ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 517.518

М.Ю. ЗДОРОВЕНКО

ГИПЕРКОНЕЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В работе [1] развит подход к теории рядов Фурье, основанный на нестандартном анализе. Этот подход опирается на аппроксимацию окружности S^1 группой корней степени N из единицы, где N — бесконечно большое натуральное число в смысле нестандартного анализа, и на аппроксимацию преобразования Фурье (ПФ)

$$f : L_2(S^1) \to l_2(\mathbb{Z})$$

преобразованием Фурье на этой группе (ниже такое преобразование называется гиперконечным). В силу принципа переноса в нестандартном анализе гиперконечное ПФ обладает основными свойствами конечного ПФ. В [2], [3] этот подход распространен на гармонический анализ на произвольных локально компактных абелевых группах, где, в частности, изучается гиперконечная аппроксимация ПФ $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, задаваемого формулой

$$\mathcal{F}[f](y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp((i/h)(x, y))dx. \tag{1}$$

Данная работа продолжает исследования работ [2], [3]. Прежде всего, здесь исследуется аппроксимация ПФ (1), рассматриваемого как оператор из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_q(\mathbb{R}^n)$,

$$n \in \omega; \quad 1 \le p \le 2; \quad 2 \le q \le \infty; \quad 1/p + 1/q = 1, \tag{2}$$

причем $\|\mathcal{F}\| \le 1$ (неравенство Хаусдорфа–Юнга). В работе рассматривается аппроксимация свертки $* : L_p(\mathbb{R}^n) \times L_q(\mathbb{R}^n) \to L_r(\mathbb{R}^n)$ свертками функций на группе вычетов по модулю N и показывается, что Фурье-образ свертки аппроксимируется произведением гиперконечных аппроксимаций Фурье-образов, поэтому гиперконечная аппроксимация ПФ сохраняет все его основные свойства. Кроме того, более подробно, чем в [2], изучена аппроксимация ПФ при более общих дискретизациях его ядра (см. [2], § 3). Полученные результаты распространены на обобщенные функции и их дискретные аналоги. Результаты статьи имеют стандартную интерпретацию и могут быть сформулированы как стандартные утверждения о табличной сходимости упомянутых выше операторов. Общепринятые термины и обозначения нестандартного анализа [4] используются без особых пояснений. Нестандартный подход при исследовании табличных аппроксимаций операторов основан на том, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ заменяется таблицей ее значений в узлах сетки с бесконечно малыми шагами Δ_j по каждой оси ($j = \overline{1, n}$) на бесконечно большом интервале, т. е. фиксируются бесконечно малые числа Δ_j и бесконечно большое натуральное число $N = 2M + 1$ такие, что $\Delta_j N$ бесконечно велики ($j = \overline{1, n}$). Значение переменной x_j рассматривается в точках $\Delta_j k_j$, $k_j = \overline{-M, M}$, и стандартная функция f заменяется таблицей $\Phi_\Delta(f)$ ее значений в этих точках, а интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ заменяется суммой значений функции ${}^*f$ в узлах сетки, умноженной на величину $\prod\limits_{j=1}^{n} \Delta_j$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 95-01-00673а).

Как показано в [2], для функций, интегрируемых по Риману в любом конечном промежутке и обладающих свойством

$$\lim_{\substack{c\to\infty\\ t\to 0}} \Big(t \sum_{\nu>c/t} f(\nu t) + f(-\nu t)\Big) = 0, \tag{3}$$

имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = st\Big(\Delta \sum_{k=-M}^{M}{}^{*} f(\Delta k)\Big).$$

Аналогичное равенство имеет место и для функций из $L_1(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих аналогу условия (3). Следуя [2], обозначим множество таких функций через $\mathfrak{G}$, а множество функций $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, для которых $|f|^p\in\mathfrak{G}$ — через $\mathfrak{G}_p$. Далее вместо ${}^*f$ будем писать просто f и введем следующие *обозначения*: $a\approx\infty$ — "a бесконечно велико"; $a\approx 0$ — "a бесконечно мало"; $a\ll\infty$ — "a конечно"; $\Delta=(\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n)$; $\prod\Delta=\prod\limits_{j=1}^{n}\Delta_j$; $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$; $|x|=|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$.

