ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 517.956

В.Ф. ВОЛКОДАВОВ, В.Н. ЗАХАРОВ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Известно [1], [2], что экстремальные свойства решений дифференциальных уравнений позволяют доказать единственность решений краевых задач для этих уравнений. Такие свойства были доказаны для ряда уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными [3], [4]. В данной работе рассматривается уравнение третьего порядка в трехмерном пространстве

$$\mathcal{U}_{xyz}=0. \tag{1}$$

Введем обозначения

$$G^+=\{(x,y,z):0<x-y<z<h,\ h>0\},\quad G^-=\{(x,y,z):0<z<x-y<h\},$$
$$G_1=\{(x,y,z):y=0,\ 0\le x\le z\le h\},\qquad G_2=\{(x,y,z):x=h,\ 0\le h-y\le z\le h\},$$
$$G_3=\{(x,y,z):z=x-y,\ 0\le y\le x\le h\},\quad G_4=\{(x,y,z):z=0,\ 0\le y\le x\le h\},$$
$$H^+=\{(x,y,z):0<x<z<h,\ 0<x<y<+\infty\},$$
$$H^-=\{(x,y,z):0<x<z<h,\ 0<y<x<h\},$$
$$H_1=\{(x,y,z):y=x,\ 0\le x\le z\le h\},\quad H_2=\{(x,y,z):z=x,\ 0\le x\le\ y\le h\},$$
$$H_3=\{(x,y,z):x=0,\ 0\le y\le+\infty,\ 0\le z\le h\},$$
$$H_4=\{(x,y,z):z=h,\ 0\le x\le h,\ 0\le y<+\infty\},$$

$$\mathcal{U}(x,y,z)\big|_{G_1}=f_1(x,z), \tag{2}$$
$$\mathcal{U}(x,y,z)\big|_{G_2}=g_1(y,z), \tag{3}$$
$$\mathcal{U}(x,y,z)\big|_{G_3}=\tau_1(x,y), \tag{4}$$
$$\mathcal{U}_y(x,y,z)\big|_{G_3}=\omega(x,z), \tag{5}$$
$$\mathcal{U}(x,y,z)\big|_{G_4}=\varphi_1(x,y), \tag{6}$$
$$\mathcal{U}(x,y,z)\big|_{H_1}=\tau_2(x,z), \tag{7}$$
$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\overline{m}}\Big|_{H_1}=\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y}\right)\Big|_{H_1}=\nu(x,z), \tag{8}$$

где $\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\overline{m}}$ — производная по нормам к плоскости $y=x$, $\overline{m}=(1,-1,0)$,

$$\mathcal{U}(x,y,z)\big|_{H_2}=g_2(x,y), \tag{9}$$
$$\mathcal{U}(x,y,z)\big|_{H_3}=\varphi_2(y,z), \tag{10}$$
$$\mathcal{U}(x,y,z)\big|_{H_4}=f_2(x,y). \tag{11}$$

Для доказательства экстремальных свойств решений уравнения (1) воспользуемся единственным решением некоторых краевых задач в областях G^-, G^+, H^- и H^+. Доказательства существования и единственности решений этих краевых задач здесь приводить не будем. Области, краевые условия и единственные решения представим в виде таблицы.

№	Задача	Область	Краевые условия	Единственное решение задачи
1.	$D\,\mathrm{I}$	G^+	(2)–(4)	$\mathcal{U}_+(x,y,z)=\tau_1(x,y)+f_1(x,z)-f_1(x,x-y)+$ $+g_1(y,z)-g_1(0,z)-g_1(y,x-y)+g_1(0,x-y)$
2.	B	G^-	(4)–(6)	$\mathcal{U}_-(x,y,z)=\tau_1(x,x-z)+\varphi_1(x,y)-$ $-\varphi(x,x-y)+\int\limits_y^{x-z}\varphi_{1t}(t+z,t)dt-\int\limits_y^{x-z}\omega(t+z,t)dt$
3.	$C-G$	H^-	(7)–(9)	$\mathcal{U}_-(x,y,z)=\frac{1}{2}[\tau(x,z)+\tau_2(y,z)]+g(x,y)-$ $-\frac{1}{2}\int\limits_x^y[\nu(t,z)-\nu(t,x)]dt$
4.	$D\,\mathrm{II}$	H^+	(7), (10), (11)	$\mathcal{U}_+(x,y,z)=\tau_2(x,z)+f(x,y)-f(x,h)+$ $+\varphi(y,z)-\varphi(x,z)-\varphi(x,h)-\varphi(y,h)$

