1}^{n}|kc^T_k(f-f_n)|^2+\sum_{k=n+1}^{\infty}|kc^T_k(f)|^2\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}|kc^T_k(f)|^2\right\}^{1/2}=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}|c^U_k(f')|^2\right\}^{1/2}\equiv\|f-f^\circ_n\|_{(3)},$$

$$f^\circ_n=\sum_{k=0}^{n}{}'\,c^T_k(f)T_k(x). \tag{3.21}$$

С другой стороны, в силу (3.10) с помощью лемм 2 и 3 имеем

$$c_k^T(f-\mathcal{L}_n f)=\begin{cases}\sum\limits_{|m|=1}^{\infty} c_{k+2nm}^T(f) & \text{при } k=\overline{0,n-1};\\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} c_{(2m+1)n}^T(f) & \text{при } k=n;\\ c_k^T(f) & \text{при } k=n+1,n+2,\ldots\end{cases} \tag{3.22}$$

Из соотношений (3.20)–(3.22) после простых, но громоздких вычислений легко выводится требуемое утверждение. □

4. Применения к регулярным интегральным уравнениям

Приближенное решение уравнения (0.5) ищется в виде многочлена

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k l_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k x^k, \tag{4.1}$$

где $l_k(x)=l_{k,n}(x)$ – определенные выше фундаментальные многочлены Лагранжа для узлов (0.1). Неизвестные коэффициенты $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (а следовательно, и $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n$) в силу квадратурной формулы (0.8) определяются (см. также формулу Кленшоу–Куртиса [1], [16]) из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\alpha_i+\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' h(x_i,x_k)\alpha_k=f(x_i),\quad i=\overline{0,n},\quad x_r=\cos\frac{r\pi}{n}. \tag{4.2}$$

Для квадратурного метода (0.5), (4.1), (4.2) справедливы следующие результаты.

Теорема 4. *Пусть уравнение* (0.5) *однозначно разрешимо в весовом пространстве Лебега* $L_2(\rho)=L_2((1-x^2)^{-1/2};[-1,1])$. *Тогда при всех* $n\in\mathbb{N}$ *таких, что*

$$q_n\equiv d_1\{E_n^x(h)_C+E_{n-1}^t(h)_C\}<1, \tag{4.3}$$

СЛАУ (4.2) *имеет единственное решение* $\alpha_0^*,\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*$ $(\beta_0^*,\beta_1^*,\ldots,\beta_n^*)$. *Приближенные решения*

$$\varphi_n^*(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^* l_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k^* x^k \tag{4.1*}$$

при $n\to\infty$ *сходятся к решению* $\varphi^*(x)$ *уравнения* (0.5) *в пространстве* $L_2(\rho)$ *и в узлах* (0.1) *со скоростями, определяемыми неравенствами соответственно*

$$\|\varphi^*-\varphi_n^*\|_{L_2(\rho)}\leqslant d_2\{E_n^x(h)_C+E_{n-1}^t(h)_C+E_n(f)_C\}, \tag{4.4}$$

$$\max_{0\leqslant k\leqslant n}|\varphi^*(x_k)-\alpha_k^*|\leqslant d_3\{E_n^x(h)_C+E_{n-1}^t(h)_C+E_n(f)_C\}. \tag{4.5}$$

Следствие 1. В условиях теоремы 4 для погрешности метода (0.5), (4.1), (4.2), (4.1*) в пространстве $C=C[-1,1]$ справедлива оценка

$$\|\varphi^*(x)-\varphi_n^*(x)\|_C\leqslant d_4\{E_n^x(h)_C+E_{n-1}^t(h)_C+E_n(f)_C\}\ln n. \tag{4.6}$$

Если же $h(x,t)$ (по каждой из переменных) и $f(x)$ удовлетворяют условию Дини–Липшица, то метод сходится равномерно со скоростью

$$\|\varphi^*-\varphi_n^*\|_C\leqslant d_5\{[\omega_x(h;n^{-1})+\omega_t(h;n^{-1})+\omega(f;n^{-1})]\ln n\}, \tag{4.7}$$

где $\omega(f;\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$ с шагом $\delta\in[0,2]$, а $\omega_x(h;\delta)$ и $\omega_t(h;\delta)$ — частные модули непрерывности функции $h(x,t)$ по переменным x и t соответственно.