Для векторов числовые операции и отношения определяются покомпонентно (например, $xy=(x_1y_1,x_2y_2,\dots,x_ny_n)$). Вектор, все координаты которого равны числу α, обозначается символом α.

Через $\mathbf{k}$ будем обозначать вектор $(k_1,k_2,\dots,k_n)$, элементами которого являются гиперцелые числа. Соответственно запись $\mathbf{k}=\overline{\mathbf{s},\mathbf{m}}$ означает, что для $j\in\{1,2,\dots,n\}$ компонента k_j вектора $\mathbf{k}$ пробегает все значения от s_j до m_j, а для суммы $\sum\limits_{\mathbf{k}=\mathbf{s}}^{\mathbf{m}}=\sum\limits_{k_1=s_1}^{m_1}\cdots\sum\limits_{k_n=s_n}^{m_n}$. Если для всех j $s_j=-M$, а $m_j=M$, то вместо $\mathbf{k}=\overline{\mathbf{s},\mathbf{m}}$ будем писать $\mathbf{k}=\overline{-M,M}$, а для суммы $\sum\limits_{\mathbf{k}=\mathbf{s}}^{\mathbf{m}}=\sum\limits_{\mathbf{k}=-M}^{M}$.

$\Phi_\Delta(f)$ — это таблица значений функции f в узлах $(\Delta\mathbf{k})$, т. е. $\Phi_\Delta(f)=\langle f(\Delta\mathbf{k})\mid\mathbf{k}=\overline{-M,M}\rangle$. Размер полученной таблицы равен N^n. Пусть $\mathcal{L}_\Delta(n)$ — пространство внутренних таблиц $F=\langle F(\mathbf{k})\mid\mathbf{k}=\overline{-M,M}\rangle$ размера N^n с нормой $\|F\|_{p\Delta}=\Big(\prod\Delta\sum\limits_{\mathbf{k}=-M}^{M}|F(\mathbf{k})|^p\Big)^{1/p}$ при $1\le p<\infty$, и $\|F\|_{\infty\Delta}=\max\{|F(\mathbf{k})|\mid\mathbf{k}=\overline{-M,M}\}$. Для вектора $\mathbf{b}$ и таблицы F из $\mathcal{L}_\Delta(n)$ определим величины $|F|^{\mathbf{b}}_{p\Delta}=\prod\Delta\sum\limits_{\mathbf{k}=-\mathbf{b}}^{\mathbf{b}}|F(\mathbf{k})|^p$ при $1\le p<\infty$ и $|F|^{\mathbf{b}}_{\infty\Delta}=\max\{|F(\mathbf{k})|\mid\mathbf{k}=\overline{-\mathbf{b},\mathbf{b}}\}$. Далее через $E_{p\Delta}(n)$ обозначим подпространство конечных элементов из $\mathcal{L}_\Delta(n)$: $E_{p\Delta}(n)=\{F\in\mathcal{L}_\Delta(n)\mid\|F\|_{p\Delta}\ll\infty\}$.

1°. Как известно, конечное ПФ задается формулой

$$\mathcal{F}_\Delta[F]=\prod\Delta\sum_{\mathbf{k}=-M}^{M}F(\mathbf{k})\exp(-2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{m})/N).$$

Когда $\Delta\approx 0$, $N\approx\infty$, такое преобразование называется гиперконечным ПФ. Из результатов работы [2] следует, что интегральное ПФ $\mathcal{F}:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ аппроксимируется гиперконечным ПФ $\mathcal{F}_\Delta:E_{2\Delta}(n)\to E_{2\widehat{\Delta}}(n)$ в том смысле, что для функций $f\in\mathfrak{G}_2$ норма $\|\mathcal{F}_\Delta[\Phi_\Delta(f)]-\Phi_{\widehat{\Delta}}(\mathcal{F}[f])\|_{2\widehat{\Delta}}\approx 0$, если выполнены условия (здесь $\widehat{\Delta}$ — это длина шага сетки пространства значений функции)

$$\Delta\approx 0;\quad N\in{}^*\omega\setminus\omega;\quad \Delta N\approx\infty;\quad \Delta^2N\ll\infty, \tag{4}$$

$$\widehat{\Delta}\approx 0;\quad \widehat{\Delta}N\approx\infty;\quad \widehat{\Delta}^2N\ll\infty \tag{5}$$

и

$$\Delta_j\widehat{\Delta}_jN\approx 1;\quad j=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Общее определение аппроксимации оператора $A:L_p(\mathbb{R}^n)\to L_q(\mathbb{R}^n)$ при $n=1$ дано в [2]. Это определение и последующий критерий аппроксимируемости ([2], теорема 2) без всяких изменений переносятся и на случай $n\ge 2$. Ниже в качестве множества функций $\mathfrak{M}$ с плотной в $L_p(\mathbb{R}^n)$

линейной оболочкой $L(\mathfrak{M})$ теоремы 2 из [2] берется множество характеристических функций n-мерных параллелограммов в $\mathbb{R}^n$.