Лемма 1. *Если решение $\mathcal{U}_+(x,y,z)$ уравнения (1) в области G^+ таково, что функция $\mathcal{U}(x,y,x-y)=\tau_1(x,y)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения во внутренней точке M_0 множества G_3 и при этом $\mathcal{U}_+(x,0,z)$ на множестве G_1 и $\mathcal{U}_+(h,y,z)$ на множестве G_2 тождественно равны нулю, то*

$$\frac{\partial\mathcal{U}_+(M_0)}{\partial\overline{n}}=0,\quad \frac{\partial^2\mathcal{U}_+(M_0)}{\partial\overline{n}^2}<0\quad\left(\frac{\partial^2\mathcal{U}_+(M_0)}{\partial\overline{n}^2}>0\right),$$

где $\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\overline{n}}=-\mathcal{U}_x+\mathcal{U}_y+\mathcal{U}_z$, $\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial\overline{n}^2}=\mathcal{U}_{xx}+\mathcal{U}_{yy}+\mathcal{U}_{zz}-2\mathcal{U}_{xy}-2\mathcal{U}_{xz}+2\mathcal{U}_{yz}$, $\overline{n}=(-1,1,1)$.

Доказательство. Пусть для решения задачи $D\,\mathrm{I}$ выполнены условия леммы. Тогда $\mathcal{U}_+(x,y,z)=\tau_1(x,y)$. Вычисления дают

$$\frac{\partial\mathcal{U}_+}{\partial\overline{n}}\Big|_{z=x-y}=\tau_{1y}(x,y)-\tau_{1x}(x,y).$$

Так как функция $\tau_1(x,y)$ в точке M_0 имеет экстремум, то $\frac{\partial\mathcal{U}_+(M_0)}{\partial\overline{n}}=0$. Нетрудно получить

$$\frac{\partial^2\mathcal{U}_+(M_0)}{\partial\overline{n}^2}=\tau_{1xx}(M_0)+\tau_{1yy}(M_0)-2\tau_{1xy}(M_0). \tag{12}$$

Введем обозначения $\tau_{1xx}(M_0)=a$, $\tau_{1yy}(M_0)=b$, $\tau_{1xy}(M_0)=c$. Пусть в точке M_0 достигается положительный максимум. Тогда по достаточному условию существования экстремума функции двух переменных $a<0$, $ab-c^2>0$. Очевидно, $b<0$ и $\sqrt{ab}>|c|$. С учетом этих неравенств равенство (12) примет вид

$$\frac{\partial^2\mathcal{U}_+(M_0)}{\partial\overline{n}^2}=-(\sqrt{-a}-\sqrt{-b}\,)^2-2(\sqrt{ab}+c).$$

Отсюда следует $\frac{\partial^2\mathcal{U}(M_0)}{\partial\overline{n}_2}<0$. Аналогично убеждаемся, что $\frac{\partial^2\mathcal{U}_+(M_0)}{\partial\overline{n}^2}>0$, если в точке M_0 достигается отрицательный минимум. $\square$

Уравнение (1) рассмотрим на множестве $G=G^-\cup G^+$.

Задача Г. *Найти функцию $\mathcal{U}(x,y,z)$ со следующими свойствами:*

1) $\mathcal{U}(x,y,z)\in\mathbb{C}(\overline{G})$;
2) $\mathcal{U}(x,y,z)$ — *решение уравнения* (1) *на множестве G, удовлетворяющее условиям* (2), (3), (6) *и условиям сопряжения*

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\overline{n}}\Big|_{z=x-y+0}=\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y}\Big|_{z=x-y-0}, \tag{13}$$
$$\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial\overline{n}^2}\Big|_{z=x-y+0}=\Big[\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\omega(z+y,y)}{\partial(z+y)}\Big]\Big|_{z=x-y-0}. \tag{14}$$

Теорема 1. *Если существует решение задачи* Γ, *то оно единственно.*

Доказательство. Достаточно показать, что решение задачи Γ с однородными краевыми условиями тождественно равно нулю. Пусть функции $f_1(x,y)$, $g_1(x,y)$ и $\varphi_1(x,y)$ тождественно равны нулю. Из условия 1) постановки задачи Γ следует, что функция $\mathcal{U}(x,y,x-y)=\tau_1(x,y)$ непрерывна на множестве G_3. По теореме Вейерштрасса на этом множестве она достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Пусть она принимает свое наибольшее положительное значение в точке $M_0(x_0,y_0,x_0-y_0)$ множества G_3. Так как функция $\tau(x,y)$ на границе множества G_3 обращается в нуль, то точка M_0 внутренняя. Но тогда по лемме 1

$$\frac{\partial^2\mathcal{U}(M_0)}{\partial\overline{n}^2}<0.$$

Из решения задачи B получаем

$$\Big[\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\omega(z_y,y)}{\partial(z+y)}\Big]\Big|_{z=x-y-0}\equiv 0,$$