Следствие 2. Пусть функции $f(x)$ и $h(x,t)$ (по каждой из переменных) принадлежат W^rH^α ($r+1 \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leqslant 1$). Тогда в условиях теоремы 4 метод (0.5), (4.1), (4.2), (4.1*) сходится в среднем, в узлах и равномерно со скоростями, определяемыми соответственно неравенствами

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{L_2(\rho)} \leqslant \frac{d_6}{n^{r+\alpha}}, \quad \max_{0\leqslant i\leqslant n} |\varphi^*(x_i) - \alpha_i^*| \leqslant \frac{d_7}{n^{r+\alpha}}, \quad \|\varphi^* - \varphi_n^*\|_C \leqslant \frac{d_8 \ln n}{n^{r+\alpha}}, \tag{4.8}$$

причем оценки (4.8) не могут быть улучшены в смысле порядка.

Здесь, как и выше, $E_n(f)_C$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ всевозможными многочленами из $\mathbb{H}_n$, а $E_n^x(h)_C$ и $E_n^t(h)_C$ — соответствующие частные наилучшие равномерные приближения функции $h(x,t)$ по переменным x и t.

Заметим, что некоторые из этих результатов анонсированы в тезисах докладов [17], [18], а при их доказательстве существенным образом использована предложенная в [4] операторная схема обоснования метода механических квадратур. Поэтому ниже в первую очередь остановимся на отличительных от [4] моментах доказательства.

Доказательство теоремы 4. Пусть $L_2(\rho)$ — использованное выше пространство Лебега с весом Чебышева $\rho = \rho(t) = (1-t^2)^{-1/2}$, $\mathbb{H}_n$ — его $(n+1)$-мерное подпространство всех алгебраических многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$, а $\mathcal{L}_n : L_2(\rho) \to \mathbb{H}_n \subset L_2(\rho)$ — определенный по формулам (0.1)–(0.4) оператор проектирования. Тогда уравнения (0.5) и (4.2) эквивалентны соответственно линейным операторным уравнениям

$$K\varphi \equiv \varphi + H_0 h\varphi = f \quad (\varphi, f \in L_2(\rho)), \tag{4.9}$$

$$K_n\varphi_n \equiv \varphi_n + \mathcal{L}_n H_0 \mathcal{L}_n^t(h\varphi_n) = \mathcal{L}_n f \quad (\varphi_n, \mathcal{L}_n f \in \mathbb{H}_n), \tag{4.10}$$

где $H_0\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \rho(t)\varphi(t)dt$, а $\mathcal{L}_n^t$ означает, что оператор $\mathcal{L}_n$ применяется к функции $h(x,t)\varphi_n(t)$ по переменной $t \in [-1,1]$.

Докажем, что уравнения (4.9) и (4.10) близки в смысле теоремы 7 ([5], гл. 1). В силу теоремы 2 для правых частей этих уравнений справедлива оценка

$$\delta_n \equiv \|f - \mathcal{L}_n f\|_{L_2(\rho)} \leqslant 2\sqrt{\pi} E_n(f)_C, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Докажем близость операторов $K : L_2(\rho) \to L_2(\rho)$ и $K_n : \mathbb{H}_n \to \mathbb{H}_n \subset L_2(\rho)$. В силу (4.9) и (4.10) для любого $\varphi_n \in \mathbb{H}_n$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} K\varphi_n - K_n\varphi_n &= H_0 h\varphi_n - \mathcal{L}_n H_0 \mathcal{L}_n^t(h\varphi_n) = \\ &= (H_0 h\varphi_n - \mathcal{L}_n H_0 h\varphi_n) + \mathcal{L}_n H_0 (h - Q)\varphi_n + \mathcal{L}_n H_0 \mathcal{L}_n^t[(h-Q)\varphi_n] \equiv \\ &\equiv a_n(x) + b_n(x) + c_n(x), \quad x \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

где $Q(x,t)$ — здесь и далее алгебраический многочлен наилучшего равномерного приближения степени не выше $n-1$ функции $h(x,t)$ по переменной $t \in [-1,1]$, а смысл обозначений $a_n(x)$, $b_n(x)$, $c_n(x)$ очевиден.

С помощью следствия 1 леммы 2 и неравенства Буняковского находим

$$\|a_n(x)\|_{L_2(\rho)} \leqslant 2\sqrt{\pi} E_n(H_0 h\varphi_n) \leqslant 2\sqrt{\pi} E_n^x(h)_C H_0(|\varphi_n|), \quad \varphi_n \in \mathbb{H}_n,$$

где

$$H_0(|\varphi_n|) = \int_{-1}^{1} \rho(t)|\varphi_n(t)|dt \leqslant \left\{ \int_{-1}^{1} \rho(t)|\varphi_n(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-1}^{1} \rho(t)dt \right\}^{1/2} = \sqrt{\pi}\|\varphi_n\|_{L_2(\rho)}.$$