Оператор $\mathcal{F} : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$ ограничен. Покажем, что оператор $\mathcal{F}_\Delta$ ограничен. В этом случае согласно критерию аппроксимируемости для доказательства аппроксимируемости оператора $\mathcal{F}$ оператором $\mathcal{F}_\Delta$ на всем $L_p(\mathbb{R}^n)$ достаточно проверить выполнение соотношения $\|\mathcal{F}_\Delta[\Phi_\Delta(f)] - \Phi_{\widehat{\Delta}}(\mathcal{F}[f])\|_{q\widehat{\Delta}} \approx 0$ для $f \in \mathfrak{M}$.

Предложение 1. *Оператор $\mathcal{F}_\Delta$ ограничен и $\|\mathcal{F}_\Delta\| \le 1$ при условиях* (2), (4), (5) *и* $\Delta\widehat{\Delta}N = 1$.

Предложение 1 есть аналог неравенства Хаусдорфа–Юнга для гиперконечных пространств. В качестве следствия заметим, что при выполнении условий (2), (4), (5) и $\Delta\widehat{\Delta}N \ll \infty$ оператор $\mathcal{F}_\Delta$ ограничен, и его норма не превосходит величины $\big(\prod(\Delta_j\widehat{\Delta}_jN)\big)^{2/q}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2), (4) *и* (5). *Оператор $\mathcal{F}_\Delta$ аппроксимирует оператор $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда* $\Delta\widehat{\Delta}N \approx 1$.

Следствие. Оператор $\mathcal{F}_\Delta$ аппроксимирует оператор $\mathcal{F}_h$ тогда и только тогда, когда $\Delta\widehat{\Delta}N \approx 2\pi h$.

2°. Пусть оператор $\widetilde{\mathcal{F}}_\Delta : E_{p\Delta}(n) \to E_{q\widehat{\Delta}}(n)$ получается дискретизацией ядра $K(x,y) = \exp(-2\pi i xy)$ оператора $\mathcal{F}$: для $F \in E_{p\Delta}(n)$

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\Delta[F](\mathbf{m}) = \prod \Delta \sum_{\mathbf{k}=-M}^{M} F(\mathbf{k}) \exp(-2\pi i(\Delta\mathbf{k},\ \widehat{\Delta}\mathbf{m})).$$

Предложение 2. *Если выполнены условия* (4)–(6) *и для* $j = \overline{1,n}$

$$h_j = \Delta_j\widehat{\Delta}_jN; \quad |h_j - 1|^q N^{n+q} \ll \infty, \tag{7}$$

то оператор $\widetilde{\mathcal{F}}_\Delta$ ограничен.

Теорема 2. 1) *Если выполнены условия* (2), (4)–(7), *то оператор $\widetilde{\mathcal{F}}_\Delta$ аппроксимирует оператор $\mathcal{F}$;*

2) *если $0 < \Delta\widehat{\Delta}N < 2$, то $\|\widetilde{\mathcal{F}}_\Delta[\Phi_\Delta(f)] - \Phi_{\widehat{\Delta}}(\mathcal{F}[f])\|_{q\widehat{\Delta}} \approx 0$ для $f \in L(\mathfrak{M})$;*

3) *если условие $0 < \Delta\widehat{\Delta}N < 2$ нарушено, то $\widetilde{\mathcal{F}}_\Delta$ не аппроксимирует $\mathcal{F}$.*

3°. Далее изучаются свойства гиперконечного оператора свертки в пространстве $\mathcal{L}_\Delta(n)$. Под *сверткой* $F *_\Delta G$ двух таблиц из $\mathcal{L}_\Delta(n)$ будем понимать таблицу H из $\mathcal{L}_\Delta(n)$, получающуюся по следующему правилу: $H(\mathbf{m}) = \prod \Delta \sum_{\mathbf{k}=-M}^{M} F(\mathbf{k})G(\mathbf{m} \dot{-} \mathbf{k})$. Точка над знаками $\dot{+}$ и $\dot{-}$ означает сложение и вычитание соответственно в группе вычетов $\{-M; -M+1; \ldots; M\}$ по модулю N.