а это противоречит условию сопряжения (14). Значит, внутри множества G_3 функция $\tau(x,y)$ не может достигать своего наибольшего положительного значения. Следовательно, на множестве G_3 функция $\tau(x,y)=C$ — const. Так как на границе G_3 функция $\tau(x,y)=0$, то $\tau(x,y)\equiv 0$ на G_3. Но тогда из единственности решения задачи $D\,\mathrm{I}$ следует, что $\mathcal{U}(x,y,z)\equiv 0$ в $\overline{G}^{+}$. Из условия 1) постановки задачи Γ и условия сопряжения (13) получаем $\mathcal{U}(x,y,z)\equiv 0$ на множестве $\overline{G}^{-}$. Отсюда $\mathcal{U}(x,y,z)\equiv 0$ в G. □

Лемма 2. *Если решение* $\mathcal{U}_-(x,y,z)$ *уравнения* (1) *в области* H^- *таково, что функция* $\mathcal{U}_-(x,y,z)=\tau_2(x,z)$ *достигает своего наибольшего положительного* (*наименьшего отрицательного*) *значения во внутренней точке* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *множества* H_1 *и при этом* $\mathcal{U}_-(x,y,x)$ *и* $\frac{\partial\mathcal{U}_-(x,y,z)}{\partial\overline{m}}$ *тождественно равны нулю на множествах* H_1 *и* H_2 *соответственно, то*

$$\frac{\partial^2\mathcal{U}_-(M_0)}{\partial\overline{m}^2}<0\quad\Big(\frac{\partial^2\mathcal{U}_-(M_0)}{\partial\overline{m}^2}>0\Big).$$

Доказательство. При выполнении условий леммы 2 решение задачи $C-G$ примет вид

$$\mathcal{U}_-(x,y,z)=\frac{1}{2}[\tau(x,z)+\tau(y,z)].$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2\mathcal{U}(x,y,z)}{\partial\overline{m}^2}=\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2\tau(x,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(y,z)}{\partial y^2}\Big].$$

Пусть в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ достигается положительный максимум. Тогда

$$\frac{\partial^2\mathcal{U}_-(M_0)}{\partial\overline{m}^2}=\tau_{xz}(x_0,z_0)<0$$

в силу достаточного признака существования экстремума функции двух переменных. Аналогично, если в точке M_0 достигается отрицательный минимум, то $\frac{\partial^2\mathcal{U}_-(M_0)}{\partial\overline{m}^2}>0$. □

Лемма 3. *Если решение $\mathcal{U}_+(x,y,z)$ уравнения* (1) *в области H^+ таково, что функция $\mathcal{U}_+(x,x,z)$ достигает своего наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения во внутренней точке множества H_1 и при этом $\mathcal{U}_+(0,y,z)$ и $\mathcal{U}_+(x,y,h)$ тождественно равны нулю на множествах H_3 и H_4 соответственно, то*

$$\frac{\partial\mathcal{U}_+(M_0)}{\partial\overline{m}}=0,\quad \frac{\partial^2\mathcal{U}_+(M_0)}{\partial\overline{m}^2}<0\ \left(\frac{\partial^2\mathcal{U}_+(M_0)}{\partial\overline{m}^2}>0\right).$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству леммы 2 с использованием решения задачи D II.

Задача D. *Пусть $H=H^-\cup H^+$. Найти функцию $\mathcal{U}(x,y,z)$ со следующими свойствами:*

1) $\mathcal{U}(x,y,z)\in\mathbb{C}(\overline{H})$;
2) $\mathcal{U}(x,y,z)$ — *решение уравнения* (1) *на множестве H, удовлетворяющее условиям* (9)–(11) *и условиям сопряжения*

$$\frac{\partial\mathcal{U}_-}{\partial\overline{m}}\Big|_{y-x=-0}=\frac{\partial\mathcal{U}_+}{\partial\overline{m}}\Big|_{y-x=+0},$$
$$\frac{\partial^2\mathcal{U}_-}{\partial\overline{m}^2}\Big|_{y-x=-0}=-\frac{\partial^2\mathcal{U}_-}{\partial\overline{m}^2}\Big|_{y-x=+0}.$$

Теорема 2. *Если существует решение задачи D, то оно единственно.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Литература

1. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* – М.: Высш. школа, 1985. – 304 с.
2. Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. *Краевые задачи для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.* – Куйбышев.: Изд-во пед. ин-та, 1984. – 80 с.
3. Волкодавов В.Ф. *Об одной формулировке локального экстремума* // Волжск. матем. сб. – 1970, вып. 11. – С. 42–54.
4. Волкодавов В.Ф., Невойструев Л.М. *О принципе локального экстремума для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и его применение* // Волжск. матем. сб. – 1966, вып. 5.

Самарский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 20.11.1995
окончательный вариант 05.01.1999