Поэтому

$$\|a_n(x)\|_{L_2(\rho)} \leqslant 2\pi E_n^x(h)_C \|\varphi_n\|_{L_2(\rho)}, \quad \varphi_n \in \mathbb{H}_n. \tag{4.13}$$

С помощью леммы 2 для второго слагаемого из правой части (4.12) находим

$$\|b_n(x)\|_{L_2(\rho)} \leqslant \sqrt{\pi}\|H_0(h-Q)\varphi_n\|_C \leqslant \sqrt{\pi}E^t_{n-1}(h)_C H_0(|\varphi_n|) \leqslant \pi E^t_{n-1}(h)_C\|\varphi_n\|_{L_2(\rho)}, \quad \varphi_n \in \mathbb{H}_n. \tag{4.14}$$

С учетом точности (см., напр., [3]) использованной выше квадратурной формулы и леммы 2 находим

$$\|c_n(x)\|_{L_2(\rho)} \leqslant \sqrt{\pi}\|H_0\mathcal{L}^t_n[(Q-h)\varphi_n]\|_C = \sqrt{\pi}\Big\|\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' [Q(x,x_k)-h(x,x_k)]\varphi_n(x_k)\Big\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\pi}E^t_{n-1}(h)_C\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' |\varphi_n(x_k)|, \quad \varphi_n \in \mathbb{H}_n,$$

где в силу следствия 2 леммы 2 и неравенства Коши имеем

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' |\varphi_n(x_k)| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{n}}\Big\{\sum_{k=0}^{n}{}'' |\varphi_n(x_k)|^2\Big\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\Big\{\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n}{}'' |\varphi_n(x_k)|^2\Big\}^{1/2} \leqslant \sqrt{2\pi}\|\varphi_n\|_{L_2(\rho)}, \quad \varphi_n \in \mathbb{H}_n.$$

Поэтому

$$\|c_n(x)\|_{L_2(\rho)} \leqslant \pi\sqrt{2}E^t_{n-1}(h)_C\|\varphi_n\|_{L_2(\rho)}, \quad \varphi_n \in \mathbb{H}_n. \tag{4.15}$$

Из соотношений (4.12)–(4.15) для любых $\varphi_n \in \mathbb{H}_n$ следует оценка

$$\|K\varphi_n - K_n\varphi_n\|_{L_2(\rho)} \leqslant \pi\{2E^x_n(h)_C + (1+\sqrt{2})E^t_{n-1}(h)_C\}\|\varphi_n\|_{L_2(\rho)},$$

поэтому

$$\varepsilon_n \equiv \|K-K_n\|_{L_2(\rho)\to\mathbb{H}_n\subset L_2(\rho)} \leqslant \pi\{2E^x_n(h)_C + (1+\sqrt{2})E^t_{n-1}(h)_C\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.16}$$

В условиях теоремы оператор $K: L_2(\rho) \to L_2(\rho)$ непрерывно обратим. Отсюда и из (4.16) следует, что для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого, неравенство (4.3) выполняется. Поэтому в силу соотношений (4.11) и (4.16) из теоремы 7 ([5], гл. 1) следует первое утверждение теоремы 4.

Далее, из тождеств

$$\varphi^*(x) \equiv f(x) + H_0(h\varphi^*;x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.17}$$

$$\varphi^*_n(x) \equiv \mathcal{L}_n(f;x) + \mathcal{L}_n\{H_0(\mathcal{L}^t_n(h\varphi^*_n);x)\}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.18}$$

где $\varphi^*(x)$ и $\varphi^*_n(x)$ — решения уравнений (4.9) и (4.10) соответственно, в узлах (0.1) находим тождество

$$\varphi^*(x_j) - \varphi^*_n(x_j) = H_0\{h(\varphi^*-\varphi^*_n);x_j\} + H_0\{(h-Q)\varphi^*_n;x_j\} +$$

$$+ \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \{Q(x_j,x_k)-h(x_j,x_k)\}\varphi^*_n(x_k), \quad j=\overline{0,n}. \tag{4.19}$$

Из (4.19), как и при доказательстве оценки (4.16), находим

$$\max_{0\leqslant j\leqslant n}|\varphi^*(x_j)-\varphi^*_n(x_j)| \leqslant \sqrt{\pi}\|h\|_C\|\varphi^*-\varphi^*_n\|_{L_2(\rho)} +$$

$$+ \sqrt{\pi}E^t_{n-1}(h)_C\|\varphi^*_n\|_{L_2(\rho)} + E^t_{n-1}(h)_C\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' |\varphi^*(x_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\pi}\|h\|_C\|\varphi^*-\varphi^*_n\|_{L_2(\rho)} + \sqrt{\pi}E^t_{n-1}(h)_C\|\varphi^*_n\|_{L_2(\rho)} + \sqrt{2\pi}E^t_{n-1}(h)_C\|\varphi^*_n\|_{L_2(\rho)} =$$

$$= \sqrt{\pi}\|h\|_C\|\varphi^*-\varphi^*_n\|_{L_2(\rho)} + \sqrt{\pi}(1+\sqrt{2})E^t_{n-1}(h)\|\varphi^*_n\|_{L_2(\rho)}, \quad j=\overline{0,n}, \tag{4.20}$$