Пусть $1 \le p, q, r \le \infty$, причем

$$1/p + 1/q = 1 + 1/r. \tag{8}$$

Тогда свертка функций $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $L_r(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, преобразование Фурье свертку функций переводит в произведение Фурье-образов этих функций. Аналогичными свойствами обладает и дискретное ПФ, а значит, и гиперконечные аналоги операторов свертки и ПФ. Здесь показано, что оператор свертки $(*)$ аппроксимируется его дискретным аналогом $(*_\Delta)$.

Теорема 3. 1) *Если $F \in E_{p\Delta}(n)$, $G \in E_{q\Delta}(n)$ и выполнено* (8), *то $F *_\Delta G \in E_{r\Delta}(n)$;*

2) *если $F, G \in \mathcal{L}_\Delta(n)$, то $\mathcal{F}_\Delta[F *_\Delta G] = \mathcal{F}_\Delta[F] \cdot \mathcal{F}_\Delta[G]$;*

3) *если выполнены условия* (4), (8), *то гиперконечный оператор свертки $*_\Delta : E_{p\Delta}(n) \times E_{q\Delta}(n) \to E_{r\Delta}(n)$ аппроксимирует стандартный оператор свертки $* : L_p(\mathbb{R}^n) \times L_q(\mathbb{R}^n) \to L_r(\mathbb{R}^n)$ в том смысле, что для $f \in \mathfrak{G}_p$, $g \in \mathfrak{G}_q$*

$$\|\Phi_\Delta(f) *_\Delta \Phi_\Delta(g) - \Phi_\Delta(f * g)\|_{r\Delta} \approx 0.$$

4°. Под производной по j-й переменной ($j = \overline{1,n}$) от F из $\mathcal{L}_\Delta(n)$ понимается элемент $G = \mathbb{D}_j F$ из $\mathcal{L}_\Delta(n)$ такой, что

$$G(\mathbf{k}) = (F(k_1,\dots,k_{j-1},k_j \dot{+} 1, k_{j+1},\dots,k_n) - F(k_1,\dots,k_{j-1},k_j \dot{-} 1,k_{j+1},\dots,k_n))/(2\Delta_j).$$

Пусть $\Lambda = \omega^n$. Легко проверяется, что операторы $\mathbb{D}_i$ и $\mathbb{D}_j$ коммутируют, поэтому для $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in \Lambda$ оператор $\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)} = \mathbb{D}_1^{\alpha_1}\cdots\mathbb{D}_n^{\alpha_n}$ определен корректно.

Теорема 4. *Пусть $p \geq 1$ и выполнены условия (4). Для любого $\alpha \in \Lambda$ оператор $\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}$ аппроксимирует стандартный оператор дифференцирования $D^{(\alpha)}$ функций из $S(\mathbb{R}^n)$ в том смысле, что для $f \in S(\mathbb{R}^n)$*

$$\|\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}(\Phi_\Delta(f)) - \Phi_\Delta(f^{(\alpha)})\|_{p\Delta} \approx 0.$$

Напомним, что $S(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций.

Приведем несколько формул для гиперконечных операторов ПФ, свертки и дифференцирования в $\mathcal{L}_\Delta(n)$, которые являются аналогами формул для стандартных операторов и проверяются непосредственными вычислениями: если F и G из $\mathcal{L}_\Delta(n)$, то

1) $\widetilde{\mathcal{F}}_\Delta[\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}F] = \widetilde{A}_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(\mathcal{F}_\Delta[F])$;

2) $\mathcal{F}_\Delta[\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}F] = A_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(\mathcal{F}_\Delta[F])$,

здесь операторы $\widetilde{A}_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$ и $A_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$ суть операторы умножения на величину $\prod(i\sin(2\pi\Delta_j\widehat{\Delta}_j m_j)/\Delta_j)^{\alpha_j}$ и $\prod(i\sin(2\pi m_j/N)/\Delta_j)^{\alpha_j}$ соответственно;

3) $(\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}F) *_\Delta G = \mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}(F *_\Delta G) = F *_\Delta (\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}G)$.