где $\|h\|_C = \|h(x,t)\|_{C[-1,1]^2} = \max\limits_{-1\leqslant x,t\leqslant 1} |h(x,t)|$.

В силу (4.4) имеем $\|\varphi_n^*\|_{L_2(\rho)} = O(1)$, $n\to\infty$. Поэтому из соотношений (4.4) и (4.20) следует второе утверждение теоремы 4 с оценкой (4.5). $\square$

Доказательство следствий. В силу теоремы 4 для любого $n\geqslant n_0$ справедливо тождество

$$\varphi^*(x) - \varphi_n^*(x) = \{\varphi^*(x) - \mathcal{L}_n(\varphi^*;x)\} + \mathcal{L}_n(\varphi^* - \varphi_n^*;x), \quad -1\leqslant x\leqslant 1. \tag{4.21}$$

Из (4.21) с учетом леммы 1 и теоремы 1 в пространстве $C = C[-1,1]$ находим

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_C \leqslant 2\|\mathcal{L}_n\|_{C\to C} E_n(\varphi^*)_C + \|\mathcal{L}_n\|_{C\to C} \max_{0\leqslant j\leqslant n} |\varphi^*(x_j) - \varphi_n^*(x_j)|, \tag{4.22}$$

где в силу тождества (4.17) имеем

$$E_n(\varphi^*)_C \leqslant E_n(f)_C + E_n^x(h)_C H_0(|\varphi^*|) \leqslant \sqrt{\pi} E_n^x(h)_C \|\varphi^*\|_{L_2(\rho)} + E_n(f)_C. \tag{4.23}$$

Из соотношений (4.22), (4.23) и оценки (4.5) следует первое утверждение следствия 1, т. е. оценка (4.6), а из нее, в силу известной первой теоремы Джексона (см., напр., [10]–[12]), легко получается второе утверждение следствия 1 с оценкой (4.7).

Утверждение следствия 2 с оценками (4.8) следует из теоремы 4 с учетом известной второй теоремы Джексона [10]–[12]. Неулучшаемость по порядку оценок (4.8) устанавливается по схеме доказательства соответствующих результатов по оптимизации квадратурных методов из ([5], гл. 4).

Заметим, что в теореме 4 и ее следствиях через $d_1, d_2, \dots, d_8$ обозначены вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от $n\in\mathbb{N}$ и вычисляемые в явном виде через норму обратного оператора K^{-1} из (4.9) в пространстве $L_2(\rho)$. В связи с этим (см. также [4]) полезной может оказаться следующая

Лемма 5. *Пусть выполняется одно из следующих условий*:

а) симметричная *функция*

$$h^+(x,t) = \frac{h(x,t)+h(t,x)}{2}, \quad -1\leqslant x,t\leqslant 1,$$

разлагается в сходящийся хотя бы в пространстве $L_2(\rho(x)\rho(t);[-1,1]^2)$ симметричный *ряд*

$$h^+(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)a_k(t), \quad -1\leqslant x,t\leqslant 1, \tag{4.24}$$

где $\{a_k(s)\}_1^\infty$ *— линейно независимая система функций из* $L_2(\rho;[-1,1])$;

б) $\lambda_{\max}(H^+) = \max\limits_{k=0,1,\dots} \lambda_k(H^+) < 1$, *где* $\lambda_k(H^+)$ *— собственные числа симметричного интегрального оператора* $H^+ = H_0 h^+ : L_2(\rho)\to L_2(\rho)$;

в) $\lambda_{\min}(H^+) = \min\limits_{k=0,1,\dots} \lambda_k(H^+) > -1$.

Тогда интегральный оператор $K : L_2(\rho)\to L_2(\rho)$ *из* (4.9) *непрерывно обратим, причем*

$$\|K^{-1}\|_{L_2(\rho)\to L_2(\rho)} \leqslant M_i < \infty \quad (i = a,b,c), \tag{4.25}$$

где $M_a = 1$, $M_b = \frac{1}{1-\lambda_{\max}(H^+)}$, $M_c = \frac{1}{1+\lambda_{\min}(H^+)}$ *в случаях соответственно* а), б) *и* в).

Следствие. Пусть $h(x,t)$ — кососимметричное ядро. Тогда справедливо утверждение леммы с постоянной $M_a = 1$.

Доказательство. Представим ядро $h(x,t)$ в виде

$$h(x,t) = h^+(x,t) + h^-(x,t), \quad h^\pm(x,t) = \frac{h(x,t) \pm h(t,x)}{2}.$$

Тогда

$$K\varphi \equiv \varphi + H\varphi = \varphi + H^+\varphi + H^-\varphi = G\varphi + T\varphi, \quad \varphi \in L_2(\rho), \tag{4.26}$$

где

$$G\varphi = \varphi + H^-\varphi, \quad T\varphi = H^+\varphi, \quad H^\pm\varphi = H_0 h^\pm \varphi. \tag{4.27}$$

В силу (4.26) и (4.27), как и в ([7], гл. 4), для любой функции $\varphi \in L_2(\rho)$ находим $(G\varphi, \varphi) = (\varphi,\varphi) + (H^-\varphi,\varphi) = (\varphi,\varphi)$. Поэтому

$$(K\varphi,\varphi) = \|\varphi\|^2_{L_2(\rho)} + (T\varphi,\varphi), \quad \varphi \in L_2(\rho). \tag{4.28}$$

В силу (4.24) для любой функции $\varphi \in L_2(\rho)$ имеем

$$(T\varphi,\varphi) = \int_{-1}^{1} \rho(x)\varphi(x)dx \int_{-1}^{1} \rho(t)h^+(x,t)\varphi(t)dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} \rho(x)a_k(x)\varphi(x)dx \int_{-1}^{1} \rho(t)a_k(t)\varphi(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \geqslant 0,$$
$$b_k = \int_{-1}^{1} \rho(s)a_k(s)\varphi(s)ds.$$

Отсюда и из (4.28) следует оценка

$$(K\varphi,\varphi) \geqslant (\varphi,\varphi), \quad \varphi \in L_2(\rho). \tag{4.29}$$

Поскольку

$$\|K\|_{L_2(\rho)\to L_2(\rho)} \leqslant 1 + \left\{ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \rho(x)\rho(t)|h(x,t)|^2 dx\, dt \right\}^{1/2} < \infty, \tag{4.30}$$

то в силу (4.29) оператор $K : L_2(\rho) \to L_2(\rho)$ в случае а) обладает требуемым свойством.

Для доказательства такого утверждения в случаях б) и в) заметим, что оператор $H^+ = T$ является самосопряженным и вполне непрерывным в гильбертовом пространстве $L_2(\rho)$. Такой оператор имеет не более чем счетное множество вещественных собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ Тогда для любой функции $\varphi \in L_2(\rho)$ легко показать, что

$$(H^+\varphi,\varphi) \geqslant \max\{\lambda_{\min}(H^+), -\lambda_{\max}(H^+)\}(\varphi,\varphi). \tag{4.31}$$

Из (4.28)–(4.31) с учетом сказанного выше находим утверждение леммы. Утверждение следствия в силу $h^+(x,t) = 0$ становится очевидным. □

Замечание. Все утверждения теоремы 4 и ее следствий в случае метода коллокации решения уравнения (0.5) сохраняются и несколько усиливаются, например, в этом случае ядро $h(x,t)$ может быть и слабосингулярным, а в оценках величина $E^t_{n-1}(h)_C$ отсутствует.

5. Применения к интегральному уравнению I рода

Многочисленные прикладные задачи (см., напр., [6], [7] и библиографию в них) приводят к необходимости решения уравнения вида

$$A\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|x-t|}{\sqrt{1-t^2}}\varphi(t)dt + V(\varphi;x) = f(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5.1}$$

где $f(x)$ — известная непрерывная функция, V — известный линейный (в том числе интегральный) оператор, $\varphi(t)$ — искомая функция, а слабосингулярный интеграл понимается как несобственный.

Основная трудность в решении уравнения (5.1) — его некорректность во всех известных функциональных пространствах. В [6], [7] эта трудность преодолена путем выбора *пары* функциональных пространств $(L_2(\rho); W_2^1)$, в которой задача решения уравнения (5.1) ставится корректно, где $L_2(\rho), \rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, и W_2^1 — определенные выше весовые пространства Лебега и Соболева соответственно. Ниже предлагается реализация указанного подхода применительно к коллокационному методу решения уравнения (5.1) на основе интерполяционного процесса (0.1)–(0.4).