Далее упорядочим множество Λ лексикографически и определим последовательность $\langle \mathcal{L}_{p\Delta}^{(k)} \mid k \in \omega\rangle$ внешних подпространств $\mathcal{L}_\Delta(n)$: $\mathcal{L}_{p\Delta}^{(0)} = \{F \in \mathcal{L}_\Delta(n) \mid$ для любого ${}^{st}\overline{A} > 0$ существует ${}^{st}C > 0$ такое, что для $\mathbf{b} = [\overline{A}/\Delta]$ $|F|_{p\Delta}^{(\mathbf{b})} < C\}$. Для $k \in \omega$ рассмотрим такие $\alpha \in \Lambda$, для которых $|\alpha| = k$. Занумеровав их в порядке возрастания $\alpha(1) < \alpha(2) < \dots < \alpha(s)$, определим пространства

$$\mathcal{L}_{p\Delta}^{(k)} = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{D}_\Delta^{(\alpha(j))}\mathcal{L}_{p\Delta}^{(0)} = \bigoplus_{|\alpha|=k} \mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}\mathcal{L}_{p\Delta}^{(0)}; \quad \mathcal{L}_{p\Delta}^{(\sigma)} = \bigoplus_{k\in\omega}\mathcal{L}_{p\Delta}^{(k)}.$$

Аналогично построим пространство $\mathcal{C}_{p\Delta}^{(\sigma)} : \mathcal{C}_{p\Delta}^{(0)} = E_{p\Delta}$, т. е.

$$\mathcal{C}_{p\Delta}^{(0)} = \{F \in \mathcal{L}_{p\Delta}^{(0)} \mid \|F\|_{p\Delta} \ll \infty\}; \quad \mathcal{C}_{p\Delta}^{(k)} = \bigoplus_{|\alpha|=k}\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}\mathcal{C}_{p\Delta}^{(0)}; \quad \mathcal{C}_{p\Delta}^{(\sigma)} = \bigoplus_{k\in\omega}\mathcal{C}_{p\Delta}^{(k)}.$$

Будем говорить, что F из $\mathcal{L}_\Delta(n)$ имеет *конечный носитель*, если найдется стандартное положительное A такое, что $F(\mathbf{k}) = 0$, как только для некоторого j из $\{1,2,\dots,n\}$ $|k_j| > A/\Delta_j$.

Очевидно, что если F имеет конечный носитель, то и $\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}F$ имеет конечный носитель ($\alpha \in \Lambda$).

Предложение 3. 1) *Если $1 \leq p,q,r \leq \infty$ и $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, то для $F \in \mathcal{C}_{p\Delta}^{(0)}$, $G \in \mathcal{C}_{q\Delta}^{(0)}$ их свертка $F *_\Delta G \in \mathcal{C}_{r\Delta}^{(0)}$, а для $F \in \mathcal{C}_{p\Delta}^{(\sigma)}$ и $G \in \mathcal{C}_{q\Delta}^{(\sigma)}$ $F *_\Delta G \in \mathcal{C}_{r\Delta}^{(\sigma)}$.* 2) *Если $p,q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, G имеет конечный носитель, то для $F \in \mathcal{C}_{p\Delta}^{(0)}$ и $G \in \mathcal{C}_{q\Delta}^{(0)}$ их свертка $F *_\Delta G \in \mathcal{C}_{p\Delta}^{(0)}$, а для $F \in \mathcal{C}_{p\Delta}^{(\sigma)}$ и $G \in \mathcal{C}_{q\Delta}^{(\sigma)}$ $F *_\Delta G \in \mathcal{C}_{p\Delta}^{(\sigma)}$.*

5°. Далее рассматривается вопрос об аппроксимации операторов свертки, ПФ и дифференцирования для обобщенных функций. Напомним, что $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ есть пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями. Введем на $\mathcal{L}_\Delta(n)$ скалярное произведение $(F,G)_\Delta = (\prod\Delta)\sum\limits_{\mathbf{k}=-M}^{M} F(\mathbf{k})\overline{G(\mathbf{k})}$. Пусть F из $\mathcal{L}_\Delta(n)$ таково, что для всякой функции f из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($S(\mathbb{R}^n)$ соответственно) величина $(F,\overline{\Phi_\Delta(f)})_\Delta$ конечна. Тогда определен линейный функционал $\psi_F^\Delta(f)$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($S(\mathbb{R}^n)$ соответственно) в $\mathbb{C}$ такой, что $\psi_F^\Delta(f) = st(F,\overline{\Phi_\Delta(f)})_\Delta$. Следующие теоремы отвечают на вопрос, когда функционал ψ_F^Δ задает обобщенную функцию, и описывают основные свойства этих функционалов.