Приближенное решение уравнения (5.1) ищется в виде многочлена

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\, T_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\beta_k x^k = \sum_{k=0}^{n}\gamma_k l_k(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.2}$$

где $l_k(x)$ — определенные выше фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам (0.1). Неизвестные постоянные $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ $(k = \overline{0,n})$ будем определять из СЛАУ соответственно

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\{\lambda_k T_k(x_j) + V(T_k;x_j)\} = f(x_j), \quad j = \overline{0,n}, \tag{5.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\beta_k\{G(x^k;x_j) + V(x^k;x_j)\} = f(x_j), \quad j = \overline{0,n}, \tag{5.4}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\gamma_k\{a_{jk} + V(l_k;x_j)\} = f(x_j), \quad j = \overline{0,n}, \tag{5.5}$$

где узлы x_j определены в (0.1), а

$$G\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\ln|x-t|}{\sqrt{1-t^2}}\varphi(t)dt, \quad a_{jk} = G(l_k;x_j),$$
$$\lambda_k = \{-\ln 2 \text{ при } k=0; \ \ -\tfrac{1}{k} \text{ при } k = 1,2,\dots\},$$

причем коэффициенты a_{jk} вычисляются точно ([6], гл. 1, п. 4).

Для вычислительной схемы (5.1)–(5.5) справедлива

Теорема 5. *Пусть выполнены условия*

а) *оператор* $V : L_2(\rho) \longrightarrow W_2^1$ *вполне непрерывен*;

б) *уравнение* (5.1) *имеет единственное решение* $\varphi^*(x) \in L_2(\rho)$ *при любой правой части* $f(x) \in W_2^1$.

Тогда при всех $n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}$ *каждая из СЛАУ* (5.3)–(5.5) *имеет единственное решение. Приближенные решения* (5.2) *сходятся к точному решению* $\varphi^*(x)$ *в пространстве* $L_2(\rho)$ *со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_n(\varphi^*)_{L_2(\rho)} \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\|_{L_2(\rho)} \leqslant a_1 E_n(\varphi^*)_{L_2(\rho)}, \tag{5.6}$$

$$E_n(G\varphi^*)_{W_2^1} \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\|_{L_2(\rho)} \leqslant b_1\, E_n(G\varphi^*)_{W_2^1}, \tag{5.7}$$

где $E_n(\varphi^*)_{L_2(\rho)} = \rho(\varphi^*, \mathbb{H}_n)_{L_2(\rho)}$, $E_n(G\varphi^*)_{W_2^1} = \rho(G\varphi^*, \mathbb{H}_n)_{W_2^1}$, *а* a_1 *и* b_1 *— положительные постоянные, не зависящие от* $n \in \mathbb{N}$.

Следствие. Пусть оператор $V : L_2(\rho) \longrightarrow W_2^1$ и правая часть $f \in W_2^1$ уравнения (5.1) таковы, что его решение $\varphi^*(x) = \varphi^*(\cos\theta) \equiv \widetilde{\varphi}(\theta) \in W^r H_2^{\omega}[0, 2\pi]$, где $\omega = \omega(\delta)$ — модуль непрерывности в $L_2(0,\pi)$ с шагом $\delta \in (0,\pi], r+1 \in \mathbb{N}$. Тогда метод (5.1)–(5.5) сходится в пространстве $L_2(\rho)$ со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{L_2(\rho)} = O\biggl\{\frac{1}{n^r}\omega\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\biggr\}. \tag{5.8}$$

Если же $\widetilde{\varphi}(\theta) \in W^r H_\alpha$ $(r+1 \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha \leqslant 1)$, то метод сходится в пространствах $L_2(\rho)$ и C соответственно со скоростями

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{L_2(\rho)} = O\Bigl(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\Bigr), \quad \|\varphi^* - \varphi_n\|_C = O\Bigl(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\Bigr). \tag{5.9}$$

Схема доказательства. В силу условий теоремы и теории Рисса–Шаудера [8] оператор $A : L_2(\rho) \longrightarrow W_2^1$ непрерывно обратим. Обозначим через X_n и Y_n множество $\mathbb{H}_n$, снабженное нормами пространств $L_2(\rho)$ и W_2^1 соответственно; через P_n обозначим оператор $\mathcal{L}_n$ из (0.3), рассматриваемый как оператор из W_2^1 в подпространство $Y_n \subset W_2^1$. Тогда каждая из СЛАУ (5.3)–(5.5) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n\varphi_n \equiv P_n G\varphi_n + P_n V\varphi_n = P_n f \quad (\varphi_n \in X_n, \quad P_n f \in Y_n), \tag{5.10}$$

где в силу ([6], гл. 1) и результатов п. 3 $A_n = P_n A : X_n \longrightarrow Y_n$ — непрерывный оператор при любых $n \in \mathbb{N}$. Дальше с помощью результатов пп. 1–3 доказывается, что операторные уравнения (5.1) и (5.10) близки в смысле теоремы 7 ([5], гл. 1), откуда и следует утверждение теоремы с оценками (5.6) и (5.7).

Утверждение следствия с оценками (5.8)–(5.9) устанавливается на основе предложенных в [4]–[7] методов исследования и результатов пп. 1–3. Ввиду излишней громоздкости подробные выкладки здесь не приводятся.

Заметим, что для уравнения (0.6) теорема 5 и ее следствие сохраняются и несколько усиливаются; более того, результаты, аналогичные им, справедливы также для квадратурного метода решения уравнения (0.6). Такое утверждение выводится из соответствующих результатов ([6], гл. 1) и результатов пп. 1–3, при этом системы (5.3)–(5.5) несколько модифицируются, например, СЛАУ (5.5) заменяется на СЛАУ

$$\sum_{k=0}^{n} a_{jk}\gamma_k + \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' h(x_j, x_k)\gamma_k = f(x_j), \quad j = \overline{0,n}, \tag{5.5$'$}$$

где коэффициенты a_{jk} определены выше.

6. Применение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

В этом параграфе приводятся результаты по решению дифференциального уравнения (0.7) методом коллокации, основанным на исследованном выше интерполяционном процессе (0.1)–(0.4). Суть дела достаточно проиллюстрировать для краевой задачи

$$A\varphi \equiv \varphi''(x) + a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) = f(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{6.1}$$

$$\varphi(-1) = \varphi(+1) = 0, \tag{6.2}$$

где $a(x)$, $b(x)$ и $f(x)$ — известные функции из класса $C = C[-1,1]$, а $\varphi(x)$ — искомая функция.

Приближенное решение задачи (6.1)–(6.2) ищется в виде многочлена

$$\varphi_n(x) = (1-x^2)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{6.3}$$

неизвестные коэффициенты $\alpha_k, k=\overline{0,n}$, которого определяются из условий

$$A(\varphi_n; x_j) = f(x_j), \quad j=\overline{0,n}. \tag{6.4}$$

В силу линейности оператора A эти условия эквивалентны следующей СЛАУ:

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\{y_k''(x_j)+a(x_j)y_k'(x_j)+b(x_j)y_k(x_j)\} = f(x_j), \quad j=\overline{0,n}, \tag{6.5}$$

где

$$y_k(x) = (1-x^2)x^k, \;\; k=\overline{0,n}; \quad x_j=\cos\frac{j\pi}{n}, \;\; j=\overline{0,n}. \tag{6.6}$$

Ниже, кроме пространства C, нам понадобятся также весовые пространства Лебега $L_2 \equiv L_2(q(x);[-1,1])$ и Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^2 \equiv \{\varphi\in W_2^2(q(x);[-1,1]);\ \varphi(\pm1)=0\}$ соответственно с нормами

$$\|f\|_{L_2} = \left\{\int_{-1}^{1} q(x)|f(x)|^2dx\right\}^{1/2}, \quad f\in L_2;$$

$$\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} = \left\{\int_{-1}^{1} q(x)|\varphi''(x)|^2dx\right\}^{1/2} = \|\varphi''\|_{L_2}, \quad \varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^2, \quad q(x)\leqslant\rho(x).$$

Для вычислительной схемы (6.1)–(6.6) справедливы следующие утверждения.

Теорема 6. *Если краевая задача* (6.1)–(6.2) *имеет единственное решение* $\varphi^*(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^2$ *при любой правой части* $f(x)\in L_2$, *то при всех* $n\in\mathbb{N}$, *начиная с некоторого* $n_0\in\mathbb{N}$, *СЛАУ* (6.5), (6.6) *имеет единственное решение* $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. *Приближенные решения* (6.3) *при* $n\to\infty$ *сходятся к точному решению* $\varphi^*(x)$ *в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ *со скоростью*

$$\|\varphi^*-\varphi_n\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} = O\{E_n(\varphi^{*\prime\prime})_C\}.$$

Следствие. Приближенные решения сходятся к точному решению в том смысле, что

$$\max\{\|\varphi^*(x)-\varphi_n(x)\|_C;\|\varphi^{*\prime}(x)-\varphi_n'(x)\|_C\} = O\{E_n(\varphi^{*\prime\prime})_C\}.$$