Теорема 5. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\alpha \in \Lambda$ *и выполнены условия* (4).

1) *Для всякого* F *из* $\mathcal{L}_{p\Delta}^{(\sigma)}$ *функционал* $\psi_F^\Delta \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$.
2) *Если* g *есть обобщенная функция из* $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$ *и* $g = \varphi^{(\alpha)}$ *для некоторой регулярной ОФ* φ, *то найдется такое* $G \in \mathcal{L}_{p\Delta}^{(\sigma)}$, *что* $\psi_G^\Delta = g$.
3) *Для всякого* F *из* $\mathcal{L}_{p\Delta}^{(\sigma)}$ $(\psi_F^\Delta)^{(\alpha)} = \psi^\Delta_{\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}[F]}$.

Теорема 6. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\alpha \in \Lambda$ *и выполнены условия* (4), (5).

1) *Если* $F \in \mathcal{C}_{p\Delta}^{(\sigma)}$, *то* $\psi_F^\Delta \in (S(\mathbb{R}^n))'$.
2) *Если* $g \in (S(\mathbb{R}^n))'$, *то найдется* G *из* $\mathcal{C}_{p\Delta}^{(\sigma)}$ *такое, что* $g = \psi_G^\Delta$.
3) *Для всякого* F *из* $\mathcal{C}_{p\Delta}^{(\sigma)}$
   а) $(\psi_F^\Delta)^{(\alpha)} = \psi^\Delta_{\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)} F}$;
   б) $\mathcal{F}[\psi_F^\Delta]$, $\psi^{\widehat{\Delta}}_{\mathcal{F}_\Delta[F]}$ *лежат в* $(S(\mathbb{R}^n))'$, *причем при* $p \le 2$ *и* $\Delta\widehat{\Delta}N \approx 1$ *они равны.*
4) *Если* $F \in \mathcal{C}_{p\Delta}^{(\sigma)}$, $G \in \mathcal{C}_{q\Delta}^{(\sigma)}$ *и выполнено* (8), *то*
   а) $\psi_F^\Delta * \psi_G^\Delta \in (S(\mathbb{R}^n))'$ *и* $\psi_F^\Delta * \psi_G^\Delta = \psi^\Delta_{F *_\Delta G}$;
   б) $D^{(\alpha)}(\psi_F^\Delta * \psi_G^\Delta) \in (S(\mathbb{R}^n))'$ *и* $D^{(\alpha)}(\psi_F^\Delta * \psi_G^\Delta) = \psi^\Delta_{\mathbb{D}_\Delta^{(\alpha)}(F *_\Delta G)}$;
   в) $\mathcal{F}[\psi_F^\Delta * \psi_G^\Delta] \in (S(\mathbb{R}^n))'$ *и* $\mathcal{F}[\psi_F^\Delta * \psi_G^\Delta] = \mathcal{F}[\psi_F^\Delta] \cdot \mathcal{F}[\psi_G^\Delta]$.

Литература

1. Luxemburg W.A.J. *A nonstandard analysis approach to Fourier analysis* // Contrib. Non-Standard Anal. Amsterdam. – North-Holland, 1972. – P. 16–39.
2. Гордон Е.И. *О преобразовании Фурье в нестандартном анализе* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 2. – С. 17-25.
3. Гордон Е.И. *Нестандартные конечномерные аналоги операторов в* $L_2(\mathbb{R}^n)$ // Сиб. матем. журн. – 1988. – Т. 29. – № 2. – С. 45–59.
4. Девис М. *Прикладной нестандартный анализ.* – М.: Мир, 1980. – 236 с.

Вятский государственный
педагогический университет

Поступили
полный текст 25.09.1995
краткое сообщение 17.12.1997