Если, кроме того, функции $a(x),b(x),f(x)\in W^rH^\alpha$ ($r+1\in\mathbb{N}$, $0<\alpha\leqslant1$), то метод сходится со скоростями, определяемыми соотношениями

$$\|\varphi^{*\prime\prime}(x)-\varphi_n''(x)\|_{L_2} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right);$$

$$\max\{\|\varphi^*(x)-\varphi_n(x)\|_C;\|\varphi^{*\prime}(x)-\varphi_n'(x)\|_C\} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right);$$

$$\|\varphi^{*\prime\prime}(x)-\varphi_n''(x)\|_C = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1/2}}\right), \;\; r+\alpha>\frac{1}{2}.$$

Теорема 7. *В условиях теоремы* 6 *справедливы соотношения*

$$\max_{0\leqslant j\leqslant n}|\varphi^{*\prime\prime}(x_j)-\varphi_n''(x_j)| = O\{E_n(\varphi^{*\prime\prime})_C\}\to0, \quad n\to\infty;$$

$$\|\varphi^{*\prime\prime}(x)-\varphi_n''(x)\|_C = O\{E_n(\varphi^{*\prime\prime})_C\ln n\}, \quad n\to\infty.$$

Следствие 1. Если функции $a(x)$, $b(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условию Дини–Липшица, то метод (6.1)–(6.6) сходится в том смысле, что

$$\|\varphi^{*\prime\prime}(x) - \varphi_n''(x)\|_C = O\{\omega(a; 1/n) + \omega(b; 1/n) + \omega(f; 1/n)\} \ln n \to 0, \quad n \to \infty,$$

где $\omega(\psi; \delta)$ — модуль непрерывности функции $\psi(x) \in C$ с шагом $\delta \in (0, 2]$.

Следствие 2. В условиях следствия теоремы 6 метод (6.1)–(6.6) сходится со скоростью

$$\|\varphi^{*\prime\prime}(x) - \varphi_n''(x)\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{6.7}$$

неулучшаемой в смысле порядка.

Доказательства теорем 6 и 7. Существуют по крайней мере два способа доказательства этих теорем и их следствий. Согласно *первому способу* они доказываются с помощью общей теории приближенных методов функционального анализа [4]–[8], теории приближения функций [9]–[12] и с помощью установленных выше результатов для интерполяционного процесса (0.1)–(0.4). Подробные выкладки ввиду их излишней громоздкости здесь (а также во втором способе) не приводятся.

Согласно *второму способу* обозначим через $g(x,t)$ функцию Грина дифференциального оператора $\varphi''(x)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, при краевых условиях (6.2). Задача (6.1)–(6.2) эквивалентна интегральному уравнению вида (0.5) относительно новой искомой функции $\psi(x) = \varphi''(x)$. Требуемые утверждения следуют из результатов п. 4 для уравнения (0.5) с ядром $h(x,t) = a(x)\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} + b(x)g(x,t)$.

В обоих случаях неулучшаемость по порядку оценки (6.7) выводится из соответствующего результата ([5], гл. 4, п. 8.6) с использованием при этом установленных выше структурных и аппроксимативных свойств интерполяционного процесса (0.1)–(0.4). $\square$

Литература

1. Васильев Н.И., Клоков Ю.А., Шкерстена А.Я. *Применение полиномов Чебышева в численном анализе.* – Рига: Зинатне, 1984. – 240 с.
2. Турецкий А.Х. *Теория интерполирования в задачах.* – Минск: Высш. школа, 1968. – 328 с.
3. Ермолаева Л.Б. *Об одной квадратурной формуле* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 3. – С. 25–28.
4. Габдулхаев Б.Г. *К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 12. – С. 21–39.
5. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
6. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений* I *рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
7. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
9. Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.
10. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.
11. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
12. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
13. Ehlich H., Zeller K. *Auswertung der Normen von Interpolations Operatoren* // Math. Ann. – 1966. – H. 164. – S. 105–112.

14. Vertesi P. *Optimal Lebesque constants for polynomial interpolation* // Constructive theory of functions. – 84. – Sofia: Publ. house of the Bulgarian Academy of sciences, 1984. – P. 882–890.
15. Ермолаева Л.Б. *Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений методом подобластей*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 154 с.
16. Clenshaw C.W., Curtis A.R. *A method for numerical integration in an automatic computer* // Numer. Math. – 1960. – Bd. 2. – S. 197–205.
17. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б., Назипов И.Т. *К обоснованию квадратурного метода решения интегральных уравнений* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва, 2003. – Т. 19. – С. 60–62.
18. Ермолаева Л.Б. *Об обосновании квадратурного метода решения интегральных уравнений* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва, 2004. – Т. 25. – С. 112–114.

Казанский государственный университет

Поступила 24.10.